

السلسلة رقم 01

النهايات والاستمرارية



حساب النهايات

بمختلف الطرق

المستقيمات المقاربة

الاستمرارية

مبرهنة القيمة المتوسطة

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x-1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 + \sqrt{4x^2 + x - 13}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2}x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$$

$$15. \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x} + 2x - 1}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x} + 2x - 1}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 8x + 3}$$

01

التمرين رقم



في كل حالة مما يلي، احسب نهايات الدالة f عند أطراف D_f ثم فسر - إن أمكن - النتائج ببساطة.

$$① f(x) = \frac{3x^3 + x - 4}{(3-x)^2}, D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$② f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}-1}, D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$$

$$③ f(x) = x - \frac{x}{\sqrt{x+2}}, D_f =]-2;+\infty[$$

$$④ f(x) = \sqrt{\frac{-2x+8}{1-x}}, D_f =]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$$

$$⑤ f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}, D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$$

$$⑥ f(x) = x - \sqrt{x^2+3}, D_f = \mathbb{R}$$

$$⑦ f(x) = \frac{|x+1|}{x^2-1}, D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$$

$$⑧ f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x^2+4x}, D_f = \mathbb{R} - \{-2;0\}$$

02

التمرين رقم



باستعمال طريقة مناسبة، احسب النهايات التالية:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 3} - x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 3x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+2x^2} - \sqrt{x^2+x+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{1-x}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 + x^2}{x} \right) \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) (x^3 + 1)$$

03 التمرين رستم



باستعمال مبرهنات المقارنة (الحد من الأعلى، الحد من الأسفل، الحصر)، احسب النهايات التالية:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sin 2x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sin x}{x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1 + \sin x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x \cos x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x + \cos 2x}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \sin x)}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5 \cos x + 1)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x} + 1}$$

04 التمرين رستم



f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1 \quad \text{و} \quad x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x + 1)^2$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$1 - \frac{1}{x + 1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

05 التمرين رستم



f دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{4 \sin x + 3x}{x - 1}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$:

$$f(x) = \frac{4 \sin x + 3}{x - 1} + 3$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + x + 15}{(x - 3)^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + |x - 1| - 1}{x^2 - x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+2}}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

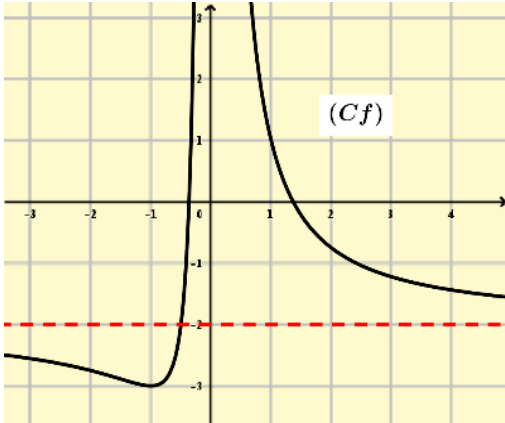
$$35. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} (2\sqrt{x} - 1)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} (3x - \sqrt{x^2 + 2x})$$

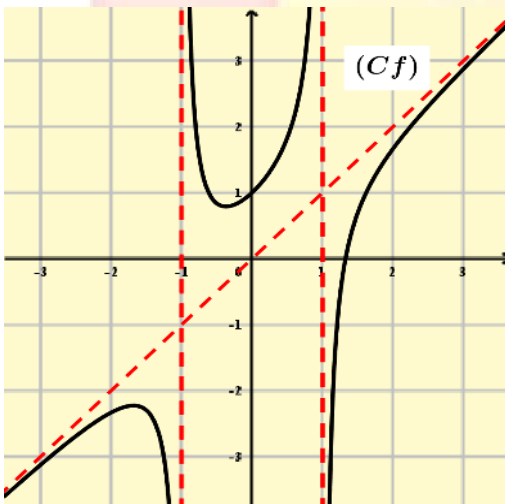
$$37. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right) \sqrt{\frac{1}{x}}$$

(1) عين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف للدالة f .

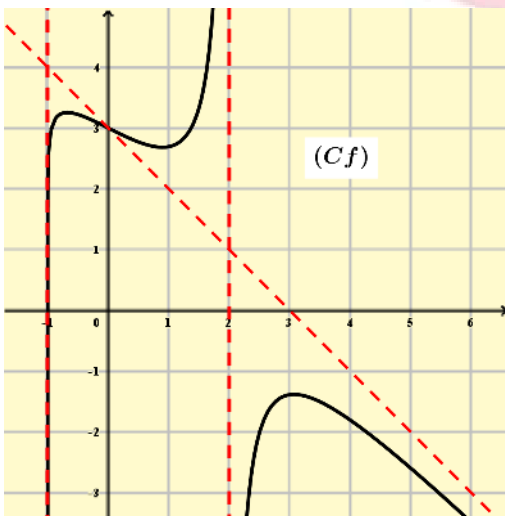
(2) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) مع تحديد الوضع النسبي له في حالة مقارب أفقي أو مائل.



الحالة 01



الحالة 02



الحالة 03

(2) أثبت أن: $|4 \sin x + 3| \leq 7$ ، ثم استنتج أن:

$$|f(x) - 3| \leq \frac{7}{x-1}$$

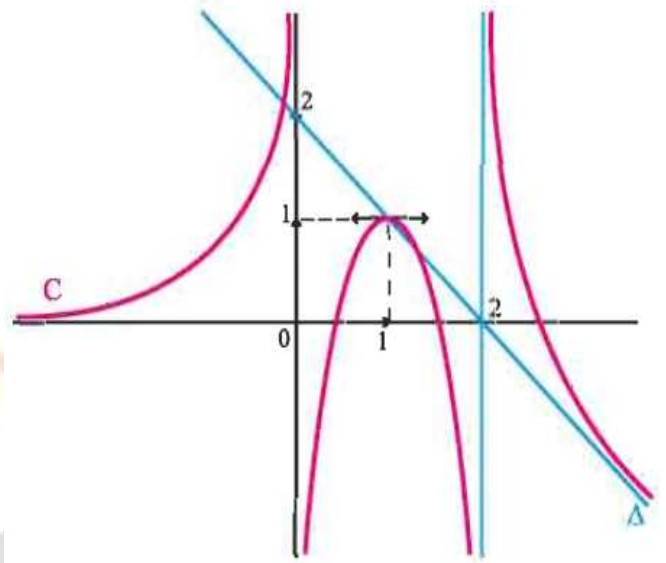
(3) أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

06

التمرين رتم



في الشكل الموالي: (C) النمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم مقارب له بجوار $+\infty$.



بقراءة بياناته أجب على الأسئلة التالية:

(1) جد معادلة المستقيم (Δ) .

(2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(\sqrt{2} - \sqrt{x})$$

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) ناقش بياناتنا، حسب قيم الوسيط الحففي m ، وجود

وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

07

التمرين رتم



• في كل حالة من الحالات التالية وبقراءة بياناته:

(2) ادرس استمرارية f عند القيمتين $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$.

(3) بين أن المستقيمين $(\Delta): y = 3x$ و $(\Delta'): y = -x$ مغاران مائلان لمنحني الدالة f بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب، ثم حدد الوضع النسبي مع كل منهما.

12 التمرين رقم

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x - 2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{2x + b}{3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

• عين قيمتي العددين الحقيقيين a و b حتى تكون f مستمرة عند 2.

13 التمرين رقم

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 2} - x & ; x \geq 1 \end{cases}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

(2) أثبت أن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

(3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا

$$\alpha \text{ حيث } \alpha \in \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[$$

$$\text{ب- استنتج أن: } \sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$$

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & ; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

• بين أن g مستمرة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

08 التمرين رقم

أثبت في كل حالة من الحالات التالية أن (Δ) مستقيم مغارب مائل لـ (C_f) منحني الدالة f ، ثم ادرس الوضع النسبي بينهما.

① $f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}}$, $(\Delta): y = 3x + 7$

② $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 5}{x + 1}$, $(\Delta): y = -x + 4$

③ $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1}$, $(\Delta): y = x - 3$

09 التمرين رقم

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2x + 1} & ; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & ; x > 0 \end{cases}$$

(1) بين أن الدالة f مستمرة عند 0.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن (C_f) منحني الدالة f يقبل في جوار $-\infty$ مغاربا مائلا نطلب معادلته.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا.

10 التمرين رقم

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4 + x^2} - 2} & ; x \neq 0 \\ g(0) = \ell \end{cases}$$

• عين قيمة العدد الحقيقي ℓ حتى تكون g مستمرة على $\mathbb{R}$.

11 التمرين رقم

f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

(1) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

16

التمرين رتم



f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = ax + b + \frac{x}{x^2 - 1}$$

مع a و b عدنان حقيقيان.

جدول تغيرات الدالة f يعطى كما يلي:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$	$\frac{-3\sqrt{3}+2}{2}$		1		$\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$		

(1) باستعمال المعطيات أعلاه، بين أن: $a = b = 1$.

(2) أكمل الجدول بحساب النهايات.

(3) أ- احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1]$ ، فسر النتيجة بـ بياناً.

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) منحنى الدالة f

والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x + 1$.

(4) بين أنه لكل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f(-x) + f(x) = 2$ ، ماذا نستنتج ؟

(5) أ- أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في

نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب- شكّل جدول إشارة الدالة f .

(6) أنشئ (C_f) في معلم متعامد متجانس.

دبرها في بالك مليح:

التجارات الباهرة لا تصنع بين عشية وضحاها..

بل هي نتاج إرادة قوية واجتهاد دائم وإيمان راسخ في قدرتك على فعلها...



14

التمرين رتم



(1) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

أ- ادرس تغيرات الدالة h .

ب- بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

$\alpha \in]1; 2[$ ، ثم أعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

ج- استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$.

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$$

أ- احسب نهايات الدالة f ، فسر بياناً النتائج المحصل عليها.

ب- أثبت أن: $f(\alpha) = \frac{2}{3} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2+1} \right)$ ، ثم جد حصراً

للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

15

التمرين رتم



(1) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x + 5$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g .

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق

$g(\alpha) = 0$ ، ثم تأكد أن $-2,3 < \alpha < -2,2$.

ج- حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما

معلوم والآخر β حيث $\beta \in]-4; -3[$.

ج- جد حصراً للعدد β سعته 10^{-2} .

د- استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

هـ- بين أن: $f(\alpha) = \frac{-3\alpha(\alpha-5)}{4}$ ، ثم أعط حصراً

للعدد $f(\alpha)$.