

الخليل للرياضيات

سنة **ثالثة** ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي



[مع حل مقترح]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[11 أوت 2022]

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{1-x}$ ، حيث α و β عددين حقيقيين، و (C_f) تمثيلها

البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند الـ "0" والنقطة $A(2; -3)$ تنتمي إليه

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$;

① احسب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا

② احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③ أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلت له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

④ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها

⑤ أ/ عيّن إحداثيات ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

⑥ ارسم كل من (Δ) و (C_f)

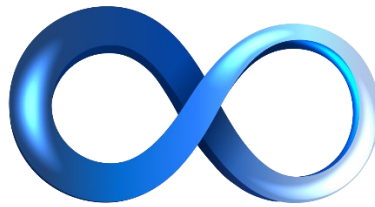
⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين $\frac{1}{1-x} = x + m \dots (E)$

و $f(x) + x = m \dots (E')$

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

① ادرس شفعية الدالة h

② وضح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه.



الخليل للرياضيات

قويسم

حل مقترح:

(I) تعيين α و β :

لدينا: f تقبل قيمة حدية عند 0 معناه: $f'(0) = 0$

نعين أولا $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2\alpha x + \beta)(1 - x) - (-1)(\alpha x^2 + \beta x + 1)}{(1 - x)^2}$$

لدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{(2\alpha(0) + \beta)(1 - 0) - (-1)(\alpha(0)^2 + \beta(0) + 1)}{(1 - 0)^2} = 0 \Rightarrow \beta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

ولدينا: $f(2) = -3$ ، ومنه:

$$\frac{\alpha(2)^2 + \beta(2) + 1}{1 - 2} = -3 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta + 1 = 3$$

$$\Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 2$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \quad \text{منه:}$$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$

① حساب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

② حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \right) = +\infty$$

③ أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{1-x} \\ &= \frac{(ax + b)(1-x) + c}{1-x} \\ &= \frac{ax - ax^2 + b - bx + c}{1-x} \\ &= \frac{-ax^2 + (a-b)x + b+c}{1-x} \end{aligned}$$

$$f(x) = -x + \frac{1}{1-x}$$

وعليه: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \\ b + c = 1 \end{cases}$ بالمطابقة نجد:

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-x + \frac{1}{1-x} - (-x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{1-x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(\Delta)} = -x$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{1-x}$$

لدينا: $1-x=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	-	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

4/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(1-x) - (-1)(x^2-x+1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x - 2x^2 - 1 + x + x^2 - x + 1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(1-x)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(2-x)$ لدينا:

$$x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 2-x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	−	0	+	+	0	−
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		−3	
		$\nearrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$	
		1		$-\infty$		$-\infty$

5/ إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$:

نعوض $x=1$ في معادلة المستقيم (Δ) : نجد $y = -1$

ومنه: $\omega(1; -1)$

ب/ تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

$x < 1$ أو $x > 1$	معناه:	$x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$	معناه:
$(2(1) - x) > 1$ أو $(2(1) - x) < 1$	معناه:	$(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$	معناه:
$(2(1) - x) \in D_f$	معناه:	$(2(1) - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$	معناه:

• ولدينا:

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(2(1) - x) + f(x) &= -(2 - x) + \frac{1}{1 - (2 - x)} - x + \frac{1}{1 - x} \\ &= -2 + x + \frac{1}{-1 + x} - x + \frac{1}{1 - x} \\ &= -2 - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - x} \\ &= -2 = 2(-1) \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(-1; 1)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

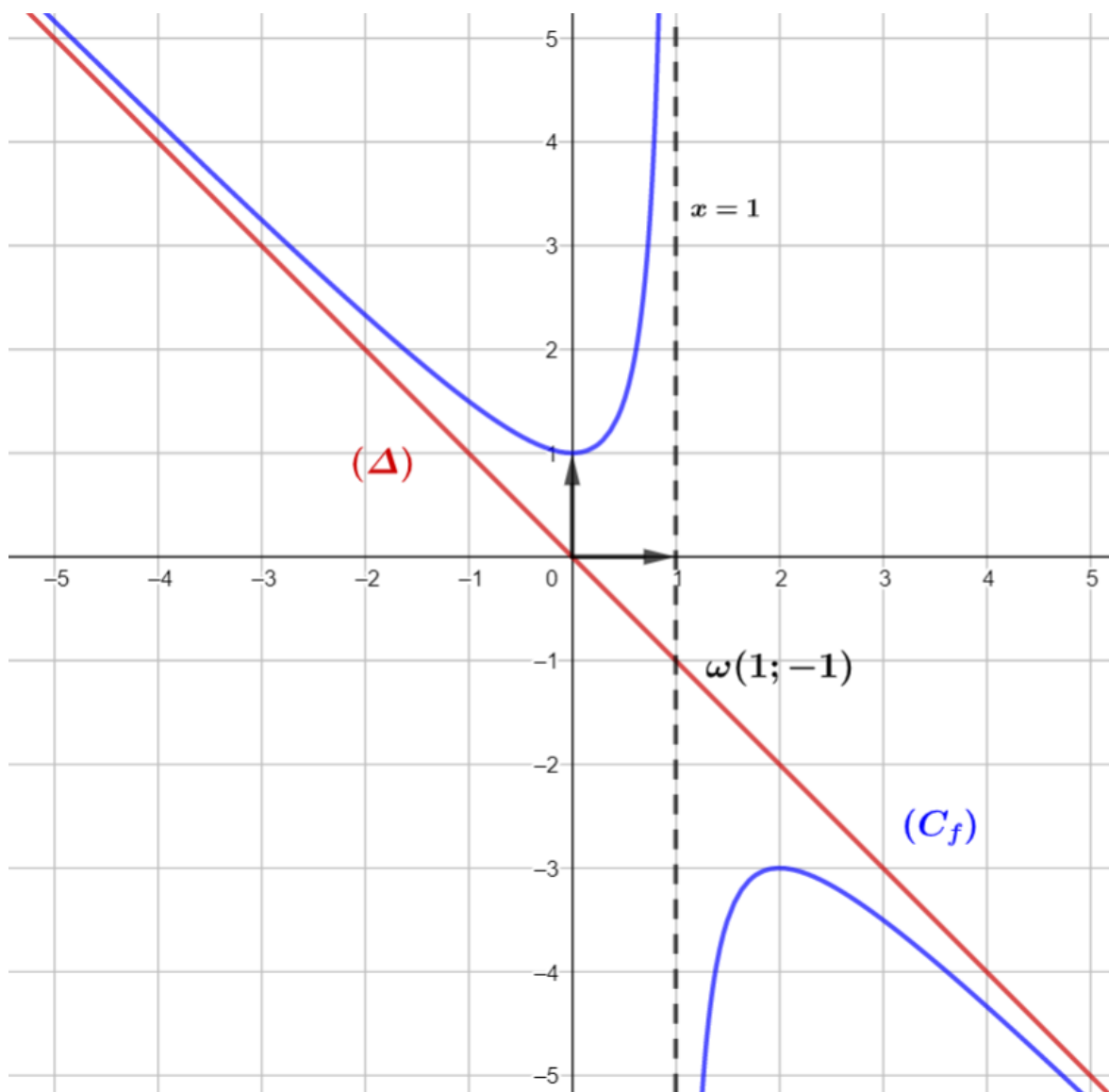
$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega &\Rightarrow f'(a)(1 - a) + f(a) = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2 - a)}{(1 - a)^2} (1 - a) + \frac{a^2 - a + 1}{1 - a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2 - a)}{(1 - a)^2} - \frac{a^2(2 - a)}{(1 - a)^2} + \frac{a^2 - a + 1}{1 - a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2 - a)}{(1 - a)^2} - \frac{a^2(2 - a)}{(1 - a)^2} + \frac{(a^2 - a + 1)(1 - a)}{(1 - a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{2a - a^2 - 2a^2 + a^3 + a^2 - a^3 - a + a^2 + 1 - a}{(1 - a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{-a^2 + 1}{(1 - a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{(1 - a)(1 + a)}{(1 - a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{1 + a}{1 - a} = -1 \\ &\Rightarrow 1 + a = -1 + a \\ &\Rightarrow 1 = -1 \end{aligned}$$

وجدنا $1 \neq -1$ وهذا تناقض، وعليه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

⑥ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



7 المناقشة البيانية:

(1) المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E):

$$\frac{1}{1-x} = x + m \Rightarrow \frac{1}{1-x} - x = m$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; -3[$	للمعادلة حلان موجبان تماما
لما $m = -3$	للمعادلة حل مضاعف موجب تماما
لما $m \in]-3; 1[$	المعادلة لا تقبل حلوًا
لما $m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
لما $m \in]1; +\infty[$	للمعادلة حل موجب تماما وحل سالب تماما

(2) المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E'):

$$f(x) + x = m \Rightarrow f(x) = -x + m$$

حلول المعادلة (E') هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; -1[$	للمعادلة حل موجب تماما
لما $m = -1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجب تماما
لما $m \in]-1; 0[$	للمعادلة حل موجب تماما

لما	$m = 0$	المعادلة لا تقبل حلا
لما	$m \in]0; 1[$	للمعادلة حل سالب تماما
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
لما	$m \in]1; +\infty[$	للمعادلة حل موجب تماما

(III)

① دراسة شفعية الدالة h :

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

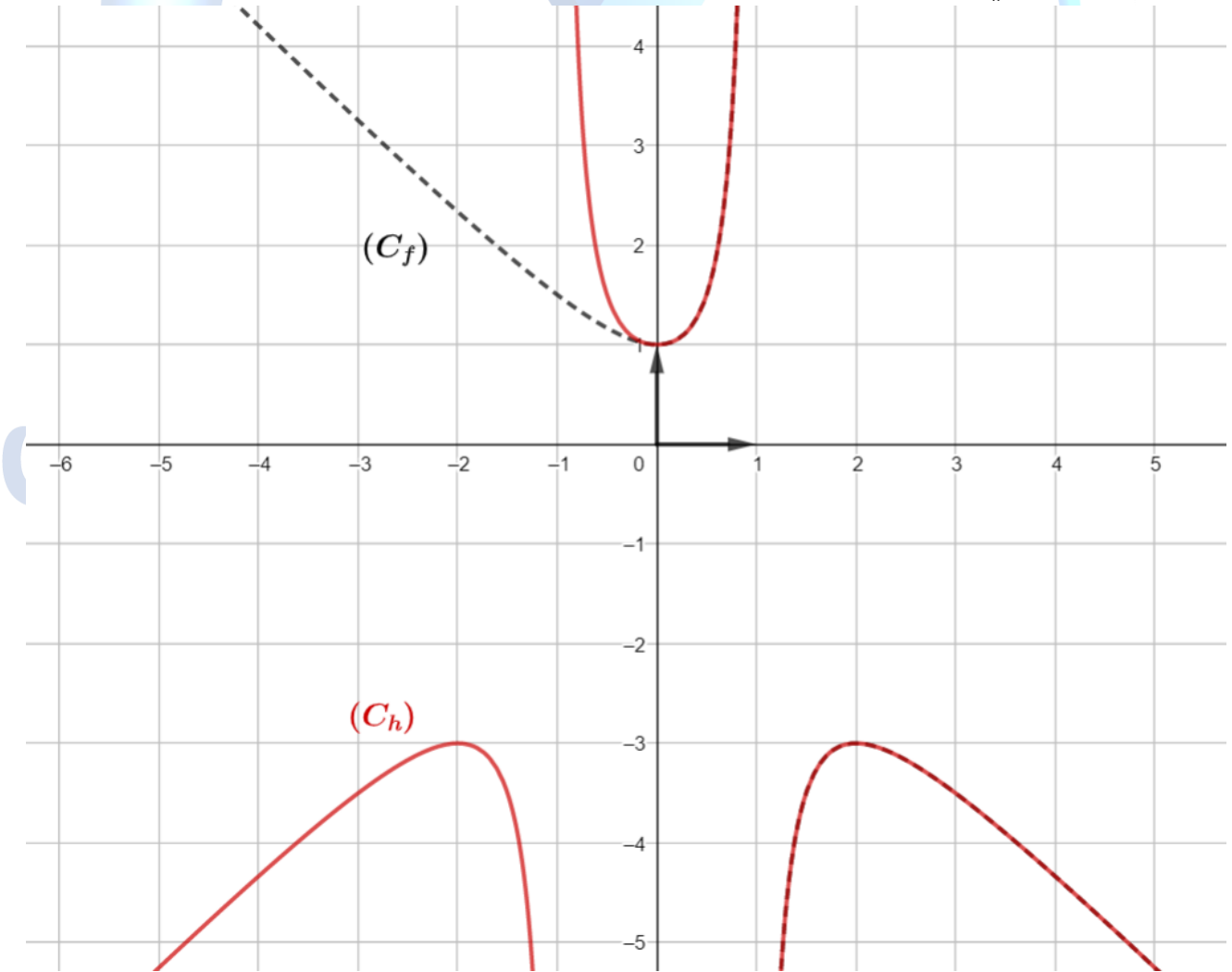
② توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(-x) & ; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التناظر.



بالتوفيق