

تمارين الدوال الأسية في البكالوريا

شعبة : تقني رياضي

التمرين [1] [باك 2009][م1]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

- (1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(2) أحسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
(3) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
(4) أـ بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
(5) أرسم (C_f) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

التمرين [2] [باك 2010][م2]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

- (1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.
(3) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
(4) أـ بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
بـ (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$.
جـ أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(x) + f(-x)$. فسّر النتيجة هندسيا .
دـ أرسم (D) و (D') و (C_f) .
هـ m عدد حقيقي ، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$.
ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.
(5) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يأتي : $g(x) = [f(x)]^2$.
أدرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) .

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

(3) بين أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف ω يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لمماس (C_f) عندها .

(4) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g .

ب- بين أن لمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$.

(5) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$.

ب- أرسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (C_f) .

(I) g هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $1,59 < \alpha < 1,60$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x - 2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) . (وحدة الطول $2cm$)

(1) بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

(3) أ- بين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء (I) .

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج- أرسم (C_f) .

(4) ناقش بياننا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$.

(5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.

أ- أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة h .

(I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

(II) f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(1) أ- بين أن f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(III) n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

(4) بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها .

(5) أ- بين أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث : $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n

من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

(6) أ- بالاعتماد على الجزء II ، بين أنه ، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج- جد نهاية المتتالية (α_n) .

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-1)e^x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين نهاية f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$.

ب- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) .

ج- أرسم (T) و (C_f) .

(4) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

(5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$. و (C_h) تمثيلها البياني .

أ- بين أن الدالة h زوجية .

ب- أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

(6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

عين a و b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$.

التمرين [7] [باك 2015][م2]

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^x - 2$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$.
ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
- ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,55 < \beta < -1,56$.
ب- أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$.

التمرين [8] [باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2]

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x+1)(1 + 2e^{-x})$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) .
ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلته .
- (4) باستعمال المنحنى (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة ببياناً وأحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{(-x^2 + x - 1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ و أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

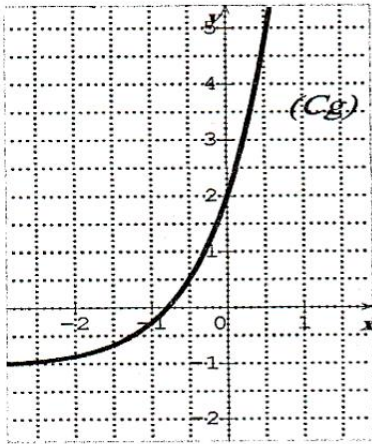
(3) أـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

بـ h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ : $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم أستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $h(x) \geq 0$.

(4) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f(x) + x = \frac{hx(x)}{x-1}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . فسر النتيجة ببياناً.

(5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A\left(-2; \frac{2}{3}e^2\right)$ ، ثم أرسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-2; 1[$.



(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+3)e^{-x} - 1$.

(C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.

بقراءة بيانية :

(1) حدد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(2) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$.

ثم تحقق أن : $-0.8 < \alpha < -0.7$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ أكتب معادلة (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

(4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1[$. (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$).

(5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = |x| \left(e^{|x|-2} - 1 \right) + 1$. (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أـ بين أن الدالة h زوجية.

بـ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x-2) + 1$.

جـ اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$.
 ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .
 ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
- (2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له .
- (4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .
- (5) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
- (6) ليكن m وسيطا حقيقيا . عين مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

- (I) الدالة العددية g معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$.
- (1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.
- (2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.71 < \alpha < 1.72$.
 ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$.
- (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$.
 ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$.
 ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- (2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
- (3) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يطلب تعيين فاصلتها (لا يطلب كتابة معادلة (T)) .
- (4) أ- بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف وحيدة فاصلتها $(1 + \sqrt{6})$.
 ب- أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha) \approx 1.1$ ، $f(\sqrt{5}) \approx 1.4$ و $f(1 + \sqrt{6}) \approx 3.1$)
- (5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ : $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$.
- (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .
- أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(-x)$.
 ب- إشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم ارسمه .

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”