

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0، 1، 2 و سبع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1، 1، 2، 2، 2 كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية

A "الكريات المسحوبة تحمل أرقام زوجية "

B "الحصول على كرية بيضاء واحدة على الأقل "

C "الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها زوجي "

(2) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل أرقام زوجية

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X

• احسب امله الرياضياتي $E(X)$

• احسب $P(e^X - e \geq 0)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

2 نعتبر المعادلة (E_1) ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية $(E_1) \dots 645x - 195y = 60$

(أ - 1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 645، ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حولا .

(ب) بين أن المعادلة تكافئ $(E_2) \dots 129x - 39y = 12$

(أ - 2) تحقق أن الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

(ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على العدد 5

(ج) جد كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $2023^{y-x} \equiv 1[5]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \ln 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{1+e^{u_n}}{2}\right)$$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1-e^{u_n}}{2}$

(ج) استنتج أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{e^{u_n} - 1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ يطلب تعيين حددها الأول.

ب. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(e^{u_0} - 1) + \ln(e^{u_1} - 1) + \ln(e^{u_2} - 1) + \dots + \ln(e^{u_n} - 1)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 + 2\ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ حل وحيد α وأن $0,52 < \alpha < 0,53$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3+2\ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ت) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ث) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب (Δ)

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$

(4) بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

(5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) (نضع $f(0,22) = f(2,11) = 0$)

(6) m وسيط حقيقي. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2\ln x - mx = 0$

(7) احسب العدد الحقيقي I حيث $I = \int_{e^{-1}}^e \frac{3+2\ln x}{x} dx$ ، فسر النتيجة.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

وحدة إنتاجية بمصنع يسيرها خمس رجال H_1, H_2, H_3, H_4 و H_5 و ثلاث نساء F_1, F_2 و F_3 نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث أعضاء (رئيس فرع و نائب أول و نائب ثاني)

(1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تكوينها

(2) احسب احتمال الحوادث الآتية

"A أعضاء اللجنة من نفس الجنس "

"B" اللجنة مكونة من رجلين و امرأة "

"C" H_1 رئيس اللجنة "

"D" يوجد رجل واحد على الأقل في اللجنة "

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق عدد النساء في اللجنة .

(4) عين قيم المتغير العشوائي .

(5) عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 5.

2 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5 حيث : $A = 4 \times 1962^{1954} + 3 \times 2024^{1445} - 2023^{2024}$

3 - عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $2024^{2n+1} + 2n + 3$ مضاعفا للعدد 5.

4 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $2^n + 3^n \equiv 0[5]$

5 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $2^n + 3^{2n} + 4^{3n} \equiv 0[5]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ (حيث α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3}$

(أ) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) في كل ماياتي نفرض أن $u_0 = 0$

(ح) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(ج) استنتج أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$n+1 - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) \leq S_n < n+1 \quad \text{بين أن}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + xe^{1-x}$

(1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-0,28 < \alpha < -0,27$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{3}x^2e^{2-2x} + \frac{2}{3}xe^{1-x}$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فسر النتيجة هندسيا

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2}{3}g'(x) \cdot g(x)$

ب) بين أن الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[1; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[1; \alpha]$

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) اكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(4) بين أن $f(\alpha) = -\frac{1}{3}$

(5) أرسم (T) و المنحنى (C_f) .

(6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين احدهما المبدأ O و الأخرى فاصلتها β حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

(7) أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(8) H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{2-2x}$

أ) بين أن الدالة H أصلية للدالة $h \mapsto x^2e^{2-2x}$ على $\mathbb{R}$

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1 xe^{1-x} dx = e - 2$

ت) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الثاني

التوفيق في امتحان شهادة البكالوريا