

ملاحظة:

* إذا كانت الدالة كثير حدود والمطلوب هو حساب نهايتها عند $+\infty$ و $-\infty$ ، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^3$$

* إذا كانت الدالة ناطقة و المطلوب هو حساب نهايتها عند $+\infty$ و $-\infty$ ، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس في البسط على الحد ذو الأكبر أس في المقام.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3}{ax^2}$$

(4) طرق إزالة حالات عدم التعيين:

أ. العامل المشترك

ب. التحليل والاختزال (المطابقة، القسمة الإقليدية)

ج. المرافق (الجذور التربيعية)

د. العدد المشتق (ويكون فقط عندما تكون النهاية من الشكل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$)

(5) نهاية دالة مركبة:

$$f(x) = v \circ u(x) \leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{b \rightarrow c} v(x) = c \end{cases}$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

(6) النهايات باستعمال المقارنة (الحصر والترتيب):

أ. الحصر:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = l \end{cases}$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

ب. الترتيب: (الحاد من الأعلى والحاد من الأسفل)

النهايات والتفسيرات الهندسية

تعريف: النهاية هي المكان الذي تؤول اليه الدالة $f(x)$ ويتم حسابها عند الأطراف المفتوحة في مجموعة التعريف، نرمز لها بـ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ أو $\lim_{x \rightarrow \pm l} f(x)$ حيث $l \in \mathbb{R}$

(1) قواعد الإشارات:

أ. الجمع:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

ب. الضرب:

- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

ج. القسمة:

- $\frac{(+\infty)}{(+\infty)} = +\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(-\infty)} = +\infty$
- $\frac{(+\infty)}{(-\infty)} = -\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(+\infty)} = -\infty$

(2) حالات عدم التعيين:

$\frac{0}{0}$	$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$	$0 \times (\pm\infty)$	$(+\infty) + (-\infty)$
---------------	-----------------------------------	------------------------	-------------------------

(3) حالات ليست عدم تعيين: (توضع النتيجة مباشرة).

$\frac{\pm l}{\pm 0} = \pm\infty$	$\frac{\pm l}{\pm\infty} = 0$
$\frac{\pm\infty}{\pm l} = \pm\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm 0} = \pm\infty$
$\frac{0}{\pm\infty} = 0$	$\frac{0}{\pm l} = 0$

(A) الحاد من الأعلى :

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} g(x) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(B) الحاد من الأسفل :

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} g(x) = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} f(x) = -\infty \end{cases}$$

(7) المستقيمات المقاربة :

أ. المستقيم المقارب الأفقي :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

التفسير الهندسي (البياني) :

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي موازي لمحور الفواصل معادلته $y = a$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب. المستقيم المقارب العمودي (الشاقولي) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

التفسير الهندسي (البياني) :

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي موازي لمحور الترتيب معادلته $x = a$.

ج. المستقيم المقارب المائل :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته

$y = ax + b$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

الإستمرارية

(1) تعريف :

* f دالة مستمرة عند قيمة a معناه أن $f(a)$ معرفة و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

* f مستمرة على مجال I حيث $I = [a; b]$ من $\mathbb{R}$ معناه أن f مستمرة عند كل قيمة a من هذا المجال.

* كل دالة مستمرة على مجموعة تعريفها، مثلا :

✓ الدالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$

✓ الدالة الناطقة مستمرة عند كل قيمة من مجموعة

تعريفها، فهي ليست مستمرة عند القيم الممنوعة.

✓ الدوال المرجعية :

$$x^2; \frac{1}{x}; \sqrt{x}; \sin x; \cos x; \tan x; x^3; e^x; \ln x; |x|$$

مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها.

* مجموع دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

* جداء دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

* مركب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

(2) مبرهنة القيم المتوسطة :

حالة 1 :

$$f(x) = A$$

تقبل حلا على الأقل على المجال $[a; b]$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[a; b]$

f^* مستمرة على

المجال $[a; b]$

A^* محصور بين

$f(a)$ و $f(b)$

f^* مستمرة على

المجال $[a; b]$

A^* محصور بين

$f(a)$ و $f(b)$

f^* رتيبة على المجال $[a; b]$

حالة 2 :

$$f(x) = 0$$

تقبل حلا على الأقل على المجال $[a; b]$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[a; b]$

f^* مستمرة على المجال

$[a; b]$

$f(a) \times f(b) < 0^*$

f^* مستمرة على المجال

$[a; b]$

$f(a) \times f(b) < 0^*$

f^* رتيبة على المجال

$[a; b]$