

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (04 نقاط):

هذا التمرين هو إستبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال، إقتراح واحد صحيح ، حدد الإجابة الصحيحة مع التبرير:

الأسئلة	أ	ب	ج
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ تساوي	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
(2) إذا كانت $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ و كانت $h(x) = f(3x)$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2-1}$	$h'(x) = -\frac{1}{3x^2+1}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2+1}$
(3) حلول المعادلة $2[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 2 = 0$	$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ أو	$\begin{cases} x = e^2 \\ x = \sqrt{e} \end{cases}$ أو	$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ أو
(4) أحسن تقريب تالفي للدالة : $x \mapsto \ln(x)$ بجوار 2 هو	$\frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$	$\frac{1}{2}x + \ln 2 + 1$	$\frac{1}{2}x + \ln 2$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

- (1) حل المعادلة التفاضلية (I) $2y' + y = 0$ ثم عين الحل الخاص f الذي يحقق $f'(0) = 1$.
- (2) نعتبر المعادلة التفاضلية (II) $2y' + y = x^2 + 3x$
بين ان الدالة g على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^2 - x + 2$ هي حل للمعادلة التفاضلية (II).
- (3) بين انه تكون الدالة h حل للمعادلة التفاضلية (II) إذا وفقط إذا كان $h - g$ حل للمعادلة التفاضلية (I)
استنتج حلا للمعادلة التفاضلية (II)

التمرين الثالث (5 نقاط):

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بالعلاقة : $f(x) = x + \frac{ax+b}{(x-2)^2}$ حيث $a ; b$ عدنان حقيقيان و بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	
$f(x)$		1		1	

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1. باستعمال جدول تغيرات و عبارة الدالة f أوجد العددين الحقيقيين a ; b ثم إستنتج أن : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$

2. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها . ثم أكمل جدول تغيراتها .

3. بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل 3 حلول على المجموعة $\mathbb{R} - \{2\}$.

4. أثبت أن : $f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{(x-2)^3}$

5. بين أنه يوجد مماس للمنحنى (C) موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

التمرين الثالث : (08 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

1- أوجد نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها

2- احسب $g'(x)$ ، أدرس إتجاه تغير g ثم شكل جدول التغيرات g .

3- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$

ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1- (أ) تحقق أنه لأجل كل x من $\mathbb{R}$ أن : $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

2- (أ) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}_f$.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (d) .

3- بين أن المنحني يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0,40 < \alpha < 0,41$.

4- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5- أنشئ المماس (Δ) المستقيم (d) والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

اساتذة المادة – بالتوفيق للجميع

تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة علوم التجريبية

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
4	(0,5)	(1) الاجابة (ج) : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \frac{1}{24}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ حالة عدم التعيين لنزيل هذه الحالة نضرب في المرافق فنجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(\sqrt{x+7}+3)(x+2)(x-2)}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)(x+2)} = \frac{1}{24}$ (2) اذا كانت $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ و كانت $h(x) = f(3x)$ الاجابة (ج) : لأن $h'(x) = 3f'(3x) = \frac{3}{(3x)^2+3} = \frac{3}{9x^2+3} = \frac{1}{3x^2+1}$ (3) حلول المعادلة : $2[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 2 = 0$ هي الاجابة (ب) او $\begin{cases} x = e^2 \\ x = \sqrt{e} \end{cases}$ نضع $X = \ln(x)$ تصبح المعادلة $2X^2 - 5X + 2 = 0$ كما يلي $\Delta = 9$ نحسب المميز $2X^2 - 5X + 2 = 0$ للمعادلة حلين هما $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ X = 2 \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} \ln(x) = \frac{1}{2} \\ \ln(x) = 2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}} \\ x = e^2 \end{cases} \text{ او } \begin{cases} x = \sqrt{e} \\ x = e^2 \end{cases} \text{ يكافئ}$ (4) أحسن تقريب تالفي للدالة : $\ln(x) : x \mapsto \ln(x)$ بجوار 2 هو (أ) $\frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$ ومنه $f(x) = \ln(x)$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{x}$ التقريب التالفي للدالة f بجوار 2 هو $f(x) \approx f'(2)(x-2) + f(2) \text{ أي ان } f(x) \approx \frac{1}{2}(x-2) + \ln(2) \text{ ومنه}$ $f(x) \approx \frac{1}{2}x + \ln(2) - 1$	التمرين الاول
4	(0,5)	(1) حل المعادلة التفاضلية (I) $2y' + y = 0$ تكافئ $y' = -\frac{1}{2}y$ حلها العام هو $y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ حيث C ثابت حقيقي . الحل الخاص f الذي يحقق $f'(0) = 1$. أي ان $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, ومنه $f'(x) = -\frac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}x}$ بالتعويض بـ 0 نجد $f'(0) = -\frac{1}{2}C$ و $f'(0) = 1$ و منه $-\frac{1}{2}C = 1$ إذن $C = -2$ وبالتالي نجد $f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$.	التمرين الثاني

		(2) نعتبر المعادلة التفاضلية (II) $2y'+y = x^2 + 3x$..... لدينا $g(x)=x^2-x+2$ و $g'(x)=2x-1$ و منه $2g'(x)+g(x)=4x-2+x^2-x+2=x^2+3x$ أي أن $2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ إذن g حل للمعادلة (II). (3) إثبات انه تكون الدالة h حل للمعادلة التفاضلية (II) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I) - إذا كان $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I) يكافئ $2(h-g)'(x)+(h-g)(x)=0$ و منه $2h'(x)+h(x)=2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ و بما $2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ فإن $2h'(x)+h(x)=x^2+3x$ و منه h حل للمعادلة (II). - إذا كان h حل للمعادلة (II) يعني أن $2h'(x)+h(x)=x^2+3x$ و لدينا $2g'(x)+g(x)=x^2+3x$ بطرح المعادلتين نجد $2(h-g)'(x)+(h-g)(x)=0$ و منه $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I). استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية (II) (1) $h(x)-g(x)=Ce^{\frac{-1}{2}x}$ و منه $h(x)=g(x)+Ce^{\frac{-1}{2}x}$ أي ان $h(x)=x^2+3x+Ce^{\frac{-1}{2}x}$.																			
5	(0,25)×2 (0,5) (0,25)×2 (0,5) (0,5) (0,5)	(1) من جدول التغيرات لدينا $f(1)=1$ $f(3)=1$; اي ان $1+a+b=1$ و $3+3a+b=1$ اي ان $a=-b$ و $3a+b=-2$ و منه $a=-1$ و $b=1$ بالتعويض نجد $-3b+b=-2$ و منه $a=-1$ و $b=1$ بالتعويض في العبارة نجد $f(x)=x+\frac{-x+1}{(x-2)^2}$ بتوحيد المقامات نجد $f(x)=\frac{x(x-2)^2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{x(x^2-4x+4)-x+1}{(x-2)^2}=\frac{x^3-4x^2+4x-x+1}{(x-2)^2}$ $f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x+1}{(x-2)^2}$ 2. حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right)=-\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right)=+\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$ جدول تغيرات الدالة f <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>1</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr></table> 3. تبين أن المعادلة: $f(x)=0$.....(1) تقبل 3 حلول على المجموعة $\mathbb{R}-\{2\}$ لدينا : - دالة f متزايدة و مستمرة على المجال $]-\infty;1]$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1]$ أي انها تغير إشارتها على المجال $]-\infty;1]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $]-\infty;1]$. - دالة f متناقصة و مستمرة على المجال $[1;2[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1]$ أي	x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-	+	$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$	التمرين الثالث
x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$																
$f'(x)$		+	0	-	+																
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$																

	(0,5)	انها تغير إشارتها على المجال $[1;2]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $[1;2]$. f - دالة متزايدة و مستمرة على المجال $[2;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;+\infty[$ أي انها تغير إشارتها على المجال $[2;+\infty[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $[2;+\infty[$. مما سبق نستنتج ان للمعادلة (1) ثلاثة حلول على مجموعة تعريفها . 4. إثبات أن: $f'(x) = \frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3}$ لدينا $f(x) = x + \frac{-x+1}{(x-2)^2}$ و منه $f'(x) = 1 + \frac{-(x-2)^2 - 2(x-2)(-x+1)}{(x-2)^4} = 1 + \frac{(x-2)[-x+2+2x-2]}{(x-2)^4} = 1 + \frac{x}{(x-2)^3}$ 5. إثبات أنه يوجد مماس للمنحنى (C) موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = x$ أي ان المعادلة $f'(x) = 1$ تقبل حلا $f'(x) = 1$ يكافئ $\frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3} = 1$ يكافئ $x^3-6x^2+13x-8 = (x-2)^3$ و $x \neq 2$ أي أن $x^3-6x^2+13x-8 = x^3-6x^2+12x-8$ يكافئ $x = 0$ و منه المنحنى (C) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(0; \frac{1}{4}\right)$ موازيا للمنصف الأول ذو المعادلة $y = x$													
7	(0,25) × 2 (0,25) (0,25) (0,25) (0,5) (0,25)	I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 4xe^{2x} + 1$ 1- النهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^{2x} = +\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4xe^{2x} = 0$) 2- حساب $g'(x)$: $g'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 4(1+2x)e^{2x}$ إشارتها من إشارة $(1+2x)$ و منه g متزايدة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; -\frac{1}{2}]$. شكل جدول التغيرات g : <table border="1" data-bbox="347 1512 1225 1713"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td>1</td><td>$-2e^{-1}+1$</td><td>$+\infty$</td></tr> </table> 3- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$ مما سبق لاحظنا من جدول تغيرات الدالة تقبل قيمة حدية صغرى هي $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ عدد موجب تماما و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$. II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$ ليكن c_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.	x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$	1	$-2e^{-1}+1$	$+\infty$	التمرين الرابع
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$												
$g'(x)$	-	0	+												
$g(x)$	1	$-2e^{-1}+1$	$+\infty$												

(0,25)

(0,25)

(0,25) × 2

(0,5)

(0,5)

(0,25)

(0,5)

(1)

(0,5)

(1)

1- أ) التحقق أنه لأجل كل x من $\mathbb{R}$ أن $f'(x) = g(x)$:

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 1 + 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} = 1 + 4xe^{2x} = g(x)$$

الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن g موجبة على $\mathbb{R}$.

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2

2- أ) إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_f$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$$

ب) دراسو وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمستقيم (d) لدينا $[f(x) - x] = (2x-1)e^{2x}$ إشارة الفرق من إشارة $(2x-1)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
إشارة $2x-1$	-	0	+
الوضعية	(C_f) يقع تحت (d)	(C_f) يقطع (d)	(C_f) يقع فوق (d)

3- إثبات أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق

$$0,40 < \alpha < 0,41 \quad \text{بما أن } f \text{ مستمرة و متزايدة على } \mathbb{R} \text{ و } f(0,40) = -0,04511$$

$$f(0,41) = 0,00131 \text{ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا}$$

α .

4- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y = x - 1$

5- أنشئ المماس (Δ) للمستقيم (d) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

