

# ملخص شامل في الدوال المرجعية

أولى جدد وشتراك علوم

اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

1AS

## الدوال المرجعية

### 1. الدالة التآلفية:

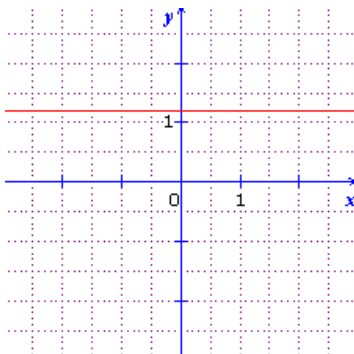
تعريف

نسَمي دالة تآلفية كل دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل  $f(x) = ax + b$  حيث  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين مفروضان.

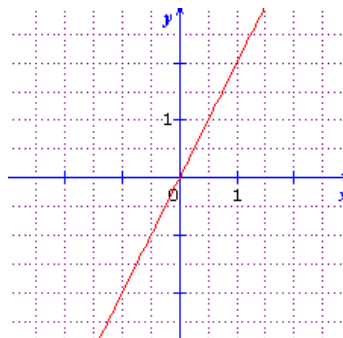
أمثلة:

- الدالة  $f: x \mapsto 2x - 3$  هي دالة تآلفية حيث  $a = 2$  هو المعامل الذي يُضرب فيه  $x$  و  $b = -3$  هو صورة  $0$  بالدالة  $f$ ، بمعنى  $f(0) = -3$ .
- في حالة  $b = 0$ ، الدالة  $x \mapsto ax$  هي دالة خطية ذات معامل التناسبية  $a$ .
- $g: x \mapsto \frac{1}{2}x$  دالة خطية حيث  $a = \frac{1}{2}$ .
- في حالة  $a = 0$ ،  $x \mapsto b$  هي دالة ثابتة.

3. في حالة دالة ثابتة  $x \mapsto b$  المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = b$  يوازي محور الفواصل.



2. في حالة دالة خطية  $x \mapsto ax$ ، المستقيم  $(D)$  الذي معادلته يمر من مبدأ المعلم.



1. الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل:

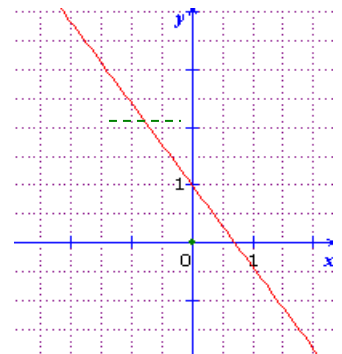
$$f(x) = -\sqrt{2}x + 1$$

تمثل بالمستقيم  $(D)$  الذي معادلته

$$y = -\sqrt{2}x + 1$$

$(D)$  يمر من النقطة  $B(0; 1)$

ومعامل توجيحه  $a = -\sqrt{2}$



**مبرهنة**

- $f$  دالة تالفة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل  $f(x) = ax + b$ .
- إذا كان  $a < 0$  ، فإن  $f$  متناقصة تمامًا.
  - إذا كان  $a > 0$  ، فإن  $f$  متزايدة تمامًا.

**2. الدالة "مربع":**

**تعريف**

الدالة "مربع" هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  مربعه  $x^2$

إذا رمزنا إلى الدالة مربع بالرمز  $f$  ، نكتب  $f(x) = x^2$  أو  $x \xrightarrow{f} x^2$ .

**مثال:**

$$3 \text{ و } -3 \text{ لهما نفس الصورة بالدالة مربع: } 3^2 = (-3)^2 = 9$$

**اتجاه التغير**

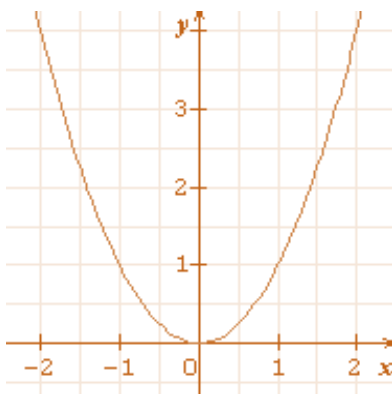
**مبرهنة 1**

الدالة مربع متزايدة تمامًا على  $[0, +\infty[$  ، ومتناقصة تمامًا على  $] -\infty, 0]$ .

|       |           |     |           |
|-------|-----------|-----|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x^2$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

**التوشيل البياني**

عندما نمثل في معلم  $(O; I, J)$  النقط ذات الإحداثيات  $(x; x^2)$  نحصل على المنحنى الممثل للدالة "مربع".



(C) هو منحنى الدالة مربع

معادلة (C) هي  $y = x^2$

يسمى (C) قطعاً مكافئاً ذروته

**خاصية:**

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، لدينا  $(-x)^2 = x^2$  أي  $f(-x) = f(x)$ .  
نستنتج أن الدالة مربع زوجية.

**ملاحظة**

في معلم متعامد يكون بيان الدالة مربع متناظرًا بالنسبة إلى محور الترتيب.

تعريف

الدالة "مقلوب" هي الدالة المعرفة على المجموعة  $]0, +\infty[ \cup ]-\infty, 0[$  ، والتي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم بمقلوبه  $\frac{1}{x}$  .

مثال:  $f(2) = \frac{1}{2}$  و  $f\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{2}$  .

• اتجاه التغير

الدالة "مقلوب" متناقصة تماماً على كل من المجالين  $]0, +\infty[$  و  $] -\infty, 0[$

| $x$           | $-\infty$ | $0$       | $+\infty$ |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| $\frac{1}{x}$ | $0$       | $+\infty$ | $0$       |

الخط المضاعف في الجدول يعني أن الدالة "مقلوب" غير معرفة عند 0

**تذكير :** إذا كان  $0 < x_1 < x_2$  فإن  $0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$

وإذا كان  $x_1 < x_2 < 0$  فإن  $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$  (حسب قواعد ترتيب الأعداد)

• التمثيل البياني

بما أن 0 ليس له صورة بالدالة مقلوب ، فإن منحنيا لا يقطع محور الترتيب .  
يسمى المنحنى الممثل للدالة "مقلوب" قطعاً زائداً.

خاصية:

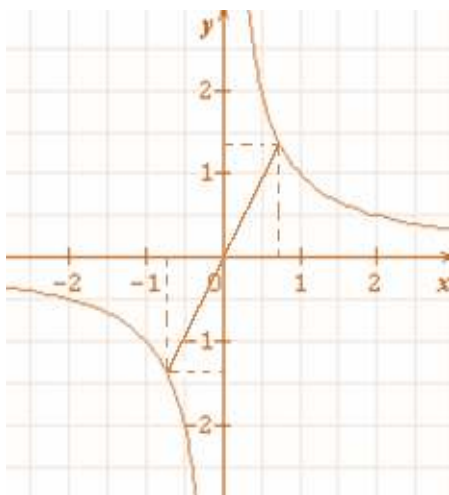
من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم، لدينا  $(-x)$  عدد حقيقي غير معدوم و  $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

$$f(-x) = -f(x)$$

نستنتج أن الدالة مقلوب فردية.

ملاحظة

في كل معلم يكون منحنى الدالة مقلوب متناظراً بالنسبة إلى مبدأ هذا المعلم.



**تعريف**

الدالة "الجذر التربيعي" هي الدالة المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  والتي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  جذره التربيعي  $\sqrt{x}$ .

إذا رمزنا إلى الدالة "الجذر التربيعي" بالرمز  $f$ ، نكتب  $f(x) = \sqrt{x}$  أو  $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$ .  
مثال:  $f(0,49) = \sqrt{0,49} = 0,7$  و  $f\left(\frac{7}{9}\right) = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

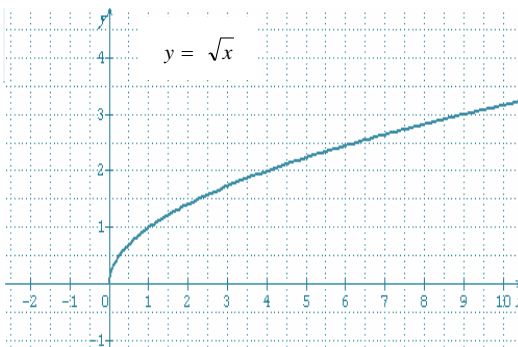
**• اتجاه التغير**

الدالة "الجذر التربيعي" متزايدة على المجال  $[0, +\infty[$ .

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| $x$        | 0 | $+\infty$ |
| $\sqrt{x}$ | 0 | $+\infty$ |

**• التمثيل البياني**

بما أن الدالة "الجذر التربيعي" معرفة فقط على المجال  $[0; +\infty[$  فإن منحنيا يقع في الربع الأول من المعلم كما هو موضح في الشكل المقابل

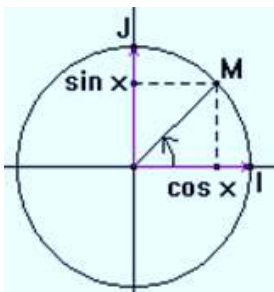


5. الدالة "جيب"، الدالة "جيب التمام"

**تعريف**

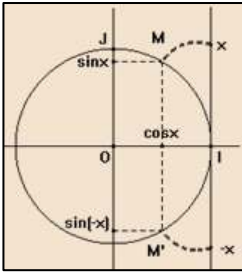
$x$  عدد حقيقي.  $M$  النقطة المرفقة بالعدد  $x$  من الدائرة المثلثية. في المعلم  $(O; I, J)$ :

- نسبتي جيب تمام العدد الحقيقي  $x$ ، فاصلة النقطة  $M$  ونرمز إليه بالرمز  $\cos x$ .
- الدالة  $\cos$  هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  العدد  $\cos x$ .
- نسبتي جيب العدد الحقيقي  $x$ ، ترتيب النقطة  $M$  ونرمز إليه بالرمز  $\sin x$ .
- الدالة  $\sin$  هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  العدد  $\sin x$ .



**أمثلة**

صورة العدد  $\frac{\pi}{2}$  هي النقطة  $J(0,1)$  إذن  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  و  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .  
للعديدين  $-\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{3\pi}{2}$  نفس الصورة  $J'(0,-1)$  إذن  $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$  و  $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ .  
صورة العدد  $\pi$  هي النقطة  $I'(-1,0)$  إذن  $\cos \pi = -1$  و  $\sin \pi = 0$ .

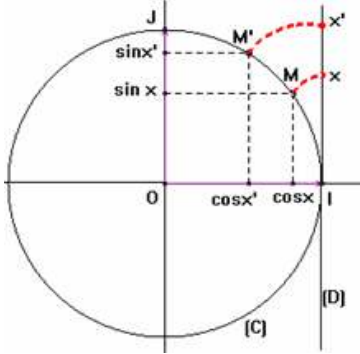


من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{و} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{و} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{و} \quad \cos(-x) = \cos x$$

أي أن الدالة جيب تهايم زوجية و الدالة جيب فردية.



اتجاه تغير الدالتين "جيب تهايم" و "جيب" على المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

خاصية 1

• الدالة  $\cos x$  متناقصة تماما على المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  • الدالة  $\sin x$  متزايدة تماما على المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

خاصية 2

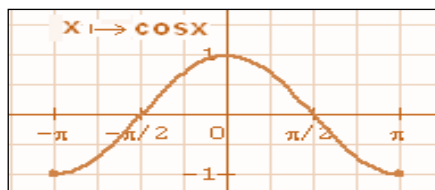
• الدالة  $\cos$  متناقصة تمام على المجال  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  • الدالة  $\sin$  متناقصة تماما على المجال  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

• جدول تغيرات الدالتين "جيب تهايم" و "جيب" على المجال  $[0; \pi]$  نستنتج من الخاص 1 و من الخاصة 2 :

| $x$    | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|--------|---|-----------------|-------|
| $\sin$ | 0 | 1               | 0     |

| $x$    | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|--------|---|-----------------|-------|
| $\cos$ | 1 | 0               | -1    |

التمثيل البياني

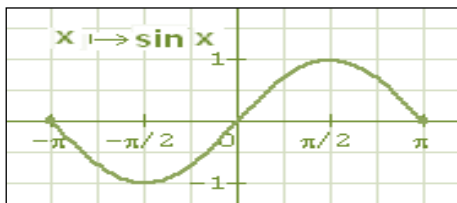


• ننشئ التمثيل البياني للدالة  $\cos$  على المجال  $[0, \pi]$

انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتمم هذا الرسم على  $[-\pi, 0]$  بالتناظر بالنسبة للمبدأ

لأن الدالة  $\cos$  زوجية .



• ننشئ التمثيل البياني للدالة  $\sin$  على المجال  $[0, \pi]$

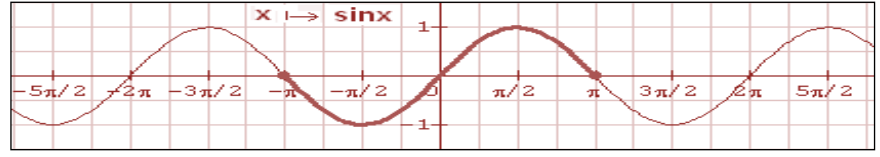
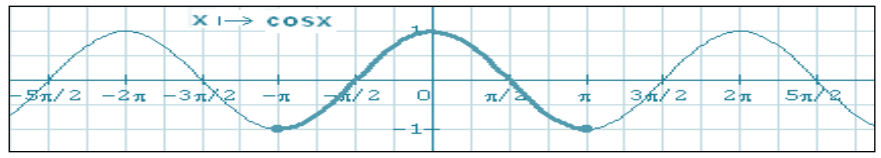
انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتمم هذا الرسم على  $[-\pi, 0]$  بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن

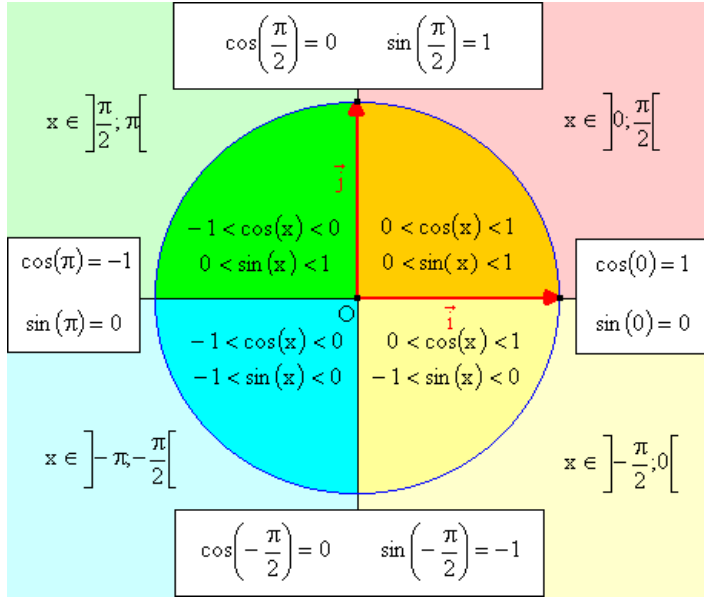
الدالة  $\sin$  فردية .

ملاحظة:

بيان الدالة "جيب تمام" و بيان الدالة "جيب" على  $\mathbb{R}$  هما

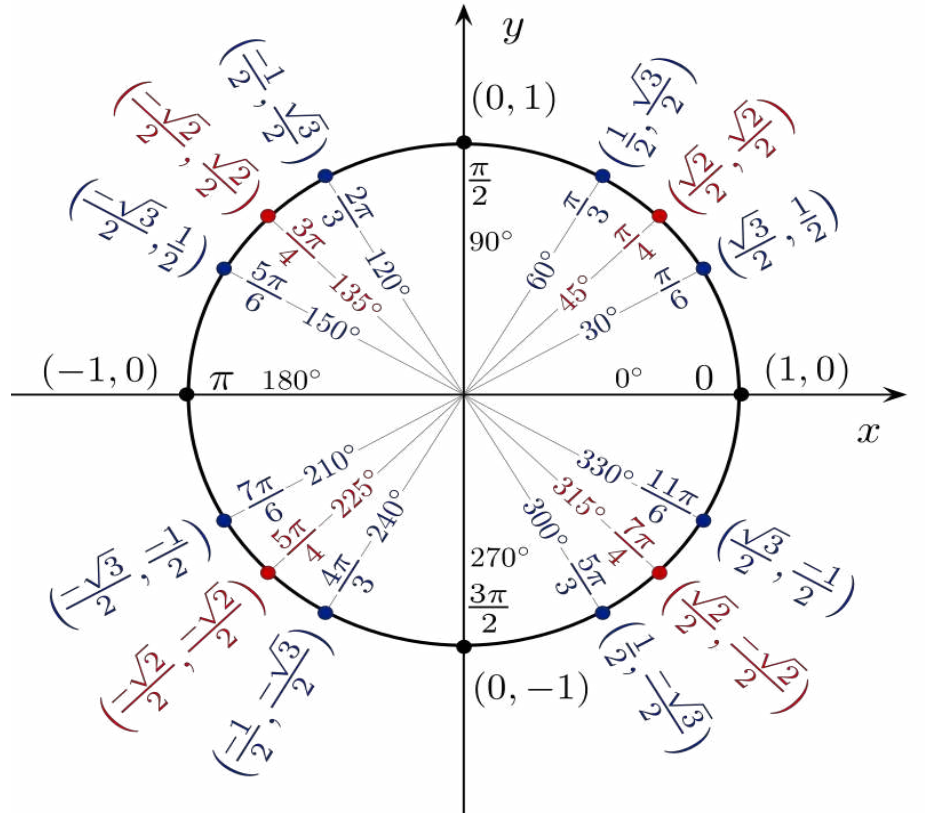


لاحظ انه يمكن استنتاج أي جزء من بيان الدالة "جيب تمام" ( أو الدالة "جيب" ) من الجزء الملون بالأحمر وذلك بانجاز " دوريا" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  و  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  ( نقول إن الدالة "جيب تمام" ( الدالة "جيب" أيضا ) دورية ودورها  $2\pi$  .



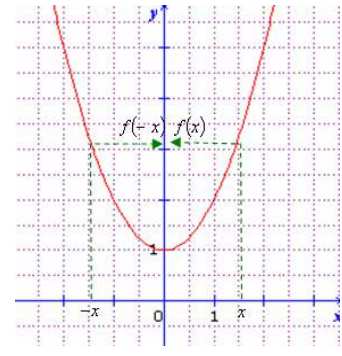
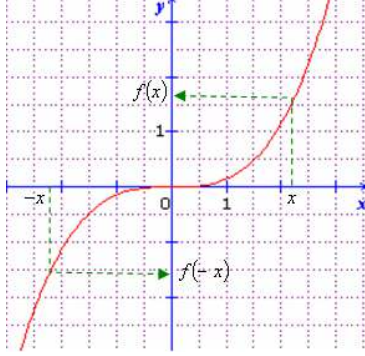
### جدول جيب وجيب تمام القيم الشهيرة:

| $x$       | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |



تعريف

- $D$  جزء من  $\mathbb{R}$ ،  $f$  دالة معرفة على  $D$ .  
نقول إن  $f$  دالة زوجية إذا كان  $D$  متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكل  $x$  من  $D$ ،  $f(-x) = f(x)$ .
- نقول إن  $f$  دالة فردية إذا كان  $D$  متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكل  $x$  من  $D$ ،  $f(-x) = -f(x)$ .



بيان الدالة الزوجية في المستوى المنسوب إلى معلم  
متعاود يكون متناظرا بالنسبة إلى محور الترتيب.

بيان الدالة فردية في المستوى المنسوب إلى معلم  
معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

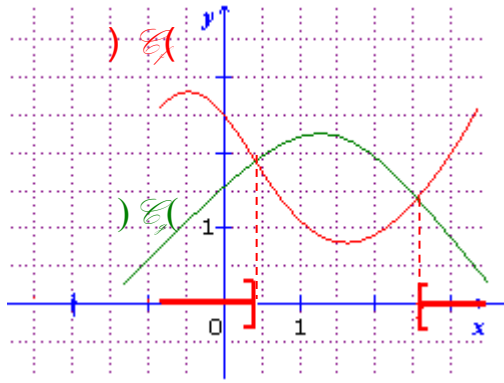
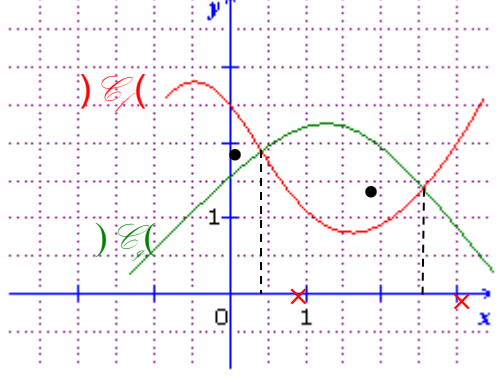
أمثلة:

1. الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $f(x) = 2x^2 + 1$  دالة زوجية، لأن:  
مجموعة تعريفها  $\mathbb{R}$  متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $-x \in \mathbb{R}$ )  
ولكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$ .
2. الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة  $g(x) = -\frac{2}{x}$  فردية، لأن:  
مجموعة تعريفها  $\mathbb{R}^*$  متناظرة بالنسبة إلى 0  
ولكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ،  $g(-x) = -\frac{2}{(-x)} = -\left(-\frac{2}{x}\right) = -g(x)$ .
3. الدالة  $h$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  بالعلاقة  $f(x) = 2x^2 + 1$  ليست زوجية ولا فردية، لأن المجال  $[0; +\infty[$  غير متناظر بالنسبة إلى 0.
4. الدالة  $u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $u(x) = x + 3$  ليست زوجية ولا فردية، لأنه بالرغم من أن مجموعة تعريفها  $\mathbb{R}$  متناظرة بالنسبة إلى 0، لكن  $u(-x) = -x + 3$  لا يساوي  $u(x)$  ولا يساوي  $-u(x)$ .

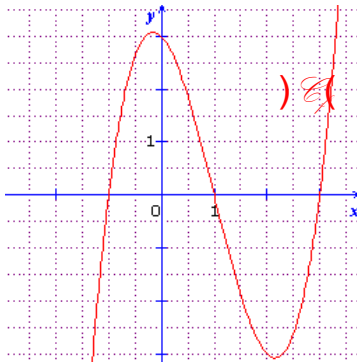
ملاحظة

للبرهان على أن  $f$  ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر  $a$  من مجموعة تعريفها حيث  $f(-a) \neq f(a)$  (أو  $f(-a) \neq -f(a)$ ). ويعتبر التمثيل البياني للدالة وسيلة للتحقق من شفعية الدالة.

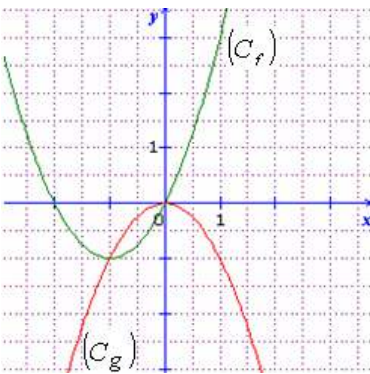
$f$  و  $g$  دالتان معرفتان على مجموعة  $D$ ، و  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  منحنياهما في معلم للمستوي.

|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>• حلّ المتراجحة <math>f(x) &gt; g(x)</math> بيانيا يعني:<br/>تعيين فواصل نقط المنحني <math>(\mathcal{C}_f)</math> الواقعة فوق المنحني <math>(\mathcal{C}_g)</math>.</p> | <p>• حلّ المعادلة <math>f(x) = g(x)</math> بيانيا يعني:<br/>تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين <math>(\mathcal{C}_f)</math> و <math>(\mathcal{C}_g)</math>.</p> |
|                                                                                           |                                                                                 |

أمثلة



1. نعرف الدالة  $f$  بالمنحني  $(\mathcal{C}_f)$  المقابل.  
حلّ المعادلة  $f(x) = 0$  بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل  
نقط تقاطع المنحني  $\mathcal{C}_f$  مع محور الفواصل.  
المنحني  $(\mathcal{C}_f)$  يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.  
حلول المعادلة  $f(x) = 0$  هي فواصل هذه النقط:  
 $S = \{-1; 1; 3\}$



2.  $f$ ،  $g$  دالتان معرفتان بالمنحنيين  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  (الشكل المقابل).  
حلّ المتراجحة  $f(x) \geq g(x)$  بيانيا يؤول إلى تعيين  
فواصل نقط المنحني  $(\mathcal{C}_f)$  الواقعة فوق المنحني  $(\mathcal{C}_g)$  وفواصل النقط المشتركة.  
 $S = ]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

## إشارة جداء أو حاصل قسمة

### خاصية

جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن نفس الإشارة هو عدد موجب تمام.  
جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن إشارتين متعاكستين هو عدد سالب تمام.

مثال

لندرس إشارة  $f(x) = (2x+3)(1-x)$  على  $\mathbb{R}$ .

إنّ  $2x+3$  هي عبارة دالة تألفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته  $y = 2x+3$  ومعامل التوجيه له 2 موجب تماما.

ولدينا كذلك  $2x+3=0$  يكافئ  $x = -\frac{3}{2}$ .

كما أنّ  $1-x$  هي عبارة دالة تألفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته  $y = -x+1$  ومعامل التوجيه له -1 سالب تماما.

ولدينا كذلك  $1-x=0$  يكافئ  $x = 1$  . منه:

| $x$                 | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|----------------|---|-----------|
| إشارة $2x+3$        | -         | 0              | + | +         |
| إشارة $1-x$         | +         |                | + | 0         |
| إشارة $(2x+3)(1-x)$ | -         | 0              | + | 0         |

بالتوفيق للجميع...أستاذ الهادة.شعبان

تجدون هذا الملف:

