

ملخص حول الاشتقاقية

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

العدد المشتق :

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة a هي : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ معامل توجيه (ميل) المماس عند النقطة ذات الفاصلة a هو : $f'(a)$

مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة f	العدد الثابت a	x	ax	$ax \pm b$
دالتها المشتقة f'	0	1	a	a
الدالة f	x^2	x^3	x^n	ax^n
دالتها المشتقة f'	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	nax^{n-1}
الدالة f	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
دالتها المشتقة f'	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

مشتق عمليات على الدوال :

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(a \times f)' = a \times f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$	$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$

مشتق مركب دالة مع دالة تألفية : $[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

تطبيقاتها :

الدالة	$(ax+b)^n$	$\sqrt{ax+b}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
دالتها المشتقة	$na(ax+b)^{n-1}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$-\frac{a}{(ax+b)^2}$	$a \cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$

العلاقة بين الدالة ودالتها المشتقة :

 $f'(x)$ موجبة على مجال D معناه f دالة متزايدة على المجال D $f'(x)$ سالبة على مجال D معناه f دالة متناقصة على المجال D $f'(x)$ معدومة على مجال D معناه f دالة ثابتة على المجال D

النقطة الحدية ونقطة الإنعطاف :

إذا انعدم المشتق الأول عند قيمة a مغيرا إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a; f(a))$ كنقطة حديةإذا انعدم المشتق الأول عند قيمة a ولم يغير إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a; f(a))$ كنقطة انعطافإذا انعدم المشتق الثاني عند قيمة a مغيرا إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a; f(a))$ كنقطة انعطاف

التمرين رقم 01 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(I)

1- أحسب $f(1)$ ثم أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) > 0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

(II)

1- بين لماذا (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة منه ؟

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = 0$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f وفسر بيانيا النتيجة السابقة .

3- عين النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيهه المماس يساوي 3 .

4- ليكن (D) مستقيم معادلته $y = mx + d$ حيث m و d عدنان حقيقيان .

ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحنى (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (D) ؟

التمرين رقم 02 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (D) مستقيم معادلته $y = x + 2$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق من أجل كل x من $]2; +\infty[$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.

(2) عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) على المجال $]2; +\infty[$.

(3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 - 14x + 33 = 0$ ثم استنتج قيمتي x التي تحقق $f(x) = 14$.

(4) أ) بين أن الدالة المشتقة للدالة f معرفة بـ : $f'(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$

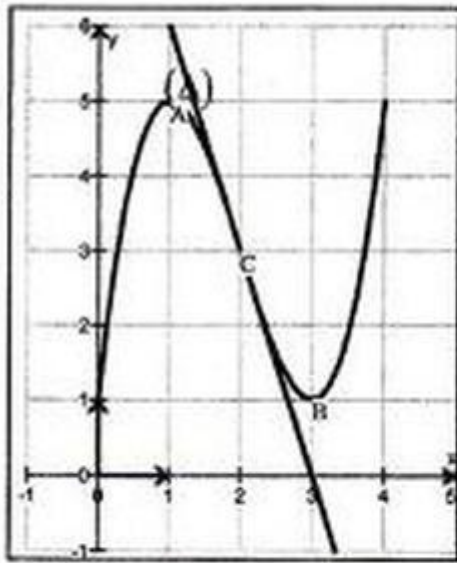
ب) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]2; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج) باستعمال النتيجة السابقة قارن بين العددين :

$$A = \frac{(5.01201301401516)^2 + 5}{3.01201301401516} \text{ و } B = \frac{(5.01201301401517)^2 + 5}{3.01201301401517}$$

(5) أ) بين أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فصلتها 1 هي : $y = -8x + 2$

ب) استنتج قيمة مقربة للعدد $f(0.9999)$.



التمثيل البياني (C_f) المقابل و المرسوم في معظم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ هو لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0; 4]$.

النقط A ، B و C هي نقط من (C_f) بحيث أن مماسي (C_f) عند كل من

A و B يوازيان محور الفواصل بينما مماس (C_f) عند النقط C هو (Δ) .

لدينا: $A(1; 5)$ ، $B(3; 1)$ و $C(2; 3)$.

1/ احسب $f'(1)$ ، $f'(2)$ و $f'(3)$. أكتب معادلة للمماس (Δ) .

2/ عين بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ على المجال $[0; 4]$.

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g

المعرفة على المجال $[0; 4]$ بـ $g(x) = \frac{5}{f(x)}$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 + 2 - |x+1|$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- أثبت أنه من أجل $h \neq 0$ لدينا $\frac{f(-1+h)-1}{h} = h^2 - 3h + 3 - \frac{|h|}{h}$.

ب- احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-1}{h}$. ماذا تستنتج؟ أعط تفسيراً هندسياً للنتيجتين.

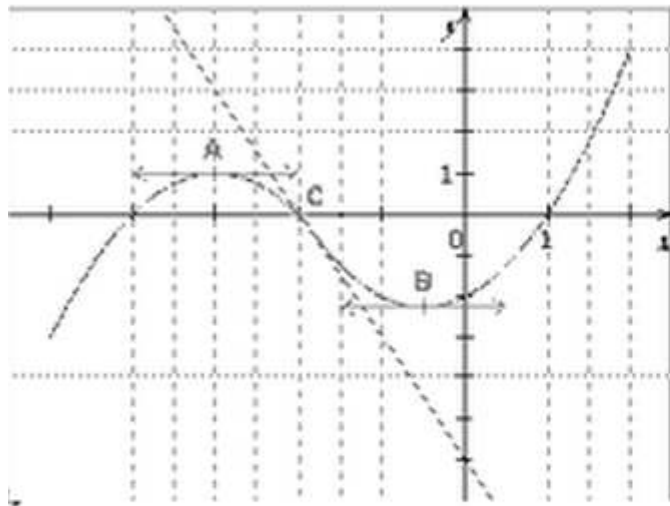
2) أ- احسب $f'(x)$ ثم بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; -1]$.

ب- بين أن الدالة f تقبل في المجال $]-1; 1]$ قيمتان حديتان إحداهما محلية عظمى و الأخرى محلية سغرى.

3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[-2, -1]$.

4) أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذاتها الفاصل 0

ب- تحقق من أجل كل x من $]-1; 1]$ $f(x) - (-x+1) = x^3$. استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) ماذا تلاحظ؟



المنحنى البياني (C_f) التالي هو للدالة f القابلة للاشتقاق على $[-5; 2]$:

1.1- بقراءة بيانية محين $f'(-3)$ و $f'(-2)$ و $f'(-\frac{1}{2})$

يجب - استنتاج معادلات المماسات لـ (C_f) عند A و B و C علما أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$

2. حدد من أجل كل $x \in [-5; 2]$ إشارة $f'(x)$ في جدول.

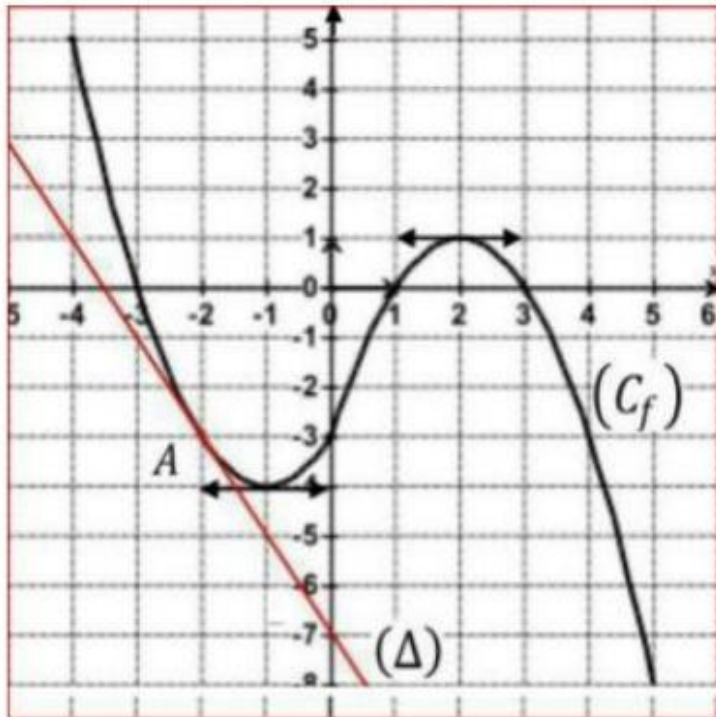
3. حدد من أجل كل $x \in [-5; 2]$ إشارة $f(x)$ في جدول.

4. حدد وضعية (C_f) بالنسبة للمماس عند النقطة C ماذا

تلاحظ؟

5. هل توجد مماسات أخرى لـ (C_f) موازية للمماس عند النقطة C ؟

التمرين رقم 06 :



الشكل المقابل يمثل (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق

على المجال $[-4; 5]$ و ذاتها المشتقة f' و (Δ) المماس للمنحنى

(C_f) عند النقطة A ، بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

(1) عين صور الأعداد $2, -1, -2, 0$ بالدالة f .

(2) احسب : $f'(2)$ و $f'(-1)$ و $f'(-2)$.

(3) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[-4; 5]$.

(4) حدد اتجاه تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

(5) أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4; 5]$.

(6) حدد بيانياً عدد حلول المعادلة : $f(x) = -2$.

(7) حل بيانياً المتراجحة التالية : $f(x) > -3$.

(8) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) .