

الجزء 1-

ليكن كثير الحدود $h(x)$ المعروف بـ : $h(x) = x^3 + x^2 - 7x + 2$

(1) أحسب $h(2)$ و أعط تحليلًا لكثير الحدود $h(x)$.

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $h(x) = 0$

الجزء 2-

نعتبر الدالتين g و f المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} - \{1\}$ على الترتيب بـ :

$g(x) = x^2 + 2x - 3$ و $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و ليكن (C_g) و (C_f) تمثيليهما البيانيين في

المستوي المنسوب إلى معلم منعام و منجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين فواصل نقط تقاطع (C_g) و (C_f) .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ حيث α و β

عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إسنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_g) إنطلاقاً من المنحنى الممثل للدالة مربع .

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$ بحيث a

و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إسنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_f) إنطلاقاً من المنحنى الممثل للدالة مقلوب .

(4) أ- بين أن المستقيم $x = -1$ محور تناظر للمنحنى (C_g) .

ب- بين أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الجزء 3-

نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين بـ : $f_1(x) = |f(x)|$ و $f_2(x) = f(|x|)$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f_1 ثم أكتب الدالة f_1 دون رمز القيمة المطلقة .

(2) إسنتنج كيفية إنشاء (C_{f_1}) التمثيل البياني للدالة f_1 .

(3) أ- عين مجموعة تعريف الدالة f_2 ثم بين أن f_2 دالة زوجية .

ب- إسنتنج كيفية إنشاء (C_{f_2}) التمثيل البياني للدالة f_2 .

حل مقترح :

(1) حساب $h(2)$ و إعطاء تحليلا لكثير الحدود $h(x)$:

$$h(2) = 2^3 + 2^2 - 7 \times 2 + 2 = 0 \text{ و منه نسننج أن } 2 \text{ جذر لكثير الحدود } h(x) .$$

بما أن 2 جذر لكثير الحدود $h(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ من الدرجة الثانية يحقق :

$$h(x) = (x-2)g(x)$$

نضع : $g(x) = ax^2 + bx + c$ و نعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

أ- طريقة النشر و المطابقة :

$$h(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \text{ و منه نجد :}$$

$$h(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \text{ ؛ إذن بالمطابقة نحصل على :}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 1 \text{ و منه نجد : } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 \\ c - 2b = -7 \\ -2c = 2 \end{cases}$$

إفـن : $h(x) = (x-2)(x^2 + 3x - 1)$

ب- طريقة القسمة الإقليدية : (أكثر إختصارا من طريقة النشر و المطابقة)

$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 7x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline 3x^2 - 7x + 2 \\ -3x^2 + 6x \\ \hline -x + 2 \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline x^2 + 3x - 1 \end{array}$
--	---

و منه نجد : $g(x) = x^2 + 3x - 1$ **و بالتالي يكون :** $h(x) = (x-2)(x^2 + 3x - 1)$

(2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $h(x) = 0$

$h(x) = 0$ **معناه :** $(x-2)(x^2 + 3x - 1) = 0$ **و منه يكون :** $x-2=0$ **أو** $x^2 + 3x - 1 = 0$

أي $x=2$ **أو** $x^2 + 3x - 1 = 0$ **و لإيجاد حلول المعادلة** $x^2 + 3x - 1 = 0$ **نحسب المميز Δ :**

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1)$ **أي** $\Delta = 13$ ؛ **نلاحظ أن :** $\Delta > 0$ **و منه المعادلة تقبل حلين متميزين**

هما : $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ ، $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$.

نتيجة : **حلول المعادلة** $h(x) = 0$ **هي :** $S = \left\{ 2, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \right\}$

الجزء 2-

(1) نعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) و (C_f) :

من أجل ذلك نبذل عن حلول المعادلة $f(x) = g(x)$:

من أجل كل $x \neq 1$: $\frac{2x+1}{x-1} = x^2 + 2x - 3$ نكافئ : $2x+1 = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$ أي

$$. \quad h(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0 \quad \text{أي} \quad 2x+1 = x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 - 2x + 3$$

إذن حسب السؤال السابق نستنتج أن (C_g) و (C_f) يتقاطعان في النقط التي فواصلها

$$. \quad \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \quad \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad 2$$

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ حيث α و β

عددين حقيقيين يطلب تعيينهما ثم إسنتناج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_g) إنطلاقاً

من المنحنى الممثل للدالة مربع :

الطريقة الأولى : نسنعمل النشر ثم المطابقة فنحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ \alpha^2 + \beta = -3 \end{cases} \quad \text{منه نجد :} \quad g(x) = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

$$\text{إذن :} \quad g(x) = (x+1)^2 - 4$$

الطريقة الثانية : نسنعمل الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 \quad \text{منه الشكل النموذجي لثلاثي الحدود} \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) \quad \text{أي} \quad \Delta = 16$$

$$\text{هو :} \quad x^2 + 2x - 3 = 1 \left[\left(x + \frac{2}{2 \times 1} \right)^2 - \frac{16}{4 \times 1^2} \right] \quad \text{أي} \quad x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4 \quad \text{منه يكون :}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{إذن نجد :} \quad g(x) = (x+1)^2 - 4$$

$g(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$ أي أن $g(x)$ نكتب من الشكل $g(x) = k(x + \alpha) + \beta$ بحيث :

$k(x) = x^2$ ، $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \end{cases}$ ؛ إذن : (C_g) هو صورة (P) التمثيل البياني للدالة مربع

بالنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(3) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$ بحيث a

و b عددين حقيقيين يطلب تعيينهما ثم إستنتاج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_f)

إنطلاقاً من المنحنى الممثل للدالة مقلوب :

الطريقة الأولى : نوجد المقامات ثم نطابق مع عبارة $f(x)$:

$f(x) = a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$ و منه نتحصل على : $ax - a + b = 2x + 1$ ؛ إذن نجد :

$\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ و بالتالي يكون : $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

الطريقة الثانية : نحول الكتابة من الشكل : من أجل كل $x \neq 1$ لدينا

$f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1}$ أي $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+2+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{3}{x-1}$ و منه

نجد $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ ؛ إذن يكون : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

$f(x)$ نكتب من الشكل $f(x) = u(x+a) + b$ بحيث : $u(x) = \frac{3}{x}$ و $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ ؛ إذن :

(C_g) هو صورة (C_u) التمثيل البياني للدالة u بالنسحاب الذي شعاعه $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4 أ- نبين أن المستقيم الذي $x = -1$ معادلة له هو محور تناظر للمنحنى (C_g) :

من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن : $2 \times (-1) - x = -2 - x \in \mathbb{R}$ أي $2 \times (-1) - x \in D_g$

و من جهة أخرى : $g(-2-x) = (-2-x)^2 + 2(-2-x) - 3$ أي :

$g(-2-x) = x^2 + 4 + 4x - 4 - 2x - 3$ أي $g(-2-x) = x^2 + 2x - 3$ و منه نجد :

ب- نبين أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_g) :
إذن المستقيم الذي $x = -1$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_g) .

من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \neq 1$ فإن : $-x \neq -1$ و منه $2 \times (1) - x \neq 2 - 1$ و منه

$2 \times (1) - x \in D_f$ أي $2 \times (1) - x \neq 1$

و من جهة أخرى : $f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{3}{2-x-1} + 2 + \frac{3}{x-1}$ أي :

$f(2-x) + f(x) = 4 - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x-1}$ أي $f(2-x) + f(x) = 4 + \frac{3}{1-x} + \frac{3}{x-1}$

و منه نجد : $f(2-x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$

إذن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ملاحظة : يمكن إستعمال **دسائير نغيير المعلى** في الإجابة على السؤالين السابقين .

الجزء 3-

1) $D_{f_1} = D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ثع كتابة الدالة f_1 دون رمز القيمة المطلقة :

$f_1(x) = |f(x)|$ معناه : $\begin{cases} f_1(x) = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ f_1(x) = -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$ إذن يتوجب علينا دراسة

إشارة الدالة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

إذن نستنتج أن : إذا كان $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]1, +\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x + 1}{x - 1}$	$+$	0	$-$	$+$

و إذا كان $x \in [-\frac{1}{2}, 1[$ فإن $f(x) \leq 0$

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{2x+1}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]1, +\infty[\\ f_1(x) = -\frac{2x+1}{x-1} & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, 1[\end{cases} \quad \text{و منه يكون :}$$

(2) إستنتاج كيفية إنشاء (C_{f_1}) التمثيل البياني للدالة f_1 :

• لما $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]1, +\infty[$ فإن $f_1(x) = f(x)$ و منه (C_{f_1}) ينطبق على (C_f) .

• لما $x \in [-\frac{1}{2}, 1[$ فإن $f_1(x) = -f(x)$ و منه (C_{f_1}) متناظر مع (C_f) بالنسبة لـ محور

الفواصل .

(3) أ- نكون الدالة f_2 معرفة من أجل $|x| \in D_f$ أي $|x| \neq 1$ أي $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه نجد

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

نبين أن f_2 دالة زوجية :

من أجل $x \in D_{f_2}$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ أي $-x \in D_{f_2}$ (المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة)

من جهة أخرى : $f_2(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = f_2(x)$ لأنه من خواص القيمة المطلقة

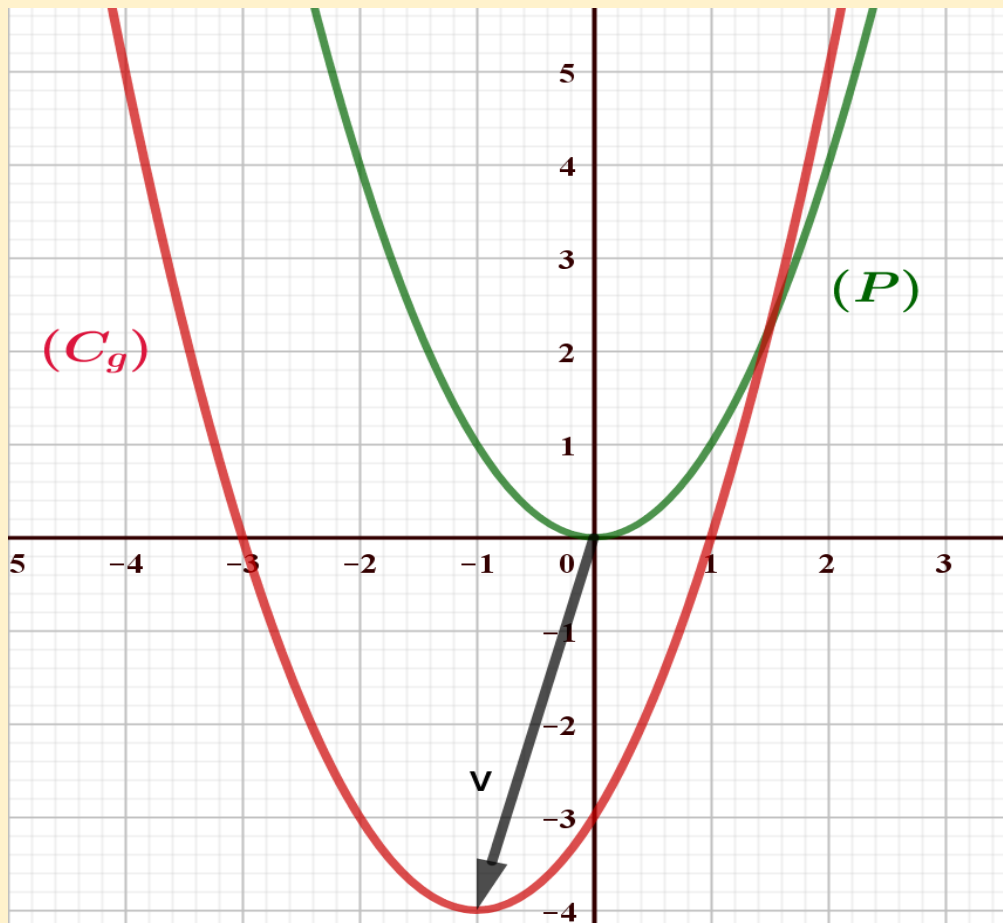
لعدد حقيقي x فإن : $|-x| = |x|$

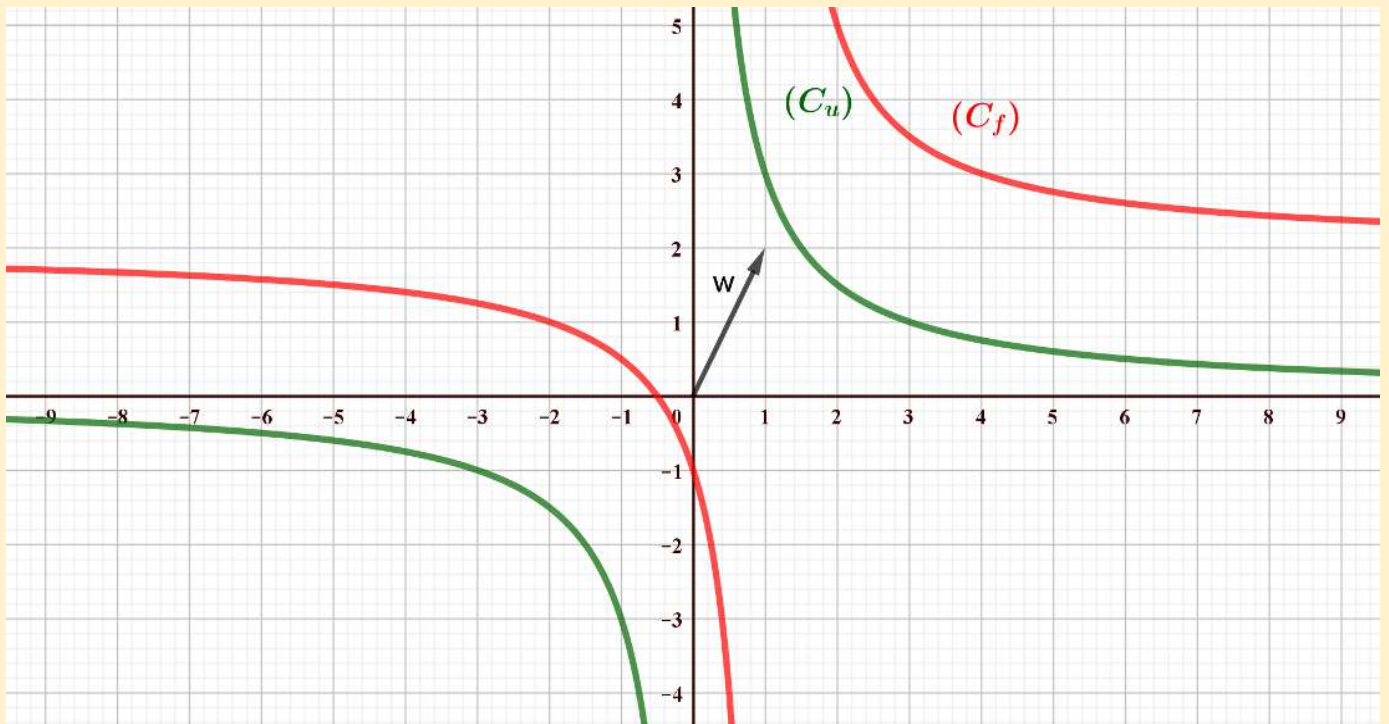
نتيجة : f_2 دالة زوجية .

ب- إسنتاج كيفية إنشاء (C_{f_2}) التمثيل البياني للدالة f_2 :

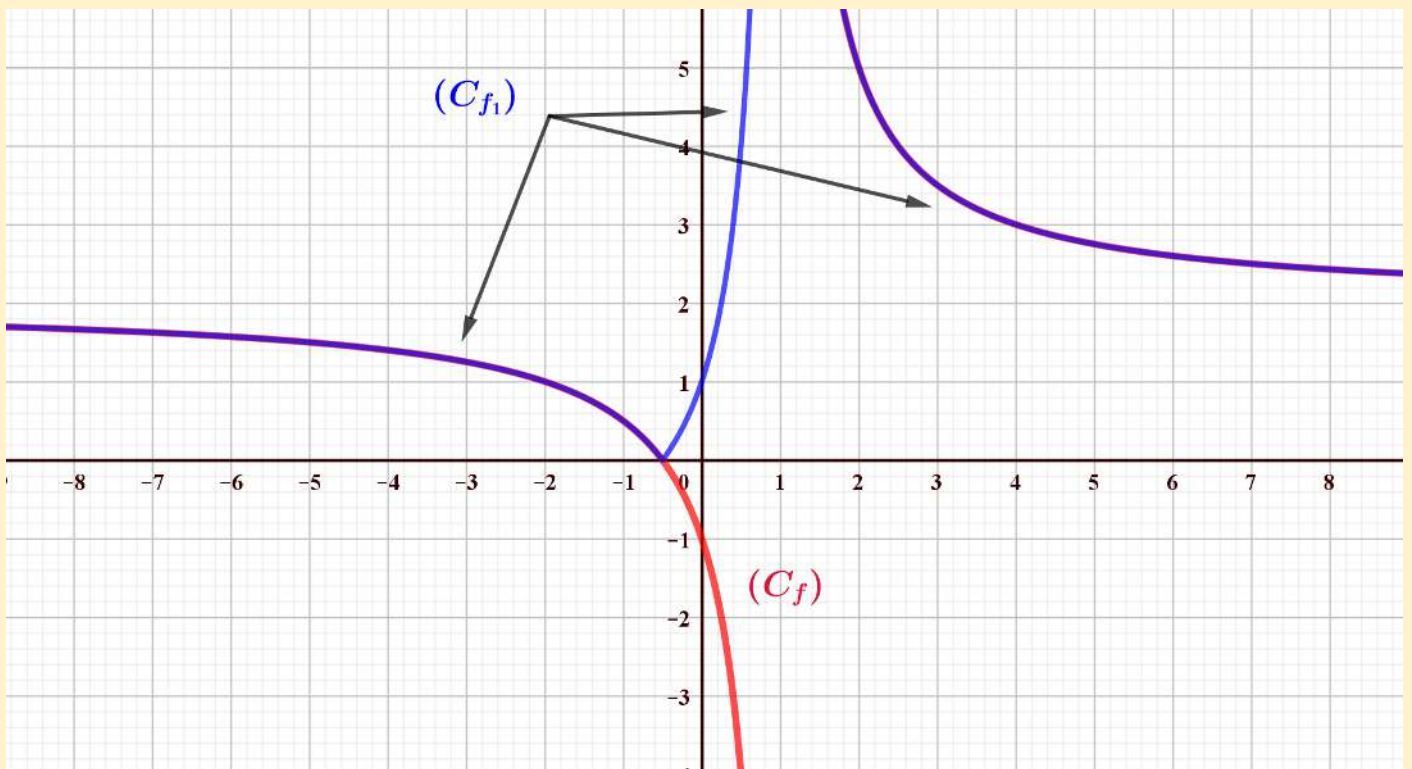
• إذا كان $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$ و منه يكون $f_2(x) = f(x)$ ؛ إذن (C_{f_2}) ينطبق على (C_f) .

• إذا كان $x \leq 0$ فإن : $|x| = -x$ و منه يكون $f_2(x) = f(-x)$ ؛ و منه (C_{f_2}) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور التناظر $(f_2$ دالة زوجية) .

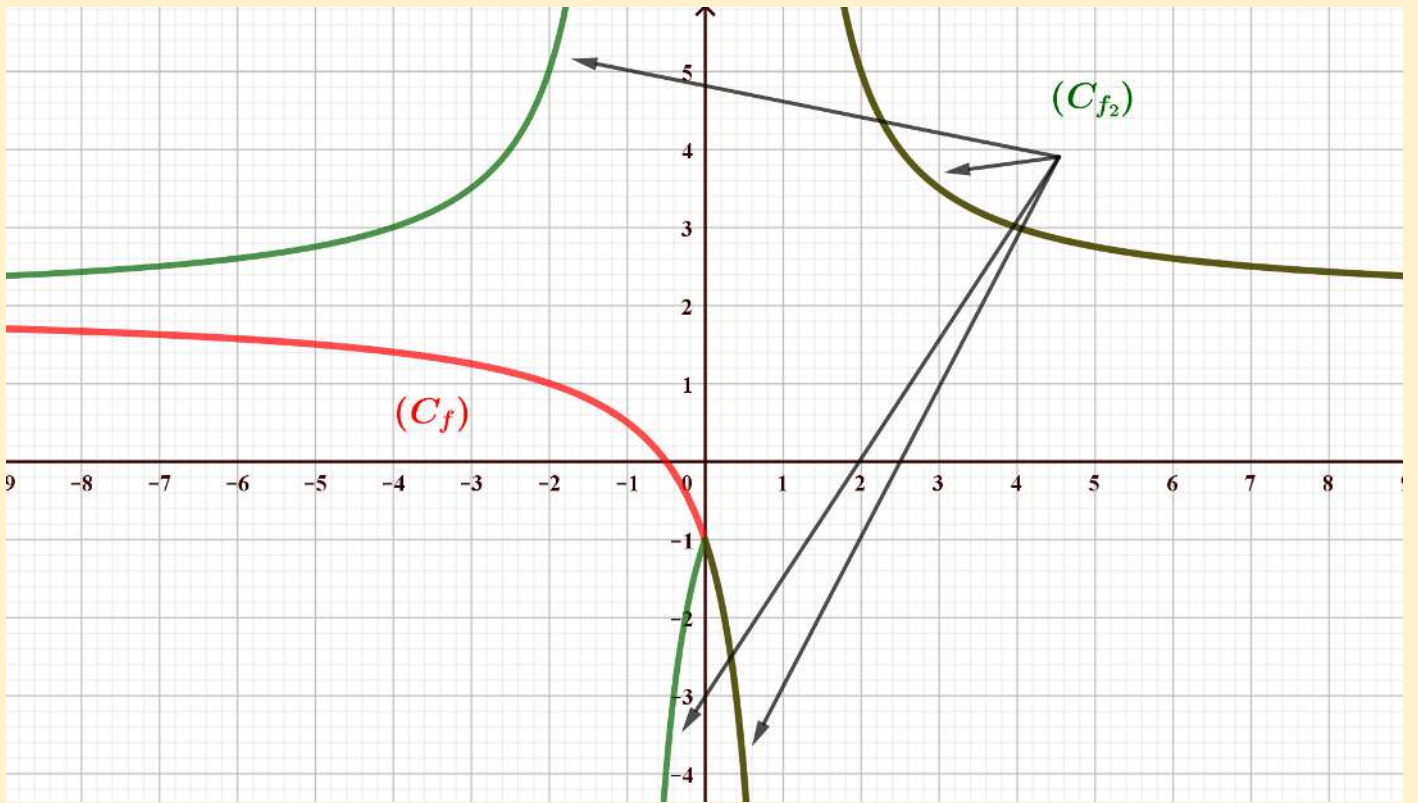




النمثيل البياني للدالة f_1 :



النمثيل البياني للدالة f_2 :



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ...

الأستاذ: عناس نبيل