

سلسلة في تمارين الإحتمالات التي وردت في امتحانات الباكالوريا من 2009 إلى 2021

من إعداد: أ. عامر جمال

amercena2022@gmail.com



فهرس

شعبة علوم تجريبية صفحة 4

شعبة رياضيات صفحة 6

شعبة تقني رياضي صفحة 9

تمرين 1 يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ 1, 2, 2, 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ 2, 2, 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ 2, 3, 3. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق. نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني" و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

باكالوريا علوم تجريبية 2018

1. أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا. عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

تمرين 2 يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B

علوم تجريبية 2019 رقم (1)

حيث: A : "سحب كرتين من نفس اللون"، B : "سحب كرتين تحملان نفس الرقم".

1. بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

2. علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم؟

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

تمرين 3 يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كرتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.

علوم تجريبية 2019 رقم (2)

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

(1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

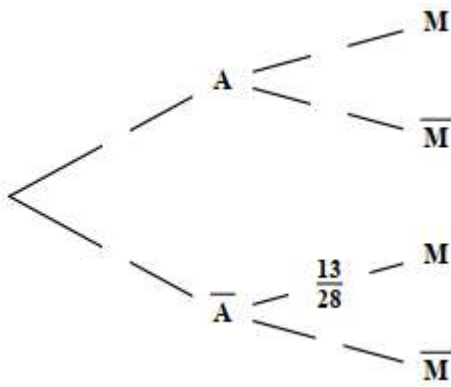
(3) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جدهما زوجي؟

تمرين 4 يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء وكل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من أحد الوعائين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحد عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرفقة من 1 إلى 6 ، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكرتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكرتين من V .
نسمّي الحدث: "الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5" .

نسمّي الحدث: "الحصول على كرتين من نفس اللون".



علوم تجريبية 2020 رقم (1)

(1) تحقّق أنّ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

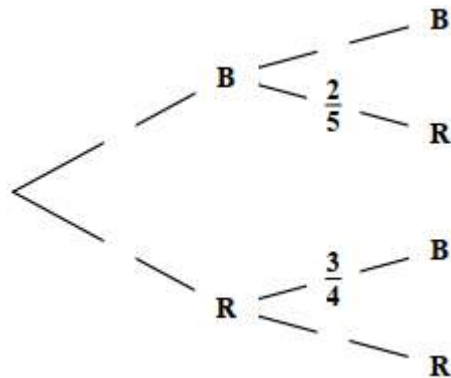
(2) علما أنّ الكرتين المسحوبتين من U ، بين أنّ احتمال أن تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.

(3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

(4) احسب $P_{\bar{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكرتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟

تمرين 5 كيس به ثلاث كريات بيضاء وكرتين حمراوين لا نتميّز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كرتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس وإذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس.

علوم تجريبية 2020 رقم (2)



(1) أ. انقل شجرة المقابلة ثم أكملها.

B يرمز إلى الحصول على كرة بيضاء و R إلى الحصول على كرة حمراء.

ب. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب

لكرتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب. بين أنّ: $P(X = 1) = \frac{27}{50}$ ، ثم عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

جـ. احسب $E(X)$ الامل الرياضيات للمتغير العشوائي X .

تمرين 6 يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و

امرأتان F_1 و F_2 .

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث: A "عضوا اللجنة من نفس الجنس". B "عضوا اللجنة من جنسين مختلفين". C " H_1 عضو في اللجنة".

(1) أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

ب. بين أن $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

(2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة.

أ. برّر أن مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$.

ب. عيّّن قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي $E(X)$.

تمرين 7 صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس ، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها

ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1 ، 2 و 3 ، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2

نسحب عشوائياً بطاقة واحد من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A "سحب سؤال في الهندسة"، B "سحب سؤال في التحليل" و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقماً زوجياً".

(1) احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ احتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.

(2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 .

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. برّر أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$.

ب. عيّّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضي.

جـ. استنتج قيمة $E(2021X + 1442)$.

تمرين 8 كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

(1) نسحب عشوائياً من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) ن سحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تمرين 9 كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3 ، 2 ، 3 وكريّة بيضاء مرقمة بـ: -1 ن سحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية: A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون". B : "الحصول

على كريّة بيضاء على الأكثر". C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم"

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

(ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(ج) احسب احتمال الحادثة: " $X^2 - X > 0$ ".

تمرين 10 صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء

ويحوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس)

نرمي زردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 ن سحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات ن سحب

عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

نعتبر الاحداث A ، B و C المعرفة بـ: A : "سحب كريتين حمراوين" B : "سحب كريتين سوداوين" و C : "سحب كريتين من لونين مختلفين"

(1) أنقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.

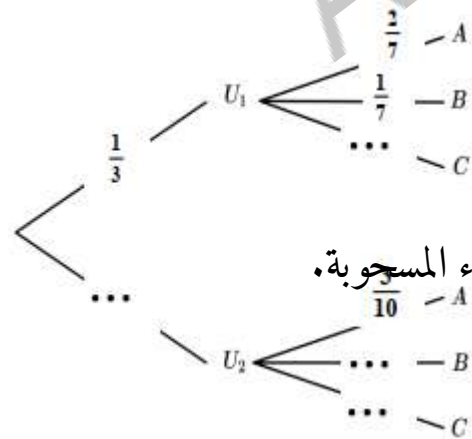
(2) أحسب احتمالات الاحداث A ، B و C .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

(3) (أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

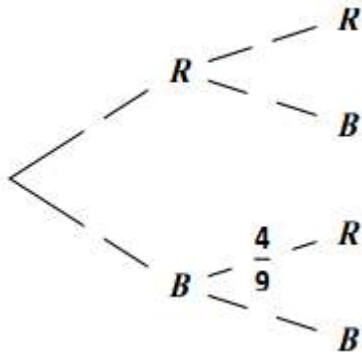
(4) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.



باكالوريا رياضيات 2019

تمرين 11

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).
نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدُها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدُها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نُكرّر العملية مرّة ثانية.
(1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُتمذج هذه التجربة ثم أكملها.



(2) بين أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

(3) احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.
أ. برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و 7.

ب. عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضي.

تمرين 12

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$) و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كرتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من هذا الصندوق.

(1) أ. احسب احتمال كل من A و B حيث:
 A : "سحب كرتين من نفس اللون" و B : "سحب كرتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.

(2) نفرض في مايلي: $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد: $\cos(\alpha) \cos(\beta)$

أ. برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1 .

ب. بين أنّ: $P(X = 0) = \frac{27}{55}$

ج. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

بكالوريا رياضيات 2020 (رقم 2)

تمرين 13 كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

كلّ من الكريات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ، 3 ، 4
نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.

نرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب كرية رقمها i ، حيث: $p_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_2 = \frac{1}{6}$ ، $p_3 = \frac{1}{4}$ و $p_4 = \frac{1}{4}$

(1) وزّع الكريات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

(2) احسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C الآتية:

A "سحب كرية تحمل رقما فرديا"

B "سحب كرية تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4"

C "سحب كرية رقمها حلّ للمعادلة: $x^2 = 2^x$ "

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكلّ سحب لكرية الرقم الذي تحمله.
عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمّله الرياضيائي.

تمرين 14 يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضمّ رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 ، H_3 وأربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4

(1) بين أنّ عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42

(2) نعتبر الحوادث الآتية: A "اللجنة من نفس الجنس" B "اللجنة من جنسين مختلفين"

C " H_1 هو الرئيس" E "اللجنة لا تضمّ كلّا من H_1 و F_1 "

أ. احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثمّ استنتج $P(B)$

ب. احسب $P(C)$ و $P(E)$

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكلّ لجنة عدد الرجال فيها.

عين قانون احتمال X ثمّ احسب $E(X)$ أمّله الرياضيائي.

تمرين 15 كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرّق بينها باللمس ، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

(I

(1) احسب احتمال الحادثة A : "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

(2) B : "سحب كرتين من نفس اللون".

(II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب ، $\alpha(A)$ (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ، وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر مادفعه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

باكالوريا تقني رياضي 2018

(1) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي هي $\{100 - \alpha, 50 - \alpha, -\alpha\}$ ثم عرّف قانون احتماله.

(2) بين أنّ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو: $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.
ثم اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

تمرين 16 توجد إجابة صحيحة واحد من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 .
(الكرات لا نفرّق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد.
 X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1; 2; 3\}$ ، ب) $\{0; 2; 3\}$ ، ج) $\{0; 1; 2\}$

(2) الأمل الرياضي $E(X)$ لـ X هو: أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، ج) $E(X) = \frac{11}{10}$.

(3) احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة" يساوي: أ) $\frac{7}{10}$ ، ب) $\frac{9}{10}$ ، ج) $\frac{3}{5}$

(4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1"

يساوي: أ) $\frac{2}{5}$ ، ب) $\frac{3}{10}$ ، ج) $\frac{1}{5}$ (تقني رياضي 2019 (رقم 1))

تمرين 17 يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرّق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحادثة A : "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

- (ب) الحادثة B : "الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر".
 (ج) الحادثة C : "الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

تقني رياضي 2019 (رقم 2)

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

(ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

تمرين 18 يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2 ، 3 ، 3 .

الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

(1) نعتبر الحدثين: A "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

أ. احسب احتمال كل من الحدثين A و B .

ب. بين أن احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم و مختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

ج. استنتج احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق لكل سحب جُداء الرّقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين.

تقني رياضي 2020 (رقم 1)

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(3) في لعبة ، يقوم لاعب بسحب كرتين: إذا كان جُداء رقيهما 4 يربح x^2 دينار ، إذا كان جُداء

رقيهما 6 يخسر y^2 دينار وإذا كان جُداء رقيهما 9 يخسر 130 دينار.

(x و y عددان طبيعيين غير معدومين) عين قيمة كل من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

تمرين 19 يحتوي كيس على كرتين خضراوين تحملان الرّقمين 1 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام

1 ، 2 ، 2 وأربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4 . (الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس)

تقني رياضي 2020 (رقم 2)

(I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

(1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : "الحصول على 3 كريات من نفس اللون". B : "الحصول على كرية بيضاء على الأقل".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ. بين أن: $P(X = 3) = \frac{3}{7}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب. احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

- (II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.
ليكن C الحدث: "الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي".
احسب احتمال C .

-تمت والحمد لله-