

الجزء الأول : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بجدول تغيراتها كالتالي :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$			$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow -5 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow -1 \nearrow +\infty$	

(I) تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية

(1) أحسب الدالة المشتقة f' بدلالة a و c

(2) بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة f عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

(3) عين $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) استنتج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$.

(5) أجب بصح أو خطأ مع التبرير :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$

(ب) - المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

(ج) - المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $[2.5; 2.7]$.

$$f'(3) > 0 \text{ - (د)}$$

(6) استنتج إشارة الدالة f .

الجزء الثاني : نأخذ في ما يلي $a = 1; b = -3; c = 1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 3$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$

(2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(3) بين أن $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(4) أنشئ (C_f) و المستقيمت المقاربة.

(5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$.

الجزء الثالث : g دالة ذات المتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ب : $g(x) = [f(x)]^2$

(1) أوجد نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أحسب $g(-1)$ ، $g(1)$ ، $g(\alpha)$ و $g(\beta)$

(3) بإستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $g'(x)$

(4) استنتج جدول تغيرات الدالة g (دون دراسة تغيراتها).

الجزء الأول :

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ وتكتب على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ حيث : a ، b و c أعداد حقيقية
(1) حساب الدالة المشتقة f' بدلالة a و c :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ ودالتها المشتقة f' : $f'(x) = a - \frac{c}{x^2} = \frac{ax^2 - c}{x^2}$

(2) تعيين الأعداد a ، b و c بالاستعانة بجدول تغيرات الدالة f :

$$\begin{cases} a - c = 0 \dots (1) \\ -a + b - c = -5 \dots (2) \\ a + b + c = -1 \dots (3) \end{cases} \quad \text{ومنهم:} \quad \begin{cases} \frac{a(-1)^2 - c}{(-1)^2} = 0 \\ a \times (-1) + b + \frac{c}{-1} = -5 \\ a \times (1) + b + \frac{c}{1} = -1 \end{cases} \quad \text{وبتعويض نجد أن:} \quad \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = -5 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c \dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \\ 2c - 3 = -1 \dots (3) \end{cases} \quad \text{وبتعويض (1) و (2) في (3) نجد :} \quad \begin{cases} a = c \dots (1) \\ 2b = -6 \dots (2) \\ a + b + c = -1 \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{إذن:} \quad \begin{cases} a = c \dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \\ 2c = 2 \dots (3) \end{cases} \quad \text{نستنتج أن :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{و منه عبارة } f(x) \text{ تكتب على الشكل } f(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$$

(3) تعيين $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا :

لدينا من الجدول نجد أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

التفسير الهندسي : المنحنى البياني (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الترتيب) مستقيماً مقارباً.

(4) استنتاج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$:

بما أن $f'(-1) = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مماساً موازياً لمحور الفواصل
 معادلته : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = f(-1) = -5$

(5) الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير :

$$\left(\text{خطأ} \right) \quad f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\text{خطأ} \right)$$

الدالة f متناقصة تماماً على $]0; 1[$ الذي يشمل العددين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ فبتالي ينعكس ترتيب الصور .

$$\left(\text{صح} \right) \quad \text{ب- المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبلاً حلاً وحيداً } \alpha \text{ في المجال } \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$$

الدالة f مستمرة على $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$ لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على $\mathbb{R} - \{0\}$

الدالة f رتيبة على $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$ (متناقصة تماماً على $]0; 1[$ الذي يحويه)

$$\text{لدينا : } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad \text{ومنهم : } f\left(\frac{1}{3}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} < 0$$

ومنهم حسب مبرهنة القيم المتوسطة - المعادلة $f(x) = 0$ تقبلاً حلاً وحيداً α في المجال $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$.

(صح)

(ج) - المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $[2.5; 2.7]$

لأنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، الدالة f مستمرة على $[2.5; 2.7]$ لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على $\mathbb{R} - \{0\}$
 الدالة f رتيبة على $[2.5; 2.7]$ (متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ الذي يحويه)
 لدينا: $f(2.5) = 2.5 - 3 + \frac{1}{2.5} = -0.1$ و $f(2.7) = 2.7 - 3 + \frac{1}{2.7} = 0.07$: $f(2.5) \times f(2.7) = -0.007 < 0$ ومنه :

(د) - $f'(3) > 0$ (صح)لأن $f'(x) > 0$ على المجال $[1; +\infty[$ و $3 \in]1; +\infty[$ **(6) استنتاج جدول إشارة الدالة f :**من السؤال (5) و جدول تغيرات الدالة f نجد :

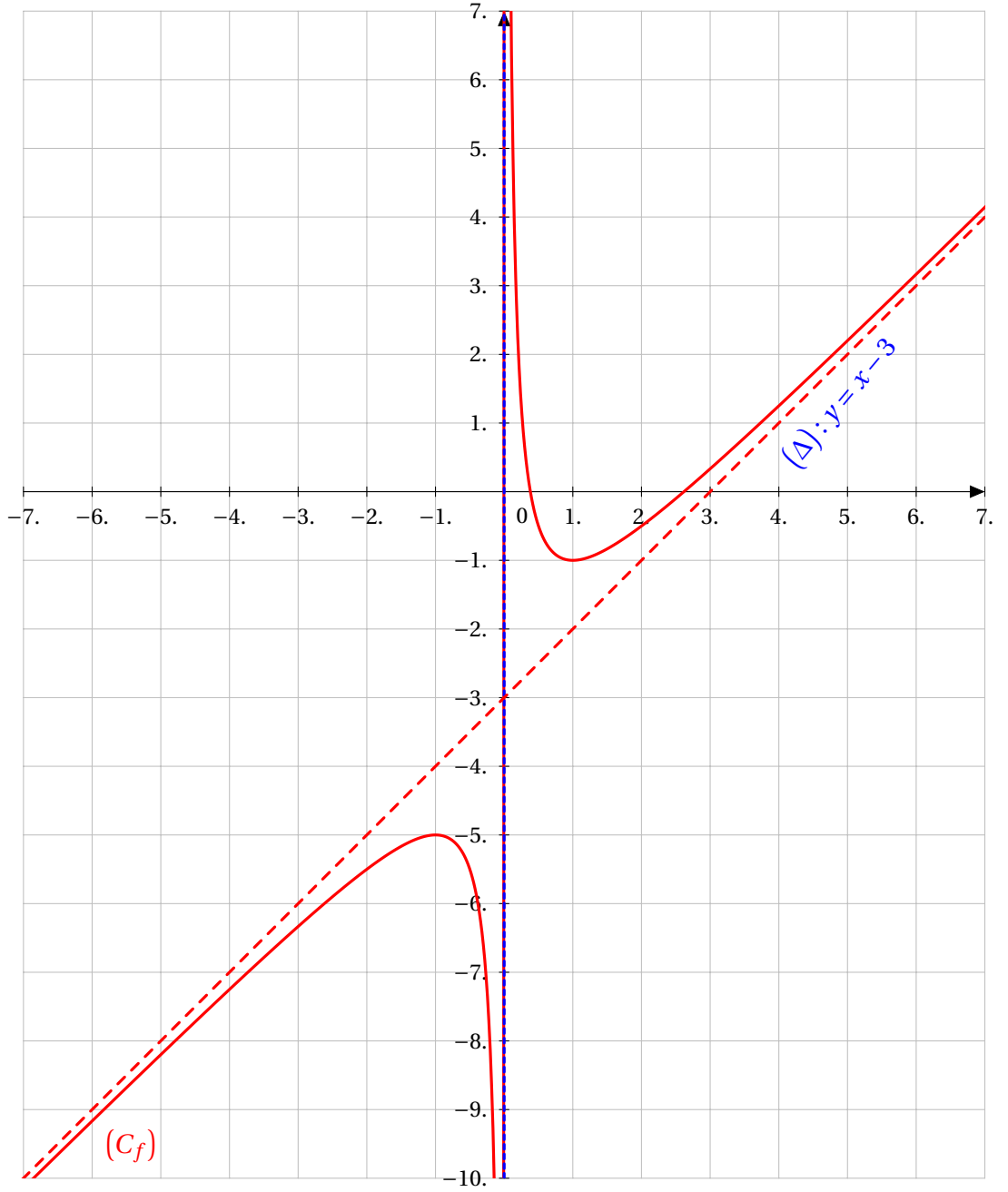
x	$-\infty$	0	α	β	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

الجزء الثاني :نأخذ في ما يلي $a = 1; b = -3; c = 1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس :**(1) تبين أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 3$ مقاربا مائلا :**ليكن x عدد حقيقي غير معدوم $f(x) - y = \left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) - (x - 3) = \frac{1}{x}$ بأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ نستنتج أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 3$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$.**(2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :**يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1}{x}$ ومنه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	+	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

إذا كان $x \in]-\infty; 0[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) ، أما إذا كان $x \in]0; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) **(3) بيان أن $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.**لدينا : $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $-x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ومنه : $f(-x) + f(x) = \left(-x - 3 - \frac{1}{x}\right) + \left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) = -3 - 3 = -6$ العلاقة العكسية محققة : $f(2a - x) + f(x) = 2b$ مع $a = 0$ و $b = -3$ ومنه النقطة $(0; -3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

(4) التمثيل البياني لـ (C_f) والمستقيمات المقاربة:



(5) المناقشة البيانية حسب قيم العدد الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$

- حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.
- ✍ إذا كان $m \in]-\infty; -5[$ يوجد حلين مختلفين سالبين
- ✍ إذا كان $m = -5$ يوجد حل مضاعف سالب
- ✍ إذا كان $m \in]-5; -1[$ لا يوجد حل
- ✍ إذا كان $m = -1$ يوجد حل مضاعف موجب
- ✍ إذا كان $m \in]-1; +\infty[$ يوجد حلين مختلفين موجبين.

✍ الجزء الثالث :

g دالة ذات المتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $g(x) = [f(x)]^2$ ، (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) إيجاد نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^2 = +\infty \quad : \text{حساب نهاية الدالة } g \text{ عند } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)^2 = +\infty \quad : \text{حساب نهاية الدالة } g \text{ عند } -\infty$$

حساب نهاية الدالة g عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right)^2 = +\infty$$

(2) حساب $g(\beta)$ ، $g(\alpha)$ ، $g(1)$ ، $g(-1)$:

$$g(-1) = [f(-1)]^2 = (-5)^2 = 25$$

$$g(1) = [f(1)]^2 = (-1)^2 = 1$$

$$g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = (0)^2 = 0$$

(3) حساب $g'(x)$

تفكك الدالة g إلى دالتين f و h بحيث $g = h \circ f$:
 $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{h} x^2$
 حساب $g'(x)$ باستعمال مشتق مركب دالتين: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ لأنها مربع دالة قابلة للاشتقاق و عليه: وبتالي: $g'(x) = h'(f(x)) \times f'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

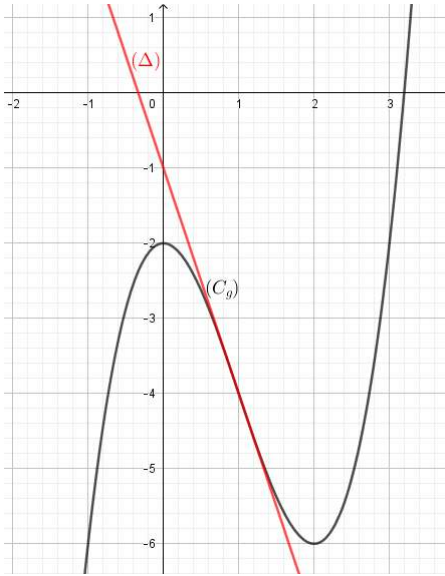
(4) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

لدينا إشارة $g'(x)$ من إشارة الجداء $f'(x) \times f(x)$ باستعمال جدول إشارة $f'(x)$ و $f(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	-1	0	α	1	β	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		1		$+\infty$

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم

الجزء الأول :



✍️ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.
المستقيم (D) هو مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1.
بقراءة بيانية :

- (1) أحسب كل من : $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(1)$ و $g''(1)$.
- (2) شكل جدول تغيرات الدالة g .
- (3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3; \frac{7}{2}\right]$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$.
- (4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

✍️ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .
- (2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$ ثم إستنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له .
- (4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
- (5) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .
- (6) بين أن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-2} .
- (7) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.
- (8) جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات .
- (9) أنشئ (Δ) , (C_f) .
- (10) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

الجزء الثالث :

- ✍️ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \frac{|x^3 + 1|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني .
- (1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .
 - (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة -1 ثم فسر النتيجة هندسياً .
 - (3) إستنتج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقاً من (C_f) .

الجزء الأول :

(1) حساب $g''(1), g'(1), g'(2), g'(0)$:

• $g'(0) = g'(2) = 0$ قيم حدية محلية .

• $g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3$: منه $A(1; -4)$ و $B(0; -1)$ و $g''(1) = 0$ المماس (D) نختار نقطتين كيفيتين من المماس $A(1; -4)$ و $B(0; -1)$ و $g''(1) = 0$ المماس (D) يغير وضعيته عند نقطة التماس و بالتالي فهو يخترق المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 التي تعتبر نقطة إنعطاف .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	0	+
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$

(3) تحديد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$:

من البيان نلاحظ أن : $g(3) < 0$ و $g\left(\frac{7}{2}\right) > 0$.

إستنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من $\left]3; \frac{7}{2}\right[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $\left]3; \frac{7}{2}\right[$ و $g(3) \times g\left(\frac{7}{2}\right) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $3 < \alpha < \frac{7}{2}$ يحقق : $g(\alpha) = 0$.

التحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$:

لدينا : $\left]3; \frac{7}{2}\right[\subset]3.1; 3.2[$ إذن الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[3.1; 3.2]$ و $g(3.1) \approx -1.039$ و $g(3.2) \approx 0.048$ أي : $g(3.1) \times g(3.2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $3.1 < \alpha < 3.2$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

(4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني :

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور الترتيب) للمنحنى (C_f) معادلته $x = 1$.

(3) تبيان أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(x-1)$ و $g(x)$ لأن $(x-1)^4 > 0$

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$(x-1)$	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]\alpha; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) حساب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x]$ ثم إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 2$ أي $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x - 2] = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$ و منه نستنتج أن المستقيم

$y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

(5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = f(x) - (x+2) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة الفرق من إشارة البسط $3x-1$ لأن المقام موجب تماما $(x-1)^2 > 0$.

$$3x-1=0 \text{ أي } 3x=1 \text{ أي } x=\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع في النقطة $A(\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

(6) تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

طريقة 1 : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha)$ بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند $x = \alpha$ فإن : $f'(\alpha) = 0$.

طريقة 2 : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha) = \frac{(\alpha-1) \times g(\alpha)}{(\alpha-1)^4} = 0$ لأن $g(\alpha) = 0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته : $y = f(\alpha)$.

(7) تبيان أن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم إعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \text{ معناه : } f(\alpha) - \left[3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \right] = 0 \text{ و منه :}$$

$$f(\alpha) - \left[3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \right] = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2} - 3 - \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 + 1 - 3(\alpha-1)^2 - 6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2}{(\alpha-1)^2} = \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = 0$$

$$\text{إذن : } f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

حصرا لـ $f(\alpha)$:

$$\text{نعلم أن : } 3.1 < \alpha < 3.2 \text{ أي : } (3.1-1)^2 < (\alpha-1)^2 < (3.2-1)^2 \text{ أي : } 4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84 \text{ أي : } \frac{1}{4.84} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{4.41}$$

$$\text{أي : } 0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 0.23 \text{ ولدينا أيضا : } 18.6 < 6\alpha < 19.2 \text{ و منه : } 0.23 \times 19.2 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 0.2 \times 18.6 \text{ أي :}$$

$$6.72 < f(\alpha) < 7.42 \text{ إذن : } 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 7.42 \text{ أي : } 3 + 3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 3 + 4.42$$

(8) كتابة معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$:

$$(T) : y = f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ و } f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \text{ و } f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{24} \text{ و منه :}$$

$$(T) : y = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{24} = x + \frac{1}{3} + \frac{13}{24} = x + \frac{8}{24} + \frac{13}{24} = x + \frac{21}{24} = x + \frac{7}{8}$$

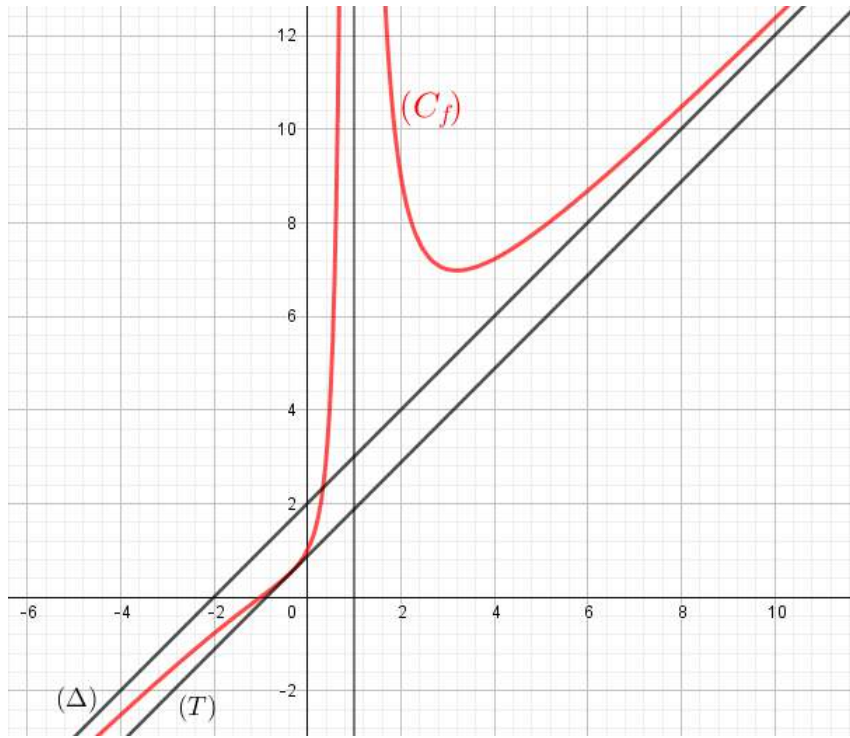
(9) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$\text{أي : } \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = 0 \text{ أي : } x^3 + 1 = 0 \text{ و منه : } x = -1 \text{ إذن : } (C_f) \cap (xx') = \{A(-1; 0)\}$$

$$\text{مع محور الترتيب : } \text{نحسب } f(0) \text{ أي : } f(0) = \frac{0^3 + 1}{(0-1)^2} = 1 \text{ و منه : } f(0) = 1 \text{ إذن : } (C_f) \cap (yy') = \{B(0; 1)\}$$

إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



(10) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

- حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + m$.
- $m < \frac{7}{8}$: لا توجد حلول.
- $m = \frac{7}{8}$: حل مضاعف سالب.
- $m = 1$: حلين أحدهما معدوم والآخر سالب.
- $1 < m < 2$: حلين مختلفين في الإشارة.
- $m = 2$: حل وحيد موجب.
- $m > 2$: حلين موجبين.

الجزء الثالث :

(1) كتابة الدالة h بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة $x^3 + 1$ من إشارة $x + 1$ لأن : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ و $x^2 - x + 1 > 0$ إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^3 + 1$	-	0	+

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = f(x) : x \in [-1; 1[\cup]1; +\infty[\\ -\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = -f(x) : x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند (-1) :

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{(x + 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الاشتقاق عند (-1) من اليمين .
دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليسار :

$$\lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \leq -1} \frac{-\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}}{x+1} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^3 + 1)}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الاشتقاق عند (-1) من اليسار .

بما أن : $\lim_{x \geq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \neq \lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ فإن الدالة h لا تقبل الاشتقاق عند القيمة (-1) .

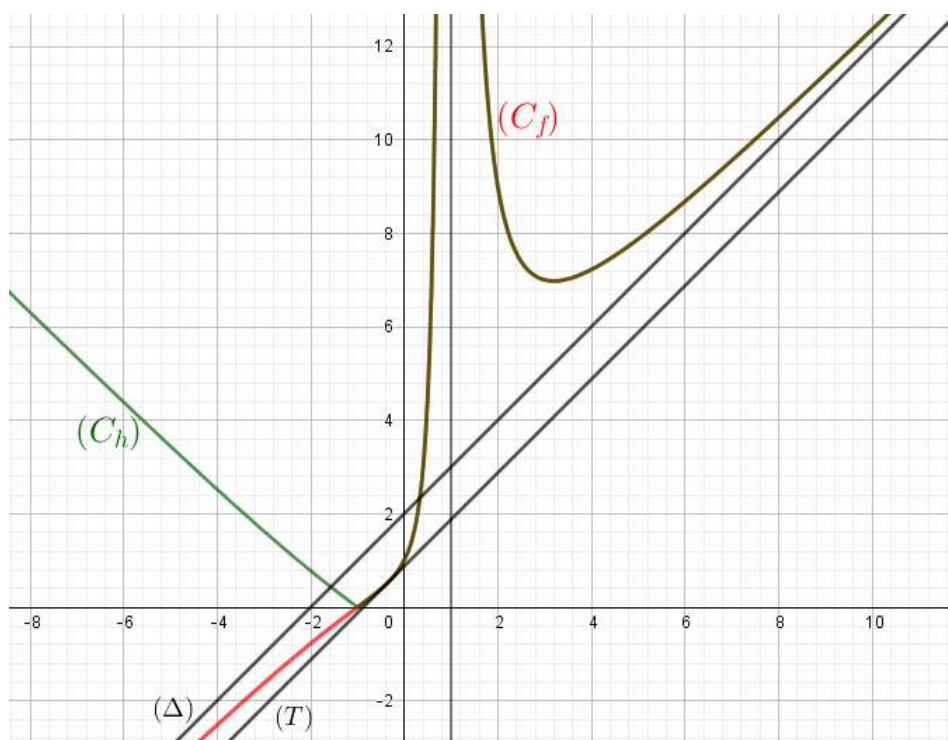
التفسير الهندسي :

المنحنى (C_h) يقبل عند النقطة $A(-1; f(-1))$ نصفين مماسين حيث $A(-1; 0)$ هي نقطة زاوية .

(3) إستنتاج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

(C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال $] -\infty; -1[$.



بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم

الجزء الأول :

- تكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ ، و (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- أدرس تغيرات الدالة g .
 - برهن أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى (C_g) .
 - α و β عددان حقيقيان .
برهن أنه إذا كان $\beta > \alpha$ فإن $g(\beta) > g(\alpha)$ ثم إستنتج مقارنة العددين $g(2021)$ و $g(2022)$ دون حساب قيمتها .
 - أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج وضعية (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل .
 - أرسم المنحنى (C_g) .

الجزء الثاني :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$.
 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
 - أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
 - إستنتج إتجاه تغير الدالة f على مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
 - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة وحيدة A يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لـ (T) .
 - أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.
 - أعط إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$ ثم إستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .
 - أرسم (Δ) ، (T) ثم (C_f) في معلم جديد يختلف عن (C_g) .
 - ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلات التالية :
- $$x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2 ; f(x) = x + m^2 - 4 ; -\frac{x}{(x-1)^2} = m ; f(x) = f(m) ; f(x) = |m| - 1 ; f(x) = m$$

الجزء الثالث :

تكن الدوال العددية التالية : h_1 ، h_2 ، h_3 حيث :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2, D_{h_2} = D_f \text{ و } h_2(x) = |f(x)|, D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ و } h_1(x) = f(|x|)$$

- بين أن h_1 دالة زوجية .
- إشرح كيف يتم رسم المنحنيات (C_{h_3}) ، (C_{h_2}) ، (C_{h_1}) إنطلاقا من منحنى (C_f) ثم أنشئها .

الجزء الرابع :

تكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $k(x) = f(x^2)$

- أدرس إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الجزء الأول :

(1) دراسة تغيرات الدالة $g : g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$:
(أ) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

(ب) حساب المشتقة وإشارتها :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$
إشارة $g'(x)$ من إشارة : $"3x^2 - 6x + 4"$: $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(3)(4) = -12 < 0$
إشارة $g'(x)$ من إشارة $a = 3 > 0$ و منه : $g'(x) > 0$

(ج) إتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x) > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(د) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها :

لدينا : $g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ و الدالة $g'(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

حساب الدالة المشتقة الثانية : $g''(x) = 6x - 6$ معناه : $g''(x) = 0$: $6x - 6 = 0$ و منه : $6x = 6$ و منه : $x = \frac{6}{6} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

بما أن $g''(x)$ إنعدمت عند 1 و غيرت من إشارتها فإن النقطة $I(1; g(1))$ أي : $I(1; 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g) .

البرهان أن النقطة I هي مركز تناظر ل (C_g) :

$$g(2-x) + g(x) = 4 \text{ أي } g(2\alpha - x) + g(x) = 2\beta, \quad 2\alpha - x \in D_g \text{ و } x \in D_g$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x \text{ لدينا}$$

$$g(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 4x = (2-x)(2-x)^2 - 3(x^2 + 4 - 4x) + 8 - 4x = (2-x)(x^2 + 4 - 4x) - 12 - 3x^2 + 12x + 8 - 4x =$$

$$8 + 2x^2 - 8x - 4x - x^3 + 4x^2 - 12 - 3x^2 + 12x + 8 - 4x = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

$$g(2-x) + g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4 + x^3 - 3x^2 + 4x = 4$$

و منه : $I(1; 2)$ مركز تناظر المنحنى (C_g) .

(3) البرهان أنه إذا كان $\beta > \alpha$ فإن : $g(\beta) > g(\alpha)$:

لدينا : $\beta > \alpha$ و الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(\beta) > g(\alpha)$

إستنتاج المقارنة بين $g(2022)$ و $g(2021)$:

لدينا : $2022 > 2021$ و الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(2022) > g(2021)$

(4) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ أي : $g(x) = x(x^2 - 3x + 4)$

$g(x) = 0$ معناه : إما $x = 0$ أو : $x^2 - 3x + 4 = 0$

$x^2 - 3x + 4 > 0$: منه $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$

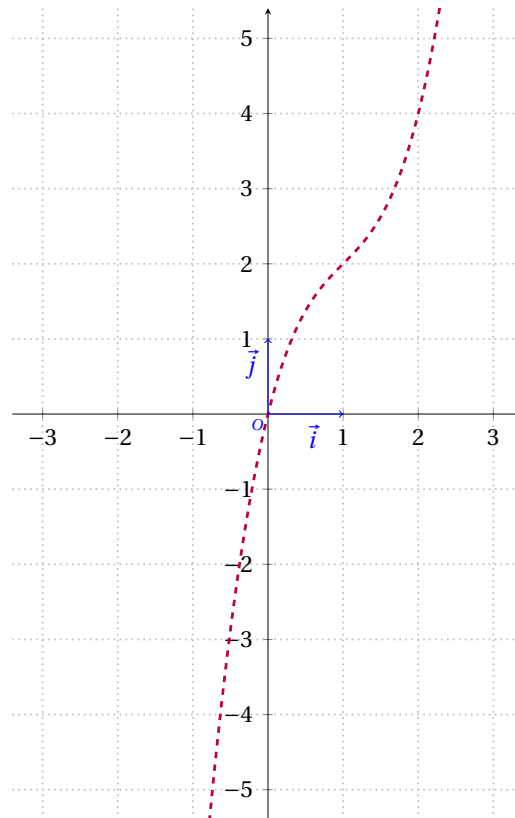
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 - 3x + 4$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+

إستنتاج وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل :

نحتاج إلى إشارة $g(x)$ لتحديد وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
الوضعية	(C_g) فوق (xx') (C_g) يقطع (xx') في النقطة A(0;0) (C_g) تحت (xx')		

(5) الرسم :



الجزء الثاني :

• المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

(1) **تعيين العددين الحقيقيين a و b حيث :** $f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$

$$f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-1)^2 + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax(x^2 - 2x + 1) + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 - 2ax^2 + (a+b)x}{(x-1)^2}$$

• بالمطابقة مع $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ نجد : $a = 1$ و $a + b = 0$ أي : $b = -1$ ، إذن : $f(x) = x + \frac{-x}{(x-1)^2}$

(2) **حساب النهايات :**

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

• **التفسير الهندسي :** (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا (موازي لمحور الترتيب) معادلته $x = 1$.

(3) **حساب :** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)^3 - 2(2+h)^2}{(2+h-1)^2} - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)(2+h)^2 - 2(2+h)^2}{(2+h-1)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2[2+h-2]}{h(h+1)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2}{(h+1)^2} = \frac{2^2}{(0+1)^2} = 4 \in \mathbb{R}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد 2 أي : $f'(2) = 4$.

• **التفسير الهندسي :** (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2 معامل توجيهه يساوي 4 و منه معادلة هذا المماس هي :

• $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 0 = 4x - 8$

(4) **تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن :** $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين : $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 2x^2)}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2x^3 + 4x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

(5) **إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :**

لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ و منه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
$(x-1)^3$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]1; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

(6) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - \frac{x}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

و منه : $y = x$: مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

دراسة الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\bullet \text{ لدينا : } f(x) - y = \frac{-x}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	-

الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-	-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

(7) تبيان أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة وحيدة A :

$(\Delta) \parallel (T)$ معناه : $f'(x) = 1$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3} = 1 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} - 1 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = 1$$

$$\bullet \text{ يكافئ : } \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x-1)^3} = 0 \quad \text{أي} \quad x+1=0 \quad \text{أي} \quad x=-1$$

و منه (C_f) يقبل مماسا (T) حيث $(T) \parallel (\Delta)$ عند النقطة $A(-1; f(-1))$

$$\bullet A(-1; -\frac{3}{4}) : \text{ أي } f(-1) = \frac{(-1)^3 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{-1-2}{4} = \frac{-3}{4}$$

معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة $A(-1; -\frac{3}{4})$:

$$\bullet (T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 1(x + 1) - \frac{3}{4} = x + \frac{1}{4}$$

(8) إيجاد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') :

نحل المعادلة : $f(x) = 0$ أي : $\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = 0$ أي : $x^3 - 2x^2 = 0$ أي : $x^2(x-2) = 0$ إما : $x^2 = 0$ أو : $x-2 = 0$ أي : $x = 0$ و $x = 2$ منه : $(C_f) \cap (xx') = \{(0,0); (2,0)\}$

(9) إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$: لدينا : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ أي : $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

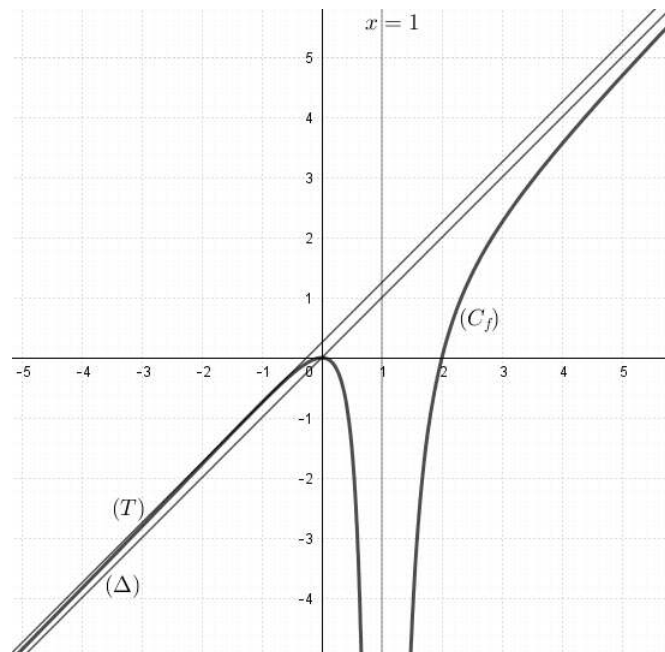
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+
$f(x)$	-	0	-	0	+

الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل (xx') :

لدينا إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$ و منه :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-	0	+
الوضعية	تحت (C_f) (xx')	(C_f) يمس (xx')	تحت (C_f) (xx')	تحت (C_f) (xx')	فوق (C_f) (xx')

(10) الرسم :



(11) المناقشة البيانية :

- $f(x) = m$ الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m$.
- $m < 0$ أو $m \in]-\infty; 0[$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و 1 سالب).
- $m = 0$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما.
- $m > 0$ أو $m \in]0; +\infty[$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.

$$f(x) = |m| - 1$$

- $|m| - 1 < 0$ أي : $|m| < 1$ أي : $-1 < m < 1$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و 1 سالب).
- $|m| - 1 = 0$ أي : $|m| = 1$ أي : $m = 1$ و $m = -1$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما.
- $|m| - 1 > 0$ أي : $|m| > 1$ أي : $m > 1$ و $m < -1$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.

$$f(x) = f(m) \text{ مع } m \neq 1$$

- $f(m) < 0$ أي : $f(m) < 0$ أي : $m \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و 1 سالب).
- $f(x) = m$ أي : $m = 0$ أو $m = 2$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما $x = 2$.
- $f(m) > 0$ أي : $m > 2$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما.
- $-\frac{x}{(x-1)^2} = m$ نضيف x لكل طرف $f(x) = x + m$ أي : $x - \frac{x}{(x-1)^2} = x + m$ مناقشة ماثلة أي : $(\Delta) \parallel (\Delta_m) \parallel (T)$.
- $m < 0$ للمعادلة حلان موجبان تماما.
- $m = 0$ للمعادلة حلا وحيدا معدوما.
- $0 < m < \frac{1}{4}$ للمعادلة حلان سالبان.
- $m = \frac{1}{4}$ للمعادلة حلا مضاعفا سالب.
- $m > \frac{1}{4}$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$$f(x) = x + m^2 - 4 \text{ مناقشة ماثلة } (\Delta) \parallel (\Delta_m) \parallel (T)$$

- $m^2 - 4 < 0$ أي : $m^2 < 4$ أي : $\sqrt{m^2} < \sqrt{4}$ أي : $|m| < 2$ و منه : $-2 < m < 2$ للمعادلة حلان متميزان موجبان.
- $m^2 - 4 = 0$ أي : $m^2 = 4$ أي : $\sqrt{m^2} = \sqrt{4}$ أي : $|m| = 2$ أي : $m = 2$ و $m = -2$ للمعادلة حلا واحدا معدوما.
- $0 < m^2 - 4 < \frac{1}{4}$ أي : $4 < m^2 < \frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{4} < \sqrt{m^2} < \sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $2 < m < \sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $-\frac{\sqrt{17}}{2} < m < -2$ أو : $2 < m < \frac{\sqrt{17}}{2}$ للمعادلة حلان سالبان.
- $m^2 - 4 = \frac{1}{4}$ أي : $m^2 = \frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{m^2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $|m| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ أي : $m = \frac{\sqrt{17}}{2}$ أو $m = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ للمعادلة حلا مضاعفا سالب.
- $m^2 - 4 > \frac{1}{4}$ أي : $m^2 > \frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{m^2} > \sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $|m| > \frac{\sqrt{17}}{2}$ أي : $m < -\frac{\sqrt{17}}{2}$ أو $m > \frac{\sqrt{17}}{2}$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$$x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2 \text{ أي : } \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = mx \text{ أي : مناقشة دورانية.}$$

لتكن $A_0(x_0; y_0)$ حيث A_0 نقطة ثابتة من (Δ_m) حيث معادلة (Δ_m) هي : $y = mx$

- $A_0 \in (\Delta_m)$ معناه $y_0 = mx_0$ معناه $mx_0 - y_0 = 0$ (المتغير هو الوسيط m) أي : $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ أي : $A_0(0; 0)$.
- $m < 0$ للمعادلة ثلاث حلول واحد معدوم و 2 موجبة تماما.
- $m = 0$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم و الآخر موجب تماما.

• $0 < m < 1$ للمعادلة ثلاث حلول واحد سالب و آخر معدوم و آخر موجب .

• $m = 1$ للمعادلة حلا واحدا معدوما .

• $m > 1$ للمعادلة حلا واحدا معدوما .

الجزء الثالث :

لدينا الدوال العددية التالية : h_1, h_2, h_3 حيث :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2, D_{h_2} = D_f \text{ و } h_2(x) = |f(x)|, D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ و } h_1(x) = f(|x|)$$

(1) تبين أن h_1 دالة زوجية :

بما أن D_{h_1} متناظرة بالنسبة إلى O لأن : $-x \in D_{h_1}$ و $x \in D_{h_1}$ و $D_{h_1} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$:

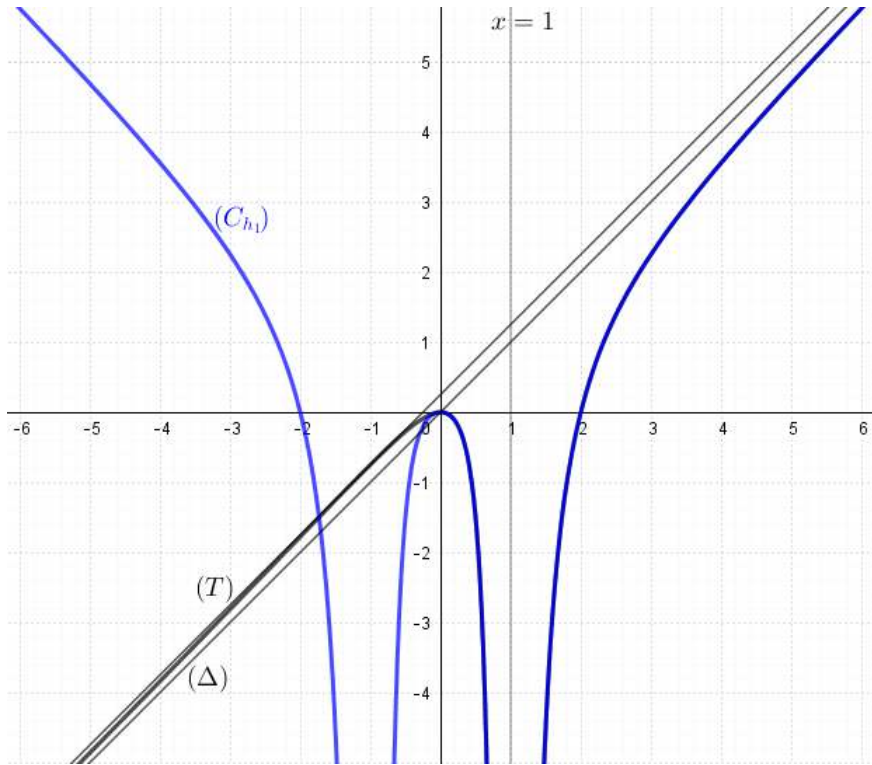
• $h_1(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h_1(x)$ و منه h_1 دالة زوجية و (C_{h_1}) يكون متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

(2) شرح كيفية رسم المنحنيات $(C_{h_3}), (C_{h_2}), (C_{h_1})$ إنطلاقا من منحنى (C_f) مع إنشائها :

شرح كيفية رسم (C_{h_1}) :

$$h_1(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) : x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(-x) : x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\end{cases}$$

(C_{h_1}) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ و بما أن h_1 دالة زوجية فنناظر (C_{h_1}) بالنسبة إلى محور الترتيب .

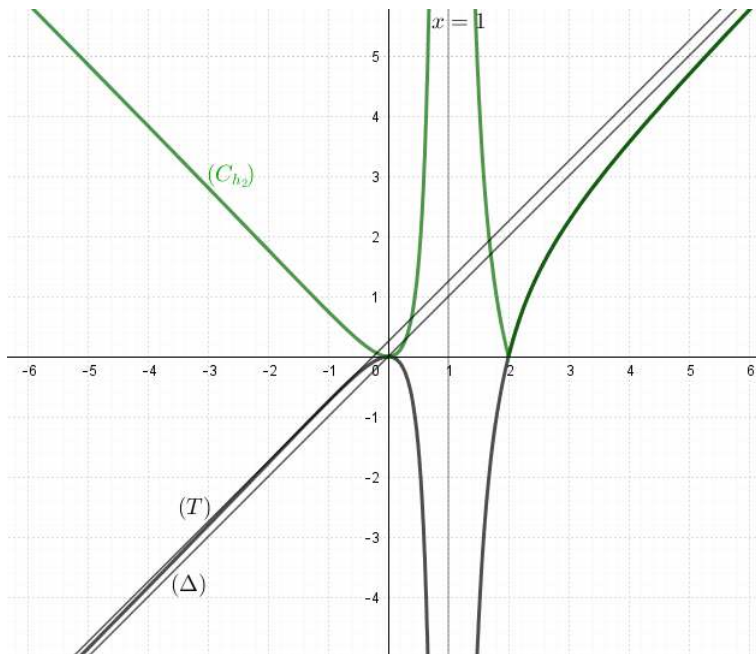


شرح كيفية رسم (C_{h_2}) :

$$h_2(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) : f(x) \geq 0 \\ -f(x) : f(x) < 0 \end{cases}$$

(C_{h_2}) يقع فوق محور الفواصل لأن $|f(x)| \geq 0$

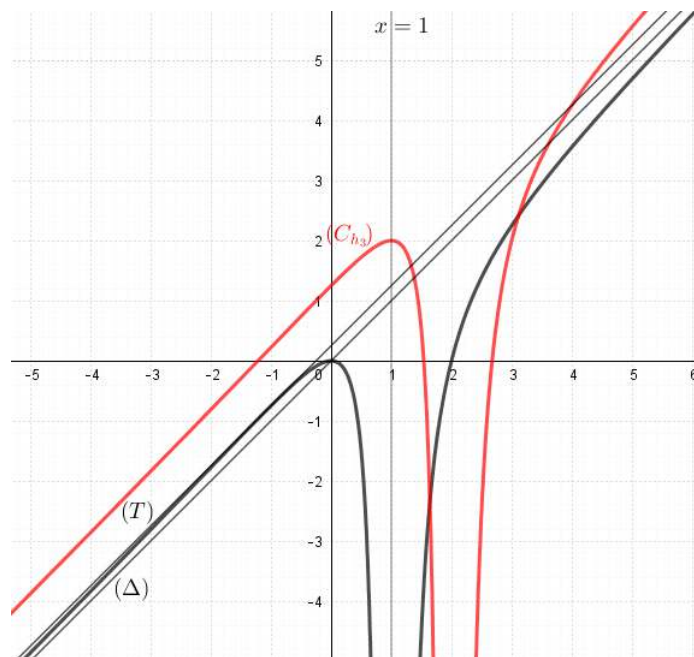
(C_{h_2}) ينطبق على (C_f) على المجال $[2; +\infty[$ و (C_{h_2}) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $] -\infty; 1[\cup]1; 2]$.



📌 شرح كيفية رسم (C_{h_3}) :

$$D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } h_3(x) = f(x-1) + 2$$

يتم رسم (C_{h_3}) إنطلاقاً من (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{i} + 2\vec{j}$



📌 الجزء الرابع :

📌 الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $k(x) = f(x^2)$

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها :

نلاحظ أن $k = f \circ u$ حيث $u(x) = x^2$

- الدالة k قابلة للإشتقاق على المجالات $]-\infty; -1[$ و $] -1; 1[$ و $]1; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $k'(x) = 2xf'(x^2)$
- $f'(x^2) \geq 0$ إذا كان : $x^2 \leq 0$ لما $x = 0$ أو $x^2 > 1$ أي : $\sqrt{x^2} > \sqrt{1}$ أي : $|x| > 1$ أي : $x > 1$ أو $x < -1$.
- $f'(x^2) \leq 0$ إذا كان : $0 \leq x^2 < 1$ أي : $\sqrt{x^2} < \sqrt{1}$ أي : $|x| < 1$ أي : $-1 < x < 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$f'(x^2)$	+	-	-	-	+
$k'(x)$	-	+	0	-	+

و بالتالي : الدالة k متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; -1[$ و $]0; 1[$ و متزايدة تماما على المجالين $]-1; 0]$ و $]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$k(0) = f(0^2) = f(0) = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$k'(x)$	-	+	0	-	+
$k(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 0 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$	

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم