

BEM2025

في الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد

مُلخص الرياضيات في اجتياز
شهادة التعليم المتوسط BEM2025

✓ لمزيد من المعلومات:

- فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد
- انستغرام: Prof_khaled_mathpro

زكاة العلم نشره
دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

الرياضيات ليست مُجرد ضرورة
نقطة وإنما ضرورة حياة

(1) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين (انتبه عددين طبيعيين!)

☺ الطريقة الثانية خوارزمية الفروق المتتالية <u>مثال</u> حساب الـ $PGCD(1053; 832)$ $1053 - 832 = 221$ $832 - 221 = 611$ $611 - 221 = 390$ $390 - 221 = 169$ $221 - 169 = 52$ $169 - 52 = 117$ $117 - 52 = 65$ $65 - 52 = 13$ $52 - 13 = 39$ $39 - 13 = 26$ $26 - 13 = 13$ فحسب الخوارزمية فإن $PGCD(13; 39) = 13$.	<u>حسابه</u> توجد ثلاث طرق أفضلها خوارزمية إقليدس. في كل طريقة نحسب الـ $PGCD$ للعددين 1053 و 832. ☺ الطريقة الأولى خوارزمية إقليدس (الأكثر استعمالاً) <u>مثال</u> $1053 = 832 \times 1 + 221$ $832 = 221 \times 3 + 169$ $221 = 169 \times 1 + 52$ $169 = 52 \times 3 + 13$ $52 = 13 \times 4 + 0$ آخر باق غير معدوم هو 13 ومنه $PGCD(1053; 832) = 13$
---	---

☺ الطريقة الثالثة إيجاد القواسم المشتركة

مثال نحسب الـ $PGCD(12; 21)$.

لدينا... $\sqrt{12} = 3,464$ ، فنقسم إذن العدد 12 على الأعداد 1 و 2 و 3 ونجد قواسم 12 هي: 1؛ 2؛ 3؛ 4؛ 6؛ 12.

لدينا... $\sqrt{21} = 4,582$ ، فنقسم إذن العدد 21 على الأعداد 1؛ 2؛ 3؛ 4 ونجد قواسم 21 هي: 1؛ 3؛ 7؛ 21.

القواسم المشتركة هي 1 و 3 إذن: $PGCD(12; 21) = 3$.

ملاحظة أحياناً في طريقة إقليدس أول مُساواة في القسمة الإقليدية يكون باقياً يساوي 0، فنقول أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو أصغرهما.

مثال: نحسب الـ $PGCD(21; 4200)$ باستعمال طريقة إقليدس، نجد: $4200 = 21 \times 200 + 0$. إذن:

$$PGCD(21; 4200) = 21$$

توظيفه يُستعمل القاسم المشترك الأكبر لعددين في اختزال كسر (تبسيط كسر)، فاخترال كسر $\frac{a}{b}$ ، نقسم a و b على

القاسم المشترك الأكبر لهما. مثال نريد اختزال الكسر $\frac{832}{1053}$

لدينا الـ $PGCD(1053; 832) = 13$ ، إذن $\frac{832}{1053} = \frac{832 \div 13}{1053 \div 13} = \frac{64}{81}$

ملاحظة توجد كسور لا يُمكن اختزالها، إذا كان الـ $PGCD(a; b) = 1$

مثال نريد اختزال الكسر $\frac{31}{61}$: لدينا الـ $PGCD(31; 61) = 1$ ، إذن الكسر $\frac{31}{61}$ غير قابل للاختزال.

(2) قواعد قابلية القسمة

يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 3.

مثال العدد 405 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه $(4 + 0 + 5)$ يُساوي 9 وهو مضاعف للعدد 3.

يقبل عدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9.

مثال العدد 2565 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $(2 + 5 + 6 + 5)$ هو مضاعف للعدد 9.

يقبل عدد القسمة على 2 إذا كان رقم أحاده عدد زوجي.

مثال العدد 124 يقبل القسمة على 2، لأن رقم أحاده 4

يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان رقم أحاده 0 أو 5

مثال العدد 186930 يقبل القسمة على 5 لأن رقم أحاده 0

يقبل عدد القسمة على 4 إذا كان العدد المُشكل من رقمي أحاده وعشراته من مضاعفات العدد 4.

مثال العدد 77952 يقبل القسمة على 4 لأن 52 من مضاعفات 4.

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

لا تُجامل في أمر يخص سعادتك ووقتك ..

لا تُجالس المُتذمر ولو لثانية ..

أمثلة 12576 قابل للقسمة على 2 لأن آخر أرقامه وهو 6 زوجي.

12576 قابل للقسمة على 3 لأن مجموع أرقامه يساوي 21 وهو قابل للقسمة على 3 إذن 12576 يقبل القسمة على 6.

(3) معرفة العددين الأوليان فيما بينهما

العددان الأوليان فيما بينهما هما كل عددين قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

كيف أعرف أن عددين غير أوليان فيما بينهما؟

الطريقة الثانية ممكنة إذا عرف للعددين قاسم مشترك يختلف عن 1 (استعمال قواعد قابلية القسمة) مثال 126 و 75 غير أوليان، لأنهما يقبلان قاسما مشتركا آخر هو العدد 3.	الطريقة الأولى ممكنة دوما (حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين) مثال 126 و 75 غير أوليان فيما بينهما لأن $PGCD(75; 126) = 3 \neq 1$
--	--

(4) قواعد الحساب على قوى العدد 10 (3 قواعد)

مثال $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ $\frac{10^6}{10^{-23}} = 10^{6-(-23)} = 10^{6+23} = 10^{29}$	مثال $(10^n)^m = 10^{n \times m}$ $(10^7)^3 = 10^{7 \times 3} = 10^{21}$	مثال $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ $10^4 \times 10^{-1} = 10^{4+(-1)} = 10^3$
---	---	--

(5) الكتابة العلمية لعدد عدد عشري A هي من الشكل $a \times 10^n$ حيث n عدد

صحيح نسبي و a عدد عشري برقم قبل الفاصلة غير معدوم (لا يساوي 0).

أمثلة $0,000085 = 8,5 \times 10^{-5}$ ؛ $14,07 = 1,407 \times 10^1$ ؛ $51000 = 5,1 \times 10^4$

تطبيق اكتب العددين A و B كتابة علمية، حيث $A = \frac{25 \times 10^{33} \times 5 \times 10^{-6}}{80 \times 10^{44} \times 5}$ ؛ $B = 0,00000026 \times 10^3$

$B = 0,00000026 \times 10^3 = 2,6 \times 10^{-4}$	$A = \frac{25 \times 5}{80 \times 5} \times \frac{10^{33} \times 10^{-6}}{10^{44}}$ $= 3,125 \times 10^{-18}$	حل مختصر
---	--	------------------------

(6) قواعد الحساب على القوى (5 قواعد)

مثال $8^3 \times 8^{-5} = 8^{3+(-5)} = 8^{-2}$ مثال $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{12^{-2}}{12^6} = 12^{-2-6} = 12^{-8}$ مثال $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\frac{-6^7}{3^7} = \left(\frac{-6}{3}\right)^7 = (-2)^7$	$a^n \times a^m = a^{n+m}$ مثال $(a^n)^m = a^{n \times m}$ $(7^{-3})^6 = 7^{-3 \times 6} = 7^{-18}$ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ مثال $5^4 \times 9^4 = (5 \times 9)^4 = 45^4$
---	---

(7) العلاقات الخاصة في الحساب على القوى (5 قواعد)

$\frac{a^n}{a^n} = 1$ مثال $\frac{12^{-60}}{12^{-60}} = 1$ ؛ $\frac{30^5}{30^5} = 1$	$a^n \times a^{-n} = 1$ مثال $3^9 \times 3^{-9} = 1$ $40^{-10} \times 40^{10} = 1$	$a^1 = a$ مثال $4^1 = 4$ $(-5)^1 = -5$	$a^0 = 1$ مثال $(-2)^0 = 1$ $(41)^0 = 1$
$(-1)^n = -1$ إذا كان n عددا فرديا فإن مثال $(-1)^{27} = -1$ ؛ $(-1)^3 = -1$	$(-1)^n = 1$ إذا كان n عددا زوجيا فإن مثال $(-1)^{20} = 1$ ؛ $(-1)^6 = 1$		

كلما ازداد الإنسان غباوة، كلما ازداد يقينا أنه أفضل من غيره في كل شيء، فلا تكن هذا الإنسان.

أطلب العلم ولا تكسل به * فما أبعد العلم عن أهل الكسل

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

جمع (أو طرح) كسرين

(أ) لهما نفس المقام لجمع (أو لطرح) كسرين لهما نفس المقام، نجمع البسطين ونحتفظ بنفس المقام. حيث a و b و c أعداد عشرية مثال 1: $\frac{5}{11} + \frac{23}{11} = \frac{5+23}{11} = \frac{28}{11}$ مثال 2: $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3-2}{7} = \frac{1}{7}$	
(ب) ليس لهما نفس المقام لجمع (أو لطرح) كسرين ليس لهما نفس المقام، نُوحِد المقامين وبعد ذلك ثم نجمع البسطين ونحتفظ بنفس المقام. أ. مقام أحدهما مُضاعف للآخر a و b و c و d أعداد عشرية ($c \neq 0$ و $d \neq 0$) مثال 1: $\frac{7}{6} + \frac{5}{13} = \frac{7 \times 13}{6 \times 13} + \frac{5 \times 6}{13 \times 6} = \frac{91}{78} + \frac{30}{78} = \frac{91+30}{78} = \frac{121}{78}$ مثال 2: $\frac{2}{31} + \frac{1}{8} = \frac{2 \times 8}{31 \times 8} + \frac{1 \times 31}{8 \times 31} = \frac{16}{248} + \frac{31}{248} = \frac{16+31}{248} = \frac{47}{248}$	ب. مقام أحدهما ليس مُضاعف للآخر a و b و c و d أعداد عشرية ($c \neq 0$ و $d \neq 0$) مثال 1: $\frac{17}{108} - \frac{2}{18} = \frac{17}{108} - \frac{2 \times 6}{18 \times 6} = \frac{17}{108} - \frac{12}{108} = \frac{17-12}{108} = \frac{5}{108}$ مثال 2: $\frac{7}{4} + \frac{10}{36} = \frac{7 \times 9}{4 \times 9} + \frac{10}{36} = \frac{63}{36} + \frac{10}{36} = \frac{63+10}{36} = \frac{73}{36}$

(9) العمليات على الأعداد الناطقة

تعريف العدد الناطق هو كل عدد كتابة العشرية منتهية أو غير منتهية دورية والتي يُمكن كتابتهما على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p و q عدنان صحيحان مع $q \neq 0$.	
طرح عددين ناطقين لهما نفس المقام " $c \neq 0$ " مع $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ مثال: $\frac{-1,2}{44} - \frac{0,5}{44} = \frac{-1,2-0,5}{44} = \frac{-1,7}{44}$	جمع عددين ناطقين لهما نفس المقام " $c \neq 0$ " نأخذ $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ مثال: $\frac{-1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5}$
طرح عددين ناطقين لهما نفس المقام (توحيد المقام) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \times d}{c \times d} - \frac{b \times c}{d \times c}$ حيث $c \neq 0$ و $d \neq 0$.	جمع عددين ناطقين ليس لهما نفس المقام (توحيد المقام) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d}{c \times d} + \frac{b \times c}{d \times c}$ حيث $c \neq 0$ و $d \neq 0$.

العلم أن تعرف أن الطماطم من الفاكهة والحكمة أن لا تضعها في سلة الفاكهة.
دعواكم للوالد بالرحمة والمغفرة
من فاته التعليم وقت شبابه * فكبر عليه أربعا لوفاته

قسمة عددين ناطقين الأستاذ هلال خالد BEM2025

" $c \neq 0$ و $d \neq 0$ و $b \neq 0$ "

(نضرب في مقلوب العدد) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

الناطق الثاني

$$\frac{3}{11} \div \frac{5}{9} = \frac{3}{11} \times \frac{9}{5} = \frac{3 \times 9}{11 \times 5} = \frac{27}{55} \quad \text{أمثلة}$$

$$\frac{25}{7} \div 6 = \frac{25}{7} \div \frac{6}{1} = \frac{25 \times 1}{7 \times 6} = \frac{25}{42}$$

ضرب عددين ناطقين

مع $d \neq 0$ و $b \neq 0$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

(البسط في البسط و...) $\frac{5}{11} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{11 \times 4} = \frac{15}{44}$ مثال

حذار $\frac{2}{7} \times \frac{13}{7} \neq \frac{2 \times 13}{7} = \frac{26}{7}$ مثال $\frac{a}{c} \times \frac{b}{c} \neq \frac{a \times b}{c}$

وإنما الصحيح $\frac{2}{7} \times \frac{13}{7} = \frac{2 \times 13}{7 \times 7} = \frac{26}{49}$

كل عدد نسبي k يُكتب على الشكل $\frac{k}{1}$ مثال $17 = \frac{17}{1}$

قواعد حساب أساسية جدا حيث a و b و c و d أعداد معلومة

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ حيث $c \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ مثال $\frac{3}{-2} = \frac{3}{-2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{-16}$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d}$ حيث $d \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ مثال $\frac{-6}{5} = \frac{-6}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{-42}{55}$
$\frac{13}{-5} = 13 \times \frac{2}{-5} = \frac{26}{-5}$ مثال $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ حيث $c \neq 0$ و $\frac{b}{c} \neq 0$	$\frac{a}{b} = a \times \frac{c}{c}$ حيث $c \neq 0$ و $\frac{b}{c} \neq 0$

أولوية الحساب في سلسلة عمليات

عند حساب سلسلة عمليات، يجب مراعاة ما يلي: 1. الأولوية لحساب القوى والعمليات داخل الأقواس بدءا بالأقواس الداخلية. 2. ثم للضرب والقسمة حسب الترتيب. 3. ثم للجمع والطرح حسب الترتيب. ملاحظة العمليات (الجمع، الطرح، الضرب والقسمة) هي على الأعداد الناطقة.	مثال $A = \left(\frac{27}{25} - \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right) \div 4$ $= \left(\frac{27}{25} - \frac{4^2}{5^2} \right) \div 4$ $= \left(\frac{27}{25} - \frac{16}{25} \right) \div 4$ $= \left(\frac{27-16}{25} \right) \div 4$ $= \frac{11}{25} \div 4 = \frac{11}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{11 \times 1}{25 \times 4} = \frac{11}{100}$
--	--

بين أن العدد A طبيعي حيث $A = \left[\left(\frac{4}{3} \right)^2 + 2 \right] \div \frac{2}{9}$

10 بعض أمثلة حل مشكلات بوظيف القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

في تقسيم مُحيط مُستطيل الشكل إلى قطع مُتقايسة ذات أكبر طول ضلع ممكن،

والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة يمثل طول القطعة الواحدة.

في تقسيم قطعة مُستطيلة الشكل إلى قطع مربعة الشكل مُتقايسة ذات أكبر طول ضلع ممكن،

والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة يمثل طول ضلع المربع الواحد.

في توزيع مُتناسب لعدد من نوعين مُختلفين من الزهور في أقل عدد ممكن من الباقات،

والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة عدد المزهريات.

في تثبيت أعمدة أو غرس شجيرات بحيث تكون المسافة بين كل عمودين أو شجيرتين مُتساوية وأكبر مل يمكن

والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة هو المسافة بين كل عمودين متتاليين أو شجيرتين متتاليتين.

إذا غَدَ السَّيْرُ ذُو عِزْمٍ تَأْتِي * لَهُ الْفَتْحُ وَلَوْ جَاوَزَ السَّبْعِينَ

على فائس بوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

على انستجرام: Prof_khaled_mathpro

زكاة العلم نشره

دعواكم للوالد بالرحمة والمغفرة

أهم ما يُراجع في: الحساب على الجذور الأستاذ هلال خالد BEM2025

تبسيط أو حساب عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على أحد الأشكال الآتية:

على الشكل $a\sqrt{b}$	على الشكل $c + a\sqrt{b}$	على شكل عدد ناطق
b معلوم b غير معلوم	b معلوم b غير معلوم	في أغلب الأحيان نوظف المتطابقة الشهيرة الثالثة $(a + b)(a - b) = (a)^2 - (b)^2$

وقبل تبسيط أو حساب أي عبارة تتضمن جذورا لابد لك من أهم شيء تقوم به وهو التمكن من القواعد الست الآتية:

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ <u>أمثلة</u> $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt{36 \times 7} = \sqrt{36} \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$	$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ <u>أمثلة</u> $\sqrt{11^2 \times 2} = 11\sqrt{2}$ $\sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$	$\sqrt{a^2} = a$ <u>أمثلة</u> $\sqrt{13^2} = 13$ $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ <u>مثال</u> $\sqrt{17} \times \sqrt{17} = 17$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ <u>أمثلة</u> $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \frac{7}{6}$	$(\sqrt{a})^2 = a$ <u>أمثلة</u> $(\sqrt{17})^2 = 17$ $\left(\sqrt{\left(\frac{7}{11}\right)}\right)^2 = \frac{7}{11}$

(1) أهم خطوتين في تبسيط عبارة تتضمن جذور:

- النشر إن وُجد ثم إنجاز عمليات الضرب والقسمة بين الجذور إن وجدت أولا؛ وهذا باستعمال أحد القواعد الواردة في الجدول أعلاه.
- التأكد بالآلة الحاسبة من وجود جذور تامة أي التي قيمته مضبوطة في حالة شكل التبسيط $c + a\sqrt{b}$.
- تبسيط ما تحت الجذر باستعمال أحد القاعدتين $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ أو $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(2) تبسيط العبارات التي تتضمن جذورا ينقسم إلى نوعين:

تبسيط عبارات لا تتضمن عمليات ضرب أو قسمة بين الجذور:

تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b معلوم (ما تحت الجذر معلوم من السؤال)

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{252} - 6\sqrt{28} + 2\sqrt{175}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ (العدد b معلوم ويُساوي 7).

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{252} - 6\sqrt{28} + 2\sqrt{175} \\
 &= \sqrt{36 \times 7} - 6\sqrt{4 \times 7} + 2\sqrt{25 \times 7} \\
 &= \sqrt{36} \times \sqrt{7} - 6\sqrt{4} \times \sqrt{7} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{7} \\
 &= 6\sqrt{7} - 12\sqrt{7} + 10\sqrt{7} = (6 - 12 + 10)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما تحت الجذر غير معلوم من السؤال)، ونميز حالتين:

(أ) العدد b غير معلوم ولكنه موجود في العبارة المراد تبسيطها (أصغر ما تحت الجذر)

مثال بسط العبارة $B = 11\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 2\sqrt{384}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ (العدد b يُساوي 6)

$$\begin{aligned}
 B &= 11\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 2\sqrt{384} \\
 &= 11\sqrt{6} - 6\sqrt{4 \times 6} + 2\sqrt{64 \times 6} \\
 &= 11\sqrt{6} - 6\sqrt{4} \times \sqrt{6} + 2\sqrt{64} \times \sqrt{6} \\
 &= 11\sqrt{6} - 12\sqrt{6} + 16\sqrt{6} = 15\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

مثال بسط العبارة $A = \sqrt{80} - 3\sqrt{45} + \sqrt{20}$ على الشكل $a\sqrt{b}$.

*تلاحظ أن الأعداد 20 و 45 و 80 تقبل القسمة على 5 أرقام أحادها 0 أو 5

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{80} - 3\sqrt{45} + \sqrt{20} \\ &= \sqrt{16 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{4 \times 5} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{9} \times \sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 - 9 + 2)\sqrt{5} = -3\sqrt{5} \end{aligned}$$

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{b}$ حيث b معلوم (ما تحت الجذر معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{486} + 5\sqrt{24} + \sqrt{36} + 3$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$

$B = -\sqrt{486} + 5\sqrt{24} + \sqrt{36} + 3$	$b = 6$
$= -\sqrt{81 \times 6} + 5\sqrt{4 \times 6} + 6 + 3$	كتابة ما بداخل على شكل جداء عددين أحدهما 6
$= -\sqrt{81} \times \sqrt{6} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{6} + 6 + 3$	كتابة جداء العددين على الشكل $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
$= -9\sqrt{6} + 10\sqrt{6} + 9$	
$= 9 + \sqrt{6}$	التبسيط

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما تحت الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = 4\sqrt{12} - \sqrt{108} - 4$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$ (قواعد قابلية القسمة)

$B = 4\sqrt{12} - \sqrt{108} - 4$	$b = 3$
$= 4\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{36 \times 3} - 4$	كتابة ما بداخل على شكل جداء عددين أحدهما 3 لأنهما يقبلان القسمة على 3 وناتجي القسمة مربعين تامين 4 و 36.
$= 4\sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{36} \times \sqrt{3} - 4$	تطبيق الخاصية $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
$= 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 4$	
$= 2\sqrt{3} - 4$	

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما بداخل الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{325} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{52}$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$ (b معلوم في العبارة)

$B = \sqrt{325} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{52}$	$b = 13$
$= \sqrt{25 \times 13} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{4 \times 13}$	كتابة ما بداخل على شكل جداء عددين أحدهم 13 b معلوم في العبارة يساوي 13.
$= \sqrt{25} \times \sqrt{13} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{4} \times \sqrt{13}$	تطبيق الخاصية $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
$= 5\sqrt{13} - \sqrt{13} - 1 + 12\sqrt{13}$	
$= 16\sqrt{13} - 1$	

ما دُمت تتعلم فأنت بخير، فالجهل رأس كل شر.

زكاة العلم نشره

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

(أ) إنجاز عمليات الضرب والقسمة التي بين الجذور بتطبيق القواعد السابقة.
(ب) فنحصل إما على عدد ناطق وإما على عبارة من الجذور لا تتضمن بينها عمليات القسمة والضرب.

وهي ثلاث أنواع:

(1) تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين: $(a + b)(c + d)$ أو $(a + b)(a - b)$.

(2) تبسيط عبارة من الشكل $(a + b)(c + d)$.

(3) تبسيط عبارة من الشكل $(a + b)(a - b)$ (المتطابقة الشهيرة الثالثة).

1. تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين $(a + b)(c + d)$ أو $(a + b)(a - b)$:

مثال بسط العبارة $G = \sqrt{8} \times \sqrt{2} + 6\sqrt{108} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} + \sqrt{144}$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$

$G = \sqrt{8} \times \sqrt{2} + \sqrt{108} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} + \sqrt{144}$	تطبيق الخاصيتان $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ و $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
$= \sqrt{8 \times 2} + \sqrt{36 \times 3} - \sqrt{\frac{24}{6}} + 12$	
$= 4 + \sqrt{36} \times \sqrt{3} - \sqrt{4} + 12$	$\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{16} = 4$
$= 4 + 6\sqrt{3} - 2 + 12 = 14 + 6\sqrt{3}$	

2. تبسيط عبارة من الشكل $(a + b)(c - d)$

مثال بسط العبارة $F = (\sqrt{7} - 2)(3 + \sqrt{7})$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$

$F = (\sqrt{7} - 2)(3 + \sqrt{7})$	
$= \sqrt{7} \times 3 + \sqrt{7} \times \sqrt{7} - 2 \times 3 - 2 \times \sqrt{7}$	النشر
$= 3\sqrt{7} + 7 - 6 - 2\sqrt{7}$	إنجاز عمليات الضرب
$= 1 + \sqrt{7}$	

3. تبسيط عبارة من الشكل $(a + b)(a - b)$ (تطبيق المتطابقة الشهيرة الثالثة)

مثال بين أن E عدد طبيعي حيث $E = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$

$E = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$	كتابة العبارة دون خطأ هي بداية الإجابة.. لا تستهن بهذا أبدا
$= (\sqrt{5})^2 - (2)^2$	توظيف المتطابقة الشهيرة $(a + b)(a - b) = (a)^2 - (b)^2$
$= 5 - 4 = 1$	

كتابة مقام نسبة عدد ناطق

طريقة لكتابة مقام نسبة $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ على شكل عدد ناطق، أولا نضع العدد a بين قوسين ثم نضرب بسط النسبة ومقامها في $\sqrt{b}$

أي: $\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{(a) \times \sqrt{b}}{c\sqrt{b} \times \sqrt{b}}$. **ملاحظة** وضع العدد a بين قوسين لأنه يمكن أن يكون عبارة عن عملية جمع أو طرح.

مثال 1 نكتب مقام النسبة $\frac{5}{\sqrt{7}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}} = \frac{(5) \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

مثال 2 نكتب مقام النسبة $\frac{6}{11\sqrt{3}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{6}{11\sqrt{3}} = \frac{6}{11\sqrt{3}} = \frac{(6) \times \sqrt{3}}{11\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{11 \times 3} = \frac{6\sqrt{3}}{33}$

مثال 3 نكتب مقام النسبة $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{13}}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{26}}{13}$

مثال 4 نكتب مقام النسبة $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{6}) \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+6}{6}$

مثال 5 نكتب مقام النسبة $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$ عددا ناطقا $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{8}) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{8} \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{4+\sqrt{6}}{4}$

BEM2025 الأستاذ هلال خالد

حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

1. **حل المعادلة $x^2 = b$ نُميز ثلاث حالات:**

الحالة الأولى: b عدد موجب	الحالة الثانية: b عدد يساوي صفر	الحالة الثالثة: b عدد سالب
للمعادلة $x^2 = b$ حلان هما: $x = \sqrt{b}$ أو $x = -\sqrt{b}$ مثال للمعادلة $x^2 = 81$ حلين هما: $x = \sqrt{81} = 9$ أو $x = -\sqrt{81} = -9$ مثال آخر للمعادلة $x^2 = 2$ حلين: $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$	للمعادلة $x^2 = 0$ في هذه الحالة حل واحد هو $x = 0$. مثال للمعادلة $x^2 = 0$ حل وحيد هو $x = 0$	ليس للمعادلة حل في هذه الحالة! مثال للمعادلة $x^2 = -16$ ليس لها حل، لأن $-16 < 0$

2. **حل معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $x^2 = b$**

مثال آخر حل المعادلة $\frac{x}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{9x}$ معناه $x \times 9x = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$ $9x^2 = 1$ أي $x^2 = \frac{1}{9}$ إذن $x = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ أو $x = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$	مثال حل المعادلة $x^2 + 4 = 20$ لدينا $x^2 + 4 = 20$ معناه $x^2 = 20 - 4$ $x^2 = 16$ أي إذن $x = \sqrt{16} = 4$ أو $x = -\sqrt{16} = -4$
--	---

للتطبيق حل المعادلة $(x+3)^2 - 36 = 0$

3. **حل مشكلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $x^2 = b$**

مثال آخر جُداء عدد طبيعي وضعفه يساوي 32 جد هذا العدد. نرسم لهذا العدد بـ x ، فيكون ضعفه $2x$ ونحل المعادلة $2x \times x = 32$	مثال قطعة أرض مُستطيلة الشكل، مساحتها $160m^2$. عرضها خمسي طولها. جد بُعدها. نرسم للطول بـ x ، فيكون العرض $\frac{2}{5}x$ ونحل المعادلة $\frac{2}{5}x \times x = 160$
--	---

بعض المربعات التامة

4، 9، 16، 25، 36، 49، 64، 81، 100، 121، 144، 169، 196، 225،

زكاة العلم نشره * دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

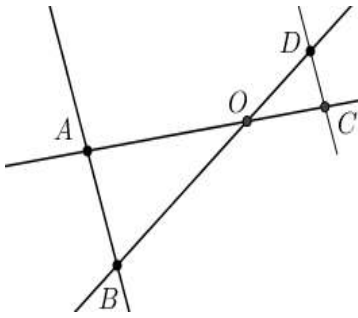
الإنضباط هو أن تشرح لعقلك أنك بحاجة إلى التوضيح بالملذات الفورية مقابل مكافآت أكبر في المستقبل.

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

أهم ما يُراجع في: خاصية طاليس وحساب المثلثات الأستاذ هلال خالد BEM2025

مثال في الشكل المُقابل $(AB) \parallel (DC)$ وحدة الطول الـ cm و $OD = 5$ ؛ $OB = 11$ ؛ $OC = 4$ احسب OA .



لدينا لنقط B و O و D والنقط A و O و C .
و $(AB) \parallel (DC)$ فحسب خاصية طاليس
$$\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$$

وبالتعويض $\frac{5}{11} = \frac{4}{OA}$ ومنه
$$OA = \frac{11 \times 4}{5} = 8,8 \text{ cm}$$

1) خاصية طاليس ← حساب طول

نأخذ الشكل المُقابل كمثل

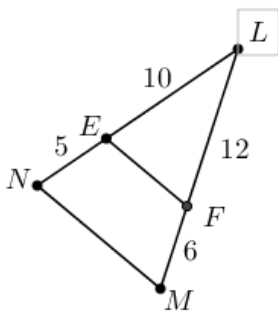
شروط تطبيقها (نأخذ المثال أمامنا)

1. استقامية النقط B و O و D والنقط A و O و C .

2. التوازي $(AB) \parallel (DC)$.

النتيجة تساوي النسب الثلاث مُحقق $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$
وهذه النسب أحسب بها الطول المطلوب منا.

مثال في الشكل المُقابل وحدة الطول الـ cm.



أثبت أن: $(MN) \parallel (EF)$.
لدينا $\frac{LE}{LN} = \frac{LF}{LM} = \frac{2}{3}$ والنقط L و E و N بنفس ترتيب
النقط L و F و M ، و L و E و N في استقامية وكذلك
النقط L و F و M فحسب خاصية طاليس العكسية (DC)
 $(AB) \parallel$

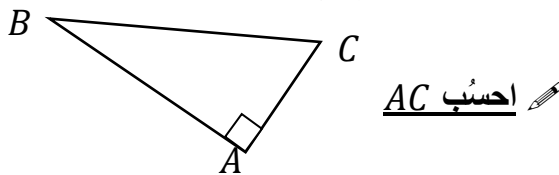
2) خاصية طاليس العكسية ← إثبات توازي

نأخذ الشكل المُقابل كمثل

الشروط: النقط L و E و N بنفس ترتيب النقط L و F و M ، والنقط L و E و N في استقامية وكذلك
النقط L و F و M .

و تساوى النسبتان $\frac{LE}{LN}$ و $\frac{LF}{LM}$ أي: $\frac{LE}{LN} = \frac{LF}{LM}$.
النتيجة: $(MN) \parallel (EF)$.

مثال مثلث قائم في A . $AB = 4 \text{ cm}$ و $AC = 3 \text{ cm}$.



احسب AC

لدينا ABC مثلث قائم في B ، إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ وبالتعويض $BC^2 = 4^2 + 3^2$ أي $BC^2 = 16 + 9$
أي $BC^2 = 25$ ومنه $BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$.

3) خاصية فيثاغورس ← حساب طول ضلع في مثلث قائم

ABC مثلث قائم في A ، إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن مُربع طول الوتر BC^2 (الضلع المُقابل للزاوية القائمة) يُساوي مجموع الطولين الآخرين $AC^2 + AB^2$ ونكتب:
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

4) الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس ← إثبات أن مثلث قائم

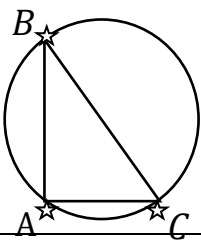
إذا كان في مثلث مربع طول ضلعه الأكبر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين، فهو قائم.
← تُستعمل لإثبات أن مثلث عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم

مثال مثلث EFG طول أضلاعه $EF = 13 \text{ cm}$ و $FG = 12 \text{ cm}$ و $EG = 5$ ، هو مثلث قائم

لأن: $EF^2 = 13^2 = 169$ و $FG^2 = 12^2 = 144$ و $EG^2 = 5^2 = 25$

فالمساواة التالية $EF^2 = EG^2 + FG^2$ ، فحسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس فالمثلث قائم.

5) الخاصية الثانية للدائرة المحيطة بالمثلث القائم ← إثبات أن مثلث قائم



مثال في الشكل الآتي دائرة و ABC مثلث، فنقول أن: ABC مثلث قائم في A لأن ضلعه $[BC]$ قطر للدائرة (C) ورأسه الثالث A ينتمي إلى (C)

نصيها

في مثلث ABC إذا كان الضلع $[AB]$ هو قطر لدائرة، و C نقطة من هذه الدائرة، فإن هذا المثلث قائم في C .

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

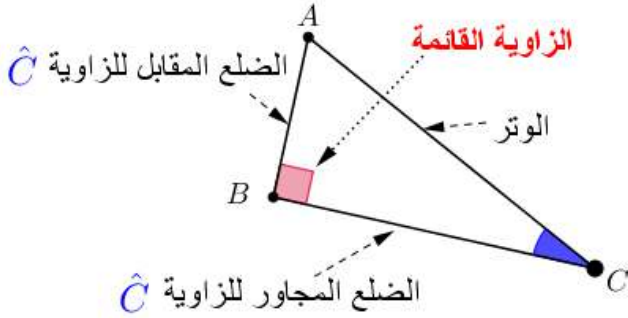
على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

النسب الثلاث: 1. جيب تمام زاوية حادة الـ $\cos$: $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية الحادة}}{\text{وتر المثلث القائم}} = \text{جيب تمام زاوية حادة}$

2. جيب زاوية حادة الـ $\sin$: $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية الحادة}}{\text{وتر المثلث القائم}} = \text{جيب زاوية حادة}$

3. ظل زاوية حادة الـ $\tan$: $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية الحادة}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية الحادة}} = \text{ظل زاوية حادة}$

كيف نكتب النسب الثلاث لزاوية حادة؟!



مثال

في المثلث القائم ABC نكتب نسب الزاوية الحادة $\widehat{ACB}$.

1. أولاً نكتب البيانات الموضحة على الشكل.

2. ثانياً القانون الموافق لكل نسبة من النسب الثلاث الآتية لها.

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} \quad \text{و} \quad \cos \widehat{ACB} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC} \quad \text{و}$$

توظيفها في

في حساب قيس زاوية في مثلث قائم. في حساب طول ضلع في مثلث قائم علم منه طول ضلع واحد.

متى أوظفها في حساب قيس زاوية أو طول بإحدى النسب؟!

حساب قيس زاوية	طول الوتر في المثلث القائم معلوم طوله	والمجاور لهذه الزاوية معلوم	نستعمل الـ $\cos$
حساب قيس زاوية	طول الوتر في المثلث القائم غير معلوم طوله	والمقابل لهذه الزاوية معلوم	نستعمل الـ $\sin$
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو الوتر في المثلث القائم	والمقابل للزاوية الحادة المعلوم قيسها	نستعمل الـ $\sin$
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو الوتر في المثلث القائم	والمجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها	نستعمل الـ $\cos$
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو المقابل للزاوية الحادة المعلوم قيسها في المثلث القائم	والمجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها	نستعمل الـ $\tan$
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو المجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها في المثلث القائم	والمقابل لهذه الزاوية الحادة المعلوم طوله	نستعمل الـ $\cos$
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو المجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها في المثلث القائم	والمقابل لهذه الزاوية الحادة المعلوم طوله	نستعمل الـ $\tan$

استعمال الآلة الحاسبة في حساب قيس زاوية علم جيبها أو ظلها أو جيب تمامها:

مثال نحسب قيس زاوية $\widehat{Z}$ جيبها 0,8 أي أن $\sin \widehat{Z} = 0,8$

المسلة 2ndf (الحاسبة ذات اللمسة 2ndf)	المسلة Shift (الحاسبة ذات اللمسة Shift)
2ndf sin 0,8 = 53,13....	Shift sin 0,8 = 53,13....

بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة 53°

بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة 53°

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

نأخذ كمثال الزاوية الحادة $\hat{C}$ في المثلث القائم ABC في A، فيكون لدينا: $\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}$ ؛ $(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = 1$.

فيما أستخدم هذه العلاقات؟

أستخدمها في حساب جيب تمام زاوية حادة الـ $\cos$ أو جيب زاوية حادة الـ $\sin$ أو ظل زاوية حادة الـ $\tan$ ومن ثم حساب قياس هذه الزاوية الحادة دون الحاجة لاستعمال إحدى نسبها المثلثية الثلاث.

متى أستخدمها؟

مثال

إذا علمت أن $\sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فاحسب $\cos \hat{C}$.

لدينا $\cos \hat{C} = \sqrt{1 - (\sin \hat{C})^2}$ وبالتعويض

$$\cos \hat{C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

نستخدم العلاقة:

$$\cos \hat{C} = \sqrt{1 - (\sin \hat{C})^2}$$

لحساب جيب تمام زاوية حادة

(الـ $\cos$) ومن ثم قياسها

مثال

احسب $\cos \hat{C}$ إذا علمت أن

$$\tan \hat{C} = \frac{3}{2} \text{ و } \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا $\cos \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\tan \hat{C}}$ وبالتعويض: $\cos \hat{C} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}}$

وبالحساب $\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

نستخدم هذه العلاقة أفضل

$$\cos \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\tan \hat{C}}$$

معلوم ظلها (الـ $\tan$) و جيبها (الـ $\sin$)

مثال إذا علمت أن $\cos \hat{C} = \frac{1}{2}$ فاحسب $\sin \hat{C}$

لدينا $\sin \hat{C} = \sqrt{1 - (\cos \hat{C})^2}$

وبالتعويض $\sin \hat{C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

وبالحساب $\sin \hat{C} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نستخدم العلاقة

$$\sin \hat{C} = \sqrt{1 - (\cos \hat{C})^2}$$

معلوم جيبها تماماً (الـ $\cos$)

لحساب جيب زاوية حادة

(الـ $\sin$) ومن ثم قياسها

مثال

إذا علمت أن $\tan \hat{C} = \frac{5}{4}$ و $\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ احسب $\sin \hat{C}$

لدينا $\sin \hat{C} = \tan \hat{C} \times \cos \hat{C}$

وبالتعويض $\sin \hat{C} = \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

وبالحساب $\sin \hat{C} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

نستخدم هذه العلاقة أفضل

$$\sin \hat{C} = \tan \hat{C} \times \cos \hat{C}$$

معلوم ظلها (الـ $\tan$) و جيبها تماماً (الـ $\cos$)

الأخلاق كالأرزاق الناس فيها بين غني وفقير

لا تحسبن العلم ينفع وحده ما لم يتوَجَّ ربُّه بخلاق

زكاة العلم نشره

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

(1) تبسيط ونشر عبارة جبرية

معرفة الأدوات الثمانية في فك الأقواس (النشر):

<u>قاعدة فك الأقواس المسبوقة بإشارة (+)</u> $+(a - b + c) = a - b + c$ أي إذا كانت الأقواس مسبوقة بإشارة زائد تتغير إشارة الحدود. <u>مثال</u> $+(x^2 - 4x + 3) = x^2 - 4x + 3$	<u>قاعدة فك الأقواس المسبوقة بإشارة (-)</u> $-(a - b + c) = -a + b - c$ أي إذا كانت الأقواس مسبوقة بإشارة ناقص تتغير إشارة الحدود. <u>مثال</u> $-(x^2 - 4x + 3) = -1x^2 + 4x - 3$
<u>نشر عبارة من الشكل $k \times (a - b)$</u> الخاصية التوزيعية على الطرح $k \times (a - b) = k \times a - b \times k$ <u>مثال</u> $2x(x - 1) = 2x \times x - 1 \times 2x = 2x^2 - 2x$	<u>نشر عبارة من الشكل $k \times (a + b)$</u> الخاصية التوزيعية على الجمع $k \times (a + b) = k \times a + b \times k$ <u>مثال</u> $x \times (4x + 4) = x \times 4x + 4 \times x = 4x^2 + 4x$
<u>نشر عبارة من الشكل $(a + b)(a - b)$</u> المُتطابقة الشهيرة الثالثة (فرق عديدين في مجموعهما) $(a + b)(a - b) = (a)^2 - (b)^2$ <u>مثال</u> $(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$	<u>نشر عبارة من الشكل $(a + b)(c - d)$</u> $(a + b)(c - d) = a \times c - a \times d + b \times c - b \times d$ <u>مثال</u> $(x - 2)(4x + 4) = x \times 4x + 4 \times x - 2 \times 4x + 4 \times (-2) = 4x^2 + 4x - 8x - 8 = 4x^2 - 4x - 8$
<u>نشر عبارة من الشكل $(a - b)^2$</u> المُتطابقة الشهيرة الثانية (مربع فرق عديدين) $(a - b)^2 = (a)^2 - 2 \times a \times b + (b)^2$ <u>مثال</u> $(3x - 6)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 6 + (6)^2 = 9x^2 - 36x + 36$	<u>نشر عبارة من الشكل $(a + b)^2$</u> المُتطابقة الشهيرة الأولى (مربع مجموع عديدين) $(a + b)^2 = (a)^2 + 2 \times a \times b + (b)^2$ <u>مثال</u> $(5x + 3)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + (3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$

مثال شامل بين أن: $A = -(6x - 5) + (x - 2)(4x + 4) - 2x(x - 1) + (3x - 6)^2 = 11x^2 - 44x + 33$

(2) حل مُتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد من الدرجة الأولى

يتم حل كل مُتراجحة بنفس خطوات حل مُعادلة فقط في الخطوة ما قبل الأخيرة نميز حالتين:

مثلا حل المُتراجحة $ax + b \leq cx + d$ يُؤول إلى حل المُتراجحة $a'x \leq b'$ ($a' \neq 0$)

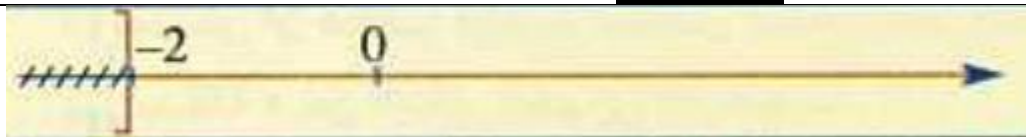
إذا كان a' عدد موجب فإن $x \leq \frac{b'}{a'}$ (لا يتغير اتجاه المُتباينة $a'x \leq b'$).

مثال نحل المُتراجحة $5x - 3 \leq 2x + 1$ يُؤول إلى حل $3x \leq 4$ (3 عدد موجب) ومنه $x \leq \frac{4}{3}$

إذا كان a' عدد سالب فإن $x \geq \frac{b'}{a'}$ (يتغير اتجاه المُتباينة $a'x \leq b'$).

مثال حل المُتراجحة $6x - 3 < 7x - 1$ يُؤول إلى حل $-x < 2$ (-1 عدد سالب) ومنه $x > -2$.

التمثيل البياني



تمثيل الحلول $x > -2$
(الجزء غير المُشطب)
أي الحلول هي كل قيم x الأكبر تماما من -2.

نقصد بتحليل عبارة جبرية كتابتها على شكل مجموع جُداءين أو فرق جُداءين في هذا المستوى.

1. التحليل باستعمال العامل المشترك

العامل المشترك ظاهر	العامل المشترك ظاهر
<u>مثال</u> $G = (8x - 3)(5x - 3) - 5x + 3$ نعلم أن $-5x + 3 = -(5x - 3)$ وبالتعويض $G = (8x - 3)(5x - 3) - (5x - 3)$ $G = (5x - 3)[(8x - 3) - 1]$ $G = (5x - 3)[8x - 4]$	<u>مثال</u> $B = (2x + 1)(-3x + 1) - (2x + 1)(x - 1)$ $= (2x + 1)[(-3x + 1) - (x - 1)]$ $= (2x + 1)(-3x + 1 - x + 1)$ $= (2x + 1)(-4x + 2)$
2. التحليل باستعمال المتطابقة الشهيرة الثالثة	
المتطابقة $(a)^2 - (b)^2 = (a + b)(a - b)$ غير ظاهرة	المتطابقة $(a)^2 - (b)^2 = (a + b)(a - b)$ ظاهرة
<u>مثال</u> $16 = (4)^2 \quad F = (2x - 1)^2 - 16$ وبالتعويض $F = (2x - 1)^2 - (4)^2$ $= (2x - 1 + 4)(2x - 1 - 4)$ أي $= (2x + 3)(2x - 5)$ ونجد	<u>مثال</u> $E = (3x - 3)^2 - (x + 1)^2$ $= (3x - 3 + x + 1)(3x - 3 - (x + 1))$ $= (4x - 2)(2x - 3 - x - 1)$ $= (4x - 2)(x - 4)$
3. التحليل باستعمال المتطابقتين الأولى والثانية	
$(a)^2 - 2 \times a \times b + (b)^2 = (a - b)^2$ ؛ $(a)^2 + 2 \times a \times b + (b)^2 = (a + b)^2$	
<u>مثال</u> $25x^2 + 10\sqrt{7}x + 7 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$ $= (5x + \sqrt{7})^2$	<u>مثال</u> $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2$ $= (3x + 1)^2$

4) حل معادلة من الشكل $ax + b = cx + d$:

☺ كل معادلة من الشكل $ax + b = cx + d$ يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $a'x = b'$

مثال حل المعادلة $3x - 7 = x + 1$ يؤول إلى حل المعادلة $2x = 8$ ومنه $x = 4$.

5) حل معادلة جُداء معدوم $(ax + b)(cx + d) = 0$ حيث a و b و c و d أعداد معلومة

يؤول إلى حل مُعادلتين من الدرجة الأولى $ax + b = 0$ أو $cx + d = 0$

وحلي المُعادلة هما $x = -\frac{b}{a}$ أو $x = -\frac{d}{c}$.

مثال حل المُعادلة $(x - 6)(2x + 14) = 0$

لدينا $(x - 6)(2x - 14) = 0$

معناه $2x + 14 = 0$ أو $x - 6 = 0$ ومنه $x = -7$ أو $x = 6$

ومنه حلا المُعادلة هما: -7 و 6 .

درب الكسالى نعيم في مسالكه

أما الطموح فتُدَمي دونه المُقل

من أراد النجاح في هذه الحياة فعليه التغلب على أسباب الفشل الستة وهي: النوم، التراخي، الخوف، الغضب، الكسل والمُماظة.

نُعوّض المتغير (مثلا x) بقيمته في العبارة ثم نُكْمِل الحساب بتطبيق أولوية الحساب

مثال نحسب قيمة العبارة $B = (x - 5)^2 - (3x + 1)^2$ من أجل $x = 2$.
بالتعويض

$$B = (2 - 5)^2 - (3 \times 2 + 1)^2 \\ = (-3)^2 - (6 + 1)^2 = 9 - (7)^2 = 9 - 49 = -40$$

(7) تربيض مُشكل

1. قراءة مُعمقة لنص المُشكلة.
2. اختيار المجهول المناسب.
3. صياغة مُعادلة أو مترابحة أو معادلة من الشكل $x^2 = b$
4. الحل (إيجاد المجهول أو المجهولين في حالة جملة معادلتين).
5. التحقق من الحل.
6. الإجابة عن السؤال.

أمثلة عن أنواع تربيض مُشكل

تربيض مُشكل يؤول حله إلى حل مُعادلة من الدرجة الأولى مجموع أوزان ثلاث إخوة فاطمة ومنير و سليم هو $178kg$ تزن فاطمة ثلاثة أرباع وزن منير، ويزيد وزن سليم بـ $13kg$ عن وزن منير. ☺ جد وزن كل واحد من الأخوة.	تربيض مُشكل يؤول حله إلى حل المُعادلة $x^2 = b$ ورث أحمد ومُصطفى قطعة أرض مساحتها 486 متر مربع. طولها يساوي ثلاثة أضعاف عرضها. ☺ جد عرضها وطولها.
مُشكل يؤول حله إلى حل مُعادلة جُداء معدوم قطعتي أرض إحدهما مُستطيلة الشكل بُعدها $x + 3$ و $2x + 1$ والأخرى مُربعة الشكل بُعدها $2x + 1$. إذا علمت أن فرق مساحتيهما معدوم دون استعمال النشر والتبسيط. ☺ جد أبعادهما ($x \geq 0$).	مُشكل يؤول حله إلى حل مترابحة من الدرجة الأولى يقترح صاحب قاعة مسرح على زبائنه خيارين: الخيار الأول يُسدّد الزبون $400DA$ لمشاهدة مسرحية واحدة. الخيار الثاني يُسدّد الزبون $150DA$ لمشاهدة مسرحية واحدة مع اشتراك سنوي قيمته $2500DA$. ☺ متى يكون الخيار الثاني أفضل من الخيار الأول؟
مُشكل يؤول حله إلى حل جملة مُعادلتين في مطعم دفعت عائلة عمر $2240DA$ مقابل ثلاث وجبات للكبار ووجبة واحدة للصغار، أما عائلة علي فقد دفعت $1880DA$ مقابل وجبتين للأطفال. ☺ جد ثمن وجبة الكبار و ثمن وجبة الصغار.	

انتبه

المُعادلة من الشكل $(ax + b) + (cx + d) = 0$ أو $(ax + b) - (cx + d) = 0$ ليست مُعادلة جداء معدوم وإنما معادلة من الدرجة الأولى.
مثال بحل المُعادلة $(-4x + 1) - (x + 6) = 0$.

تعلّم القواعد باحتراف ثم تجاوزها بفن

البريد الإلكتروني: khaledhellal1993@gmail.com

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

1. إنشاء نقطة صورة نقطة بانسحاب شعاعه معلوم (أكتفي بذكر حالتين من ثلاث هما الأهم)

المطلوب	المقصود حسب تعريف الانسحاب	الإنشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متميزة وليست في استقامية. القول أن C صورة النقطة D بالانسحاب الذي يُحول A إلى B (أي أنشئ C حيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)	الرابعي ABCD متوازي أضلاع.	
نعتبر S و H نقطتان متميزتان أنشئ R حيث $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{HR}$	يعني أن H منتصف $[SR]$	

2. إنشاء نقطة صورة نقطة بانسحاب باستعمال قاعدة متوازي اضلاع (مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ)

المطلوب	المقصود حسب قاعدة متوازي اضلاع	الإنشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متميزة ليست في استقامية. أنشئ C حيث $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	فالرابعي ABCD متوازي اضلاع.	

3. إثبات ما تُساويه مجاميع شعاعية علاقة شال (مجموع شعاعين نهاية الأول هي بداية الثاني)

الاثبات دون وجود شكل هندسي مُنجز لدينا $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (حسب علاقة شال) (1) و $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN}$ (حسب علاقة شال) (2) من (1) و (2) نستنتج أنه بالفعل $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$ الاثبات بوجود شكل هندسي مُنجز (نوظف علاقة شال و قاعدة متوازي اضلاع وخواص متوازي اضلاع ومنتصف قطعة مُستقيم) أنشئ $\overrightarrow{RI} - \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{RM}$ نعلم أن $\overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{RN}$ (حسب علاقة شال) (1) و أن $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{IS}$ و $\overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IS} = \overrightarrow{RS}$ (2) من (1) و (2) ينتج $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM}$ (حسب قاعدة متوازي اضلاع)	المطلوب مثال أثبت أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$ الشكل الرابعي SMNR متوازي اضلاع نقطة تقاطع قطريه
--	--

4. حساب مُركبتي شعاعين

في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقطتان A و B

حيث $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$. فمركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ونكتب $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

مثال ثان (أوظف حساب مُركبتي شعاع في إثبات أن رابعي هو متوازي اضلاع) نعتبر النقط $A(-2; 2)$ و $B(2; 3)$ و $C(2; -1)$ و $D(-2; -2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. هل الرابعي ABCD متوازي اضلاع؟ لدينا $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ -1 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ومنه الرابعي ABCD متوازي اضلاع.	مثال أول (حساب مباشر بحساب المركبتين) نعتبر النقطتين $(5; -6)$ و $B(-1; 2)$ من مُستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس. احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$. بعد أن نكتب القانون الذي حفظناه، لابد أن نقوم بهذا العمل على النقطتين $A(5; -6)$ و $B(-1; 2)$ x_A y_A و x_B y_B لدينا $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ وبالتعويض $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - 5 \\ 2 - (-6) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$
---	---

يقول أحد أشهر جراحي العظام في العالم: أن أكبر نقطة تحوّل في حياتي هي منعت عني أمني التلفاز والهاتف وأجبرتني على القراءة.

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد • على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

5. حساب المسافة بين نقطتين في معلم للمستوي الأستاذ هلال خالد BEM2025

المسافة بين نقطتين A و B في معلم للمستوي م.م. تُحسب بهذا القانون $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مثال ثان (توظيفه مثلا لمعرفة أن مثلث هو متساوي الساقين)

($\vec{0}; \vec{I}; \vec{J}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

1) نعتبر هذه النقط ($A(2; -1)$ و $B(-2; 3)$ و $C(-4; -3)$).

2) احسب AC واستنتج نوع ABC علما أن $BC = 2\sqrt{10}$

لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

ولدينا $C(-4; -3)$ و $A(2; -1)$
 $x_B \ y_B$ و $x_A \ y_A$

وبالتعويض $AC = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-3 - (-1))^2}$

إذن $AC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

نوع المثلث ABC مثلث متساوي الساقين لأن:

$$AC = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10} = BC$$

مثال أول (حساب مباشر)

نعتبر $A(5; -6)$ و $B(-1; 2)$ نقطتان من م.م.

احسب المسافة بين النقطتين A و B

لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا $B(-1; 2)$ و $A(5; -6)$

$x_B \ y_B$ و $x_A \ y_A$

وبالتعويض

$$AB = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (2 - (-6))^2}$$

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = 10$$

5. حساب إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

6. نعتبر نقطتان C و D من معلم متعامد ومتجانس للمستوي حيث $C(x_C; y_C)$ و $D(x_D; y_D)$ ، القول أن

M منتصف $[DC]$ فإحداثياها هما: $M(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2})$

مثال ثان (حساب إحداثيتي مركز تناظر رباعي أو مركز دائرة محيطية بمثلث قائم)

نعتبر النقط $A(-2; 2)$ و $B(2; 3)$ و $C(2; -1)$

و $D(-2; -2)$ في المستوي المنسوب إلى م.م.

احسب إحداثيتي N مركز تناظر متوازي الأضلاع $ABCD$.

لدينا N مركز تناظر متوازي الأضلاع $ABCD$ ، إذن N منتصف

قطراه $[AC]$ و $[BD]$ (قطرا متوازي أضلاع متناصفان).

لدينا $N(\frac{x_C + x_A}{2}; \frac{y_C + y_A}{2})$ ولدينا $C(2; -1)$ و $A(-2; 2)$

$x_A \ y_A$ و $x_C \ y_C$

وبالتعويض $N(\frac{-2+2}{2}; \frac{2+(-1)}{2})$ ، إذن $N(2; -2)$

مثال أول (حساب مباشر لأن قطعة المستقيم المراد حساب منتصفها معروفة)

نعتبر C و D نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد

ومتجانس، حيث $C(5; -6)$ و $D(-1; 2)$

احسب إحداثيتي النقطة M منتصف $[DC]$

لدينا $M(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2})$

ولدينا $C(5; -6)$ و $D(-1; 2)$

$x_D \ y_D$ و $x_C \ y_C$

وبالتعويض $M(\frac{5+(-1)}{2}; \frac{(-6)+2}{2})$

إذن $M(2; -2)$

7. تساوي شعاعان

☺ نعتبر الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ حيث أن $\vec{U}(\frac{x}{y})$ و $\vec{V}(\frac{x'}{y'})$ مركبتاهما على الترتيب أي $\vec{U}(\frac{x}{y})$ و $\vec{V}(\frac{x'}{y'})$

✓ فالقول أنهما متساويان $\vec{U} = \vec{V}$ يعني أن $x = x'$ و $y = y'$ (أي أن مركبتاهما متساويتان).

مثال ثان (توظيف تساوي شعاعين في حساب إحداثيتي نقطة)

($\vec{0}; \vec{I}; \vec{J}$) م.م. للمستوي.

نعتبر هذه النقط $A(1; -3)$ ، $B(-5; 2)$ ، $D(-2; 1)$.

احسب إحداثيتي C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$.

إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، إذن: $\vec{AB} = \vec{DC}$

لدينا $\vec{AB}(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}) = \vec{AB}(\frac{-5-1}{2-(-3)}) = \vec{AB}(\frac{-6}{5})$

و $\vec{DC}(\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}) = \vec{DC}(\frac{x_C - (-2)}{y_C - 1}) = \vec{DC}(\frac{x_C + 2}{y_C - 1})$

إذن نحل المعادلتين $x_C + 2 = -6$ و $y_C - 1 = 5$

فنجد $x_C = -8$ و $y_C = 6$

مثال أول (حساب مباشر)

نعتبر النقط $A(-2; 2)$ و $B(2; 3)$ و $C(2; -1)$

و $D(-2; -2)$ في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس.

هل الرباعي الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{DC}$ متساويان؟

لدينا $\vec{AB}(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}) = \vec{AB}(\frac{2-(-2)}{3-2}) = \vec{AB}(\frac{4}{1})$

و $\vec{DC}(\frac{x_C - x_D}{y_C - y_D}) = \vec{DC}(\frac{2-(-2)}{-1-(-2)}) = \vec{DC}(\frac{4}{1})$

إذن $\vec{AB} = \vec{DC}$ (أي أن الشعاعان متساويان)

زكاة العلم نشره * دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

• على فيسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد • على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

7. حساب إحداثيتي إحدى طرفي قطعة مستقيم غلم منتصفها الأستاذ هلال خالد BEM2025

ولدينا $A(0; -3)$ و $I(-1; 2)$ و x_I, y_I و x_A, y_A و x_B, y_B و $2 = \frac{-3+y_B}{2}$; $-1 = \frac{0+x_B}{2}$ وبعد حل المعادلتين نجد: $x_B = -2$ و $y_B = 7$ إذن $B(-2; 7)$	نعتبر A و I نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $A(0; -3)$ و I منتصف $[AB]$ بحيث $I(-1; 2)$. احسب إحداثيتي النقطة B : لدينا $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$; $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$
---	--

8. إثبات انتماء نقطة لدائرة مُحيطَة بمثلث قائم

نحسب المسافة بين هذه النقطة ومركز الدائرة المُحيطة بهذا المثلث فإذا كانت تُساوي طول نصف قطر هذه الدائرة فإن هذه النقطة تنتمي بالفعل إلى هذه الدائرة.

9. مُتوازي الأضلاع

1. ضلعين منه متقابلان متقايسان حاملهما متوازيان. مثلا: $AB = DC$ و $(AB) // (DC)$ التعبير الشعاعي	يكون رباعي ABCD متوازي أضلاع إذا تحققت على الأقل واحدة من الستة (6) المقابلة
✓ حسب تعريف الانسحاب $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AB}$ شعاعه D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية	
✓ حسب قاعدة متوازي أضلاع C نقطة بحيث $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية	
2. قُطراه متناصفان ($[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف نسميه مثلا O). التعبير الشعاعي $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ بحيث A ، B ، C و D و O متمايزة ليست في استقامية	
3. زاويتان متتاليتان منه متكاملتان. مثلا: $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$.	
4. زاويتان مُتقابلتان مُتقايسان. مثلا: $\hat{A} = \hat{C}$.	
5. كل ضلعان متقابلان حاملهما متوازيان. أي: $(AB) // (DC)$ و $(AD) // (BC)$.	
6. كل ضلعان متقابلان متقايسان. أي: $AB = DC$ و $AD = BC$.	

10. مُتوازيات الأضلاع الخاصة

مُستطيل	ضلعان مُتتاليان منه حاملهما مُتعامدان. مثلا: $(AB) \perp (BC)$. أو قُطراه مُتقايسان أي $AC = BD$
مُعين	ضلعان مُتتاليان منه متقايسان. مثلا: $AB = BC$ أو قُطراه مُتعامدان أي $(AC) \perp (BD)$.
مُربع	ضلعان مُتتاليان منه متقايسان حاملهما مُتعامدان. مثلا: $AB = BC$ و $(AB) \perp (BC)$. أو قُطراه مُتقايسان مُتعامدان أي $AC = BD$ و $(AC) \perp (BD)$

متوازي أضلاع
ABCD

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

زكاة العلم نشره

ترجو النجاة من لم تسلك طريقته * إن السفينة لا تجري على اليبس
العلم مغرس كل فخر فافتخر * واحذر يفوتك فخر ذاك المغرس

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد • على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

1. التناسبية (أ) العلاقة الأولى: $y = \frac{p}{100} \times x$

حساب مقدار y معبر عنه بنسبة $P\%$ معلومة مأخوذة من مقدار آخر معلوم x : $y = \frac{p}{100} \times x$.

مثال سعر معطف هو 10500 دج جد ثمن سروال علما أنه ثمنه هو 35% من سعر المعطف. حل: $y = \frac{35}{100} \times 10500 = 3675$	مثال آخر عند تاجر سعر حذاء هو 4500 دج و ثمن معطف هو 140% من سعر هذا الحذاء. فجد ثمن المعطف. حل: $y = \frac{140}{100} \times 4500 = 6300$
حساب مقدار x مأخوذ منه سعر لمقدار y ونسبته ($P\%$) معلومة: $y = \frac{p}{100} \times x$ (تعويض y و p ثم حل مُعادلة) أو التعويض مباشرة في العلاقة التالية $x = \frac{100}{p} \times y$	
مثال سعر ساعة يد هو 6500 دج وهو ما يمثل ما نسبته 20% من ثمن جهاز حاسوب. جد ثمن الحاسوب. حل: $x = \frac{100}{20} \times 6500 = 32500$	مثال آخر سعر حضور ثلاثة عروض مسرحية هو 8000 دج و هو ما يمثل ما نسبته 250% من ثمن عرض مسرحي واحد. فجد سعر حضوره . حل: $x = \frac{100}{250} \times 8000 = 3200$

(ب) العلاقات الثانية والثالثة والرابعة

ملاحظة كل علاقة من العلاقاتين بها أربعة مجاهيل يُطلب حساب أحدها في كل تمرين.	$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$ $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$ $y' = \frac{p}{100} x$	y هو المقدار الجديد (بعد التخفيض، بعد الزيادة بعد الارتفاع...) x هو المقدار الأصلي (قبل التخفيض، قبل الارتفاع، قبل الزيادة...) $1 - \frac{p}{100}$ معامل الدالة الخطية في حالة تخفيض النسبة المئوية للتخفيض أو الزيادة p
y' هو المقدار المُخفّض أو المقدار المُرتفع		

المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$ مثال تلفاز بعد ارتفاع سعره بنسبة 20% هو 45000 دج. احسب سعر التلفاز قبل الارتفاع. حل مُختصر 37500 دج	تخفيض (نسبة الزيادة معلومة) زيادة (نسبة التخفيض معلومة)	حساب المقدار الأصلي (حل مُعادلة)
المقدار المرتفع معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100} x$ مثال نسبة ارتفاع أسعار ملابس في محل هي 20%. احسب سعر معطف زاد ثمنه بـ 3000 دج؟ حل مُختصر 15000 دج		
المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$ مثال سعر هاتف نقال بعد تخفيض ثمنه بنسبة 30% هو 35000 دج. احسب سعر الهاتف قبل التخفيض. حل مُختصر 50000 دج		
المقدار المُنخفض معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100} x$ مثال نسبة تخفيض في محل لبيع الأثاث المنزلي 15%. ما هو سعر ثلاثة خُفض ثمنها بـ 1200 دج؟ حل مُختصر 8000 دج		

إن صغير القوم إن كان عالما .. كبيرا إذا رُدَّت إليه المحافل

أكبر خوف في العالم هو الخوف من آراء الآخرين فلا تكن سجين الآراء غير المُحفزة	زكاة العلم نشره دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة
---	--

أستعمل هذا القانون $y = \left(1 + \frac{p}{10}\right)x$

نسبة الارتفاع أو الزيادة معلومة

حساب المقدار
الجديد
(تعويض x فقط)

مثال
ارتفاع مستوى ماء سد الذي هو 50m بنسبة 5% بعد سقوط الأمطار.
احسب ارتفاعه الجديد. حل مختصر 52,5m.

أستعمل هذا القانون $y = \left(1 - \frac{p}{10}\right)x$

نسبة التخفيض معلومة

مثال
سعر معطف قبل تخفيض ثمنه بنسبة 60% هو 12000 دج.
احسب سعره بعد التخفيض. حل مختصر 4800 دج

حساب المقدار المنخفض أو المقدار المرتفع

مثال أول سعر معطف 12000 دج ارتفع ثمنه بنسبة 15%. فاحسب سعره المرتفع؟ حل مختصر $y' = 180$
مثال ثان سعر حذاء 8000 دج انخفض ثمنه بنسبة 5%. فاحسب سعره المنخفض؟ حل مختصر $y' = 400$

ج) العلاقة الخامسة

إذا ارتفع مقدار ب $p\%$ ثم انخفض ب $t\%$ ثم ارتفع ب $m\%$ ثم انخفض ب $s\%$ ثم انخفض ب $k\%$ وهكذا دواليك...

فإننا نحسب المقدار الجديد y بالعلاقة $y = \left(1 + \frac{p}{10}\right)\left(1 - \frac{t}{10}\right)\left(1 + \frac{m}{10}\right)\left(1 - \frac{s}{10}\right)\left(1 - \frac{k}{10}\right)x$

مثال

ثمن بدلة رياضية 7500 دج، ارتفع ثمنها ب 10% ثم انخفض ب 10%. كم أصبح ثمنها؟ حل مختصر 7425 دج
ملاحظة ارتفاع مقدار بنسبة ثم تخفيضه بنفس النسبة لايعني عودته لثمنه الأول -والعكس صحيح-

2. التعبير عن وضعية تناسبية بدالة الخطية

مدلولها	العلاقة
المقدار الجديد z مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي k مثال سعر مقدار z هو 20% من سعر مقدار آخر k . جد عبارة الدالة الخطية التي تُعطي سعر المقدار z . حل مختصر $z = 0,2k$	$z = \frac{p}{100} \times k$
المقدار الجديد y مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $1 + \frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال ارتفع سعر سلعة x بنسبة 5%. فعبّر بدلالة x عن سعرها الجديد y . حل مختصر $y = 1,05x$	$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$
المقدار الجديد y مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $1 - \frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال انخفض سعر سلعة x بنسبة 30%. فعبّر بدلالة x عن سعرها الجديد y . حل مختصر $y = 0,7x$	$y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$
المقدار الجديد y' مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال سعر سلعة 1800 دج خُفّض ثمنها ب 15%. ما هو السعر المُخفّض؟ حل مختصر 270 دج	$y' = \frac{p}{100}x$

وإن كبير القوم لا علم عنده ... صغير إذا التفت عليه الجحافل
المعرفة قوّة.. لا تنسى هذا

زكاة العلم نشره دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة	وما نيل المطالب بالتمني ولكن تؤخذ الدنيا غلاب
--	--

• على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد

(1) تعيين عبارة دالة خطية جبريا انطلاقا من معلومية صورة عدد بهذه الدالة

☺ كل دالة تُكتب على الشكل: $f(x) = ax$ هي دالة خطية حيث a عدد مُعطى وهو معامل توجيهاها.
 هذا يعني أن إيجاد عبارتها هو إيجاد قيمة المُعامل a وهو يُحقق $a = \frac{f(x')}{x'}$ حيث x' عدد معلوم لا يُساوي صفر وصورته $f(x')$ معلومة.

مثال f دالة خطية حيث $f(3) = -12$ جد عبارتها. لدينا f دالة خطية معناه: $f(x) = ax$ حيث $a = \frac{f(x')}{x'}$.
 ولدينا أيضا $f(3) = -12$ نضع $x' = 3$ فيكون $f(x') = -12$ وبالتعويض: $a = \frac{f(x')}{x'} = \frac{-12}{3} = -4$
 إذن عبارة الدالة الخطية f هي $f(x) = -4x$.

(2) تعيين عبارة دالة تآلفية جبريا انطلاقا من معلومية صورة عددين بهذه الدالة

☺ كل دالة عبارتها من الشكل: $f(x) = ax + b$ هي عبارة دالة تآلفية وهذا يعني أننا لتعيينها نعين قيمتي معاملها a و b
 حيث $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ و $b = f(x_2) - ax_2$

ملاحظة يمكن حساب a و b أيضا بالعلاقين $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ و $b = f(x_1) - ax_1$ أو بتوظيف جملة مُعادلتين.

مثال f دالة تآلفية حيث $f(-5) = 28$ و $f(1) = 4$
حل المثال f دالة تآلفية معناه $f(x) = ax + b$ حيث $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
 وبوضع $x_1 = 4$ فيكون $f(x_1) = 4$ وبوضع $x_2 = -5$ فيكون $f(x_2) = 28$
 وبالتعويض في العلاقة $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ نجد $a = \frac{28 - 4}{-5 - 1} = -4$ وبعد الحساب
 وبالتعويض في العلاقة $b = f(x_2) - ax_2$ نجد $b = 28 - (-4) \times (-5) = -4$
 وبعد الحساب $b = 8$. إذن عبارة الدالة f هي: $f(x) = -4x + 8$.

(3) تعيين صورة عدد بدالة خطية جبريا

لحساب صورة عدد c بدالة خطية f عُلمت عبارتها $f(x) = ax$ نعوّض x بهذا العدد في عبارتها أي: $f(c) = a \times c$

مثال آخر
 g دالة خطية، حيث $g(x) = \frac{2}{5}x$ احسب صورة العدد 10 بالدالة g .
 لدينا $c = 10$ وبالتعويض $g(5) = \frac{2}{5} \times 10 = 4$

مثال
 نعتبر f دالة خطية حيث $f(x) = -3x$.
 • احسب صورة العدد 5 بالدالة f .
 لدينا $c = 5$ وبالتعويض نجد:
 $f(5) = -3 \times 5 = -15$

(4) تعيين صورة عدد بدالة تآلفية جبريا

لحساب صورة عدد c بدالة تآلفية g عُلمت عبارتها $g(x) = ax + b$ ، نعوّض x بهذا العدد في عبارتها أي:
 $g(c) = a \times c + b$ ونُكمل الحساب بعدها.

مثال آخر لتكن f دالة تآلفية، حيث: $f(x) = -4x + 2$
 ☺ احسب صورة العدد $\frac{1}{4}$ بالدالة f .
 لدينا $c = -3$ وبالتعويض والحساب:
 $f(-3) = -4 \times \frac{1}{4} + 2 = -1 + 2 = 1$

مثال نعتبر g دالة تآلفية، حيث: $g(x) = \frac{1}{2}x - 6$
 ☺ احسب صورة العدد 8 بالدالة g .
 لدينا $c = 8$ وبالتعويض والحساب:
 $g(8) = \frac{1}{2} \times 8 - 6 = \frac{8}{2} - 6 = 4 - 6 = -2$

(5) تعيين عدد عُلمت صورته بدالة خطية جبريا

لحساب العدد x الذي صورته k بدالة خطية g عبارتها من الشكل $g(x) = ax$ ، نحل المُعادلة: $g(x) = k$

مثال آخر نعتبر الدالة الخطية f حيث: $f(x) = \frac{1}{3}x$.
 • احسب العدد الذي صورته بالدالة f هي 2.
 لدينا $ax = k$ وبالتعويض $\frac{1}{3}x = 2$ ومنه $x = 6$

مثال نعتبر الدالة الخطية g حيث: $g(x) = -9x$.
 • احسب العدد الذي صورته بالدالة g هي 36.
 لدينا $ax = k$ حيث $a = -9$ و $k = 36$
 بالتعويض $-9x = 36$ ومنه $x = \frac{36}{-9} = -4$

(6) تعيين عدد علمت صورته بدالة تألفية جبريا الأستاذ هلال خالد BEM2025

لحساب العدد x الذي صورته k بدالة تألفية عبارتها من الشكل $f(x) = ax + b$ نحل المعادلة $f(x) = k$.

مثال ثانى $g(x) = x - 4$ دالة تألفية حيث: $g(x) = x - 4$

احسب العدد الذي صورته 6 بالدالة f .

لدينا $g(x) = x - 4$ و $k = 6$

$x - 4 = 6$ أي $x = 6 + 4$

ومنه $x = 1$

مثال أول $f(x) = -3x + 1$ دالة تألفية حيث: $f(x) = -3x + 1$

احسب العدد الذي صورته 22 بالدالة f .

لدينا $f(x) = -3x + 1$ و $k = 22$ وبالتعويض

$-3x + 1 = 22$ أي: $-3x = 22 - 1$

أي $-3x = 21$ ومنه: $x = -7$

(7) إثبات انتماء نقطة إلى تمثيل بياني لدالة خطية أو تألفية

تعريف القول أن نقطة $A(x_A; y_A)$ تنتمي إلى التمثيل البياني لدالة f يعني أن: $f(x_A) = y_A$

(أي أن ترتيبتها هي صورة فاصلتها بالدالة f)

مثال $f(x) = -6x + 1$ دالة تألفية حيث: هل النقطتين $A(-3; 19)$ و $B(0; -1)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f ؟

نضع $A(x_A; y_A)$ حيث $x_A = -3$ و $y_A = 19$ ونحسب $f(x_A)$ أي $f(-3)$:

$f(x_A) = f(-3) = -6 \times (-3) + 1 = 18 + 1 = 19 = y_A$ إذن A تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f

نضع $B(x_B; y_B)$ حيث $x_B = 0$ و $y_B = -1$ ونحسب $f(x_B)$ أي $f(0)$:

$f(x_B) = f(0) = -6 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \neq -1 = y_B$ إذن B لا تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f

(8) توظيف انتماء نقطة إلى تمثيل بياني لدالة خطية أو تألفية لإثبات أن ثلاث نقط في استقامية

الحالة الأولى: تُعطى عبارة دالة تألفية أو خطية تمثيلها البياني يشمل نقطتين من الثلاث فنثبت فقط أن النقطة الثالثة تنتمي للتمثيل البياني:

مثال $f(x) = -3x + 2$ دالة تألفية تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(-2; 8)$ و $B(-1; 5)$ حيث: هل النقطة $C(1; -1)$ تعتبر النقطتين A و B و C في استقامية؟ علل.

هل النقط A و B و C في استقامية؟ علل.

الإجابة في هذه الحالة يكفي أن نثبت أن C تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f وهو المستقيم (AB) .

لدينا f دالة تألفية، تمثيلها البياني يشمل النقطتين A و B ، يعني أن المستقيم (AB) هو التمثيل البياني للدالة f .

إذن نثبت أن C تنتمي إلى (AB) ومن أجل هذا لابد أن تحقق إحداثيات النقطة C : $f(x_C) = y_C$ وهذا محقق لأن:

$f(x_C) = f(1) = -3 \times 1 + 2 = -3 + 2 = -1 = y_C$ إذن النقط A و B و C في استقامية.

الحالة الثانية: لا تُعطى عبارة دالة تألفية (أو خطية) تمثيلها البياني يشمل نقطتين من الثلاث فنفرض وجود تمثيل بياني لدالة تألفية (أو تألفية) يشمل نقطتين من الثلاث ونعين عبارته التألفية (أو الخطية) ثم نثبت أن الثالثة تنتمي للتمثيل البياني.

مثال نعتبر E ، F و G ثلاث نقط من معلم متعامد للمستوي حيث: $E(2; -3)$ ، $F(3; -5)$ و $G(-2; 5)$.

هل النقط E ، F و G في استقامية؟ علل.

الإجابة نفرض أن التمثيل البياني لدالة تألفية نسميها f ، نقوم بتعيين عبارتها.

$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-5)}{2 - 3} = \frac{2}{-1} = -2$ و $b = f(x_2) - ax_2$ فنجد $b = 1$.

إذن عبارة الدالة التألفية f هي $f(x) = -2x + 1$ والآن نثبت أن: $f(x_G) = y_G$.

$f(x_G) = f(-2) = -2 \times (-2) + 1 = 4 + 1 = 5 = y_G$ إذن النقط E ، F و G في استقامية.

(9) الدالة تألفية والدالة الخطية والدالة الثابتة

الدالة التألفية هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = ax + b$.

الدالة الخطية هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = ax$.

الدالة الثابتة هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = b$.

(10) التمثيل البياني لدالة ثابتة

هو مستقيم يوازي محور الفواصل

لا نحتاج جدول مُساعد في إنشاء تمثيلها البياني

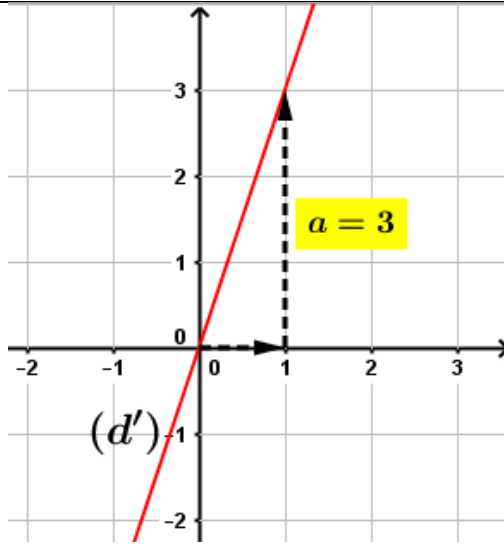
وإنما نرسم مستقيم يوازي محور الفواصل ويشمل محور الترتيب في النقطة ذات الترتيب b .

خير جليس في الزمان كتاب

عبارتها $f(x) = b$

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد • على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

التمثيل البياني لدالة خطية هو كل مستقيم يشمل المبدأ ونعلم أن كل مستقيم يمكن إنشاؤه انطلاقاً من تعيين نقطتين على الأقل.



جدول مُساعد لإنشاء تمثيل بياني لدالة خطية

x	0	b (اختيار)
$f(x)$	0	$f(b)$
$(x; f(x))$	(0; 0) مبدأ المعلم	$(b; f(b))$

العدد b (الفاصلة) نحن من نختاره ثم نحسب الصورة $f(b)$ (الترتيبة). كمثال:

نُنشئ (d') التمثيل البياني للدالة الخطية $f(x) = 3x$

جدول مُساعد

x	0	1
$f(x)$	0	3
$(x; f(x))$	(0; 0)	(1; 3)

$$f(1) = 3 \times 1 = 3$$

(12) تعيين إحداثيتا نقطة تقاطع تمثيلين بيانيين لدالتين تآلفيتين

نعتبر f و g دالتين تآلفيتان، القول أن التمثيلين البيانيين للدالتين متقاطعان معناه أن المعادلة: $f(x) = g(x)$ محققة و x حل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة التقاطع وترتيبة النقطة هي صورة هذه الفاصلة بأحد عبارتي الدالتين.

مثال نعتبر f و g دالتين تآلفيتان حيث $f(x) = -x + 2$ و $g(x) = 2x - 1$

تعيين إحداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حسابيا:

حساب x_M (فاصلة M):

$$\text{لدينا } f(x) = g(x) \text{ وبتعويض عبارتيهما: } -x + 2 = 2x - 1 \text{ فنجد أن } x = 1 \text{ ومنه } x_M = 1$$

حساب y_M (ترتيبة M):

$$y_M = 1 \text{ أو } y_M = f(x_M) = f(1) = -1 + 2 = 1 \text{ إذن } y_M = 1$$

ومنه إحداثيتا M هما $(x_M; y_M) = (1; 1)$

تعيين إحداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g بيانيا:

جدول مُساعد لإنشاء (Δ) التمثيل البياني للدالة التآلفية f

x	3	0
$f(x)$	-1	2
$(x; f(x))$	(3; -1)	(0; 2)

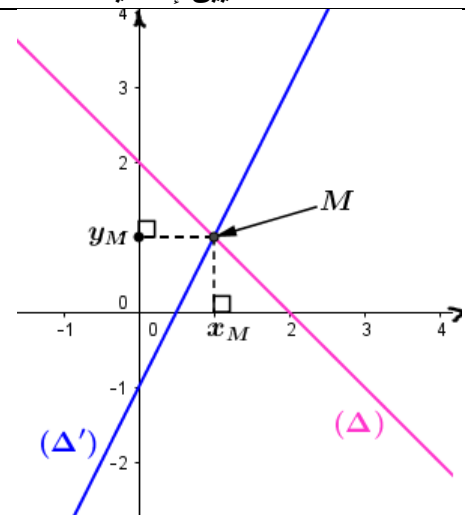
$$f(0) = -0 + 2 = 2 \text{ و } f(3) = -3 + 2 = -1$$

جدول مُساعد لإنشاء (Δ') التمثيل البياني للدالة g

x	2	0
$g(x)$	3	-1
$(x; g(x))$	(2; 3)	(0; -1)

$$g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \text{ و } g(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$$

بقراءة بيانية نجد أن: $(x_M; y_M) = (1; 1)$



زكاة العلم نشره
دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

والله إن ذات الفتى بالعلم والتقى
فإذا لم يكونا فلا اعتبار لذاته

• على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد

عندما تزدهر المدارس يزدهر كل شيء

الحل الجبري

نُميز ثلاث طرق لحل جملة مُعادلتين، ونأخذ كمثال حل الجملة الآتية: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$

طريقة الجمع والتعويض

طريقة الجمع

طريقة التعويض

1. ترفيم الجملتين

$$\begin{cases} x + y = 10 \dots (1) \\ 2x + 5y = 32 \dots (2) \end{cases}$$

2. نستنتج عبارة x (أو عبارة y) من إحدى المُعادلتين ونضعها بين قوسين: من المعادلة (1) مثلاً: $x = (10 - y)$

3. نعوض x بعبارته في المعادلة (2) فنجد قيمة y بحل مُعادلة من الدرجة الأولى:

$$2(10 - y) + 5y = 32$$

$$20 - 2y + 5y = 32$$

$$3y = 12 \text{ إذن: } y = 4$$

4. نعوض قيمة y في عبارة x فنجد قيمة x : $x = (10 - 4) = 6$

2. نضرب طرفي المُعادلة (1) في 2 - (لأنه معاكس معامل x في المعادلة (2)) فنحصل على المعادلة (3): $-2x - 2y = -20 \dots (3)$ (الهدف في هذه الخطوة هو جعل معاملي x في المعادلتين متعاكسين أو معاملي y في المعادلتين متعاكسين).

3. نجمع المُعادلتين (2) و (3) فنحصل على قيمة y بحل هذه المعادلة: $-2x - 2y + 2x + 5y = -20 + 32$ إذن: $y = 4$

4. نضرب طرفي المُعادلة (1) في 2 - (لأنه معاكس معامل y في المعادلة (2)) فنحصل على المعادلة (4): $-5x - 5y = -50 \dots (4)$

5. نجمع المُعادلتين (2) و (4) فنحصل على قيمة x بحل هذه المعادلة: $-5x - 5y + 2x + 5y = -50 + 32$ إذن: $x = 6$

$$x + y = 6 + 4 = 10$$

$$2x + 5y = 2 \times 6 + 5 \times 4 = 32$$

المرحلة قبل الأخيرة من الحل بإحدى الطرق الثلاث التحقق (مرحلة اختيارية) الثانية (4; 6) هي حل للجملة.

ملاحظة اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على معاملات x و y في الجملة.

مثال حل الجملة $\begin{cases} 3x + 4y = 70 \\ -3x + 11y = 40 \end{cases}$ بطريقة الجمع والتعويض أفضل، لأن معاملي x متعاكسين.

الحل البياني نأخذ كمثال حل الجملة $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

1. أول خطوة هي أن نستنتج عبارتي y في كلتا المُعادلتين، ونجد: $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

2. نسمي كل عبارة بدالة كالآتي: $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ و $g(x) = -2x + 2$

3. نرسم (d) و (d') التمثيل البياني للدالتين f و g على الترتيب (توظيف التمثيل البياني للدالة التآلفية).

4. الحل البياني للجملة هو إحداثيتا نقطة تقاطعها.

جدول مُساعد لإنشاء (d) التمثيل البياني للدالة f :

x	5	2
y	0	-1
$(x; y)$	(5; 0)	(2; -1)

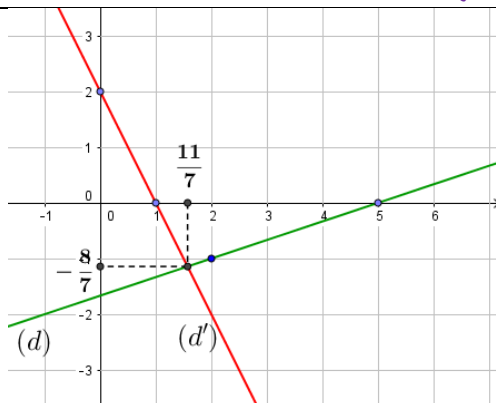
$$f(5) = \frac{1}{3} \times 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5-5}{3} = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \times 2 - \frac{5}{3} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2-5}{3} = -1$$

جدول مُساعد لإنشاء (d') التمثيل البياني للدالة g :

x	0	1
y	2	0
$(x; y)$	(0; 2)	(1; 0)

$$g(1) = -2 \times 1 + 2 = 0 \text{ ؛ } g(x) = -2 \times 0 + 2 = 2$$



إذن حل الجملة هو الثانية $(\frac{11}{7}; -\frac{8}{7})$ (في هذه الحالة قراءة إحداثيتا نقطة التقاطع صعب جداً!).

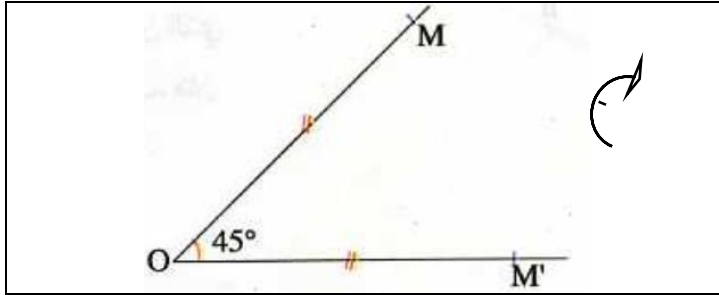
1. إنشاء نقطة بدوران:

لإنشاء نقطة صورة نقطة بدوران يكفي أن نعلم ثلاثة نقاط أساسية: المركز (مركز الدوران) ؛ الزاوية (قيس زاوية الدوران) ؛ الاتجاه (اتجاه الدوران).

ملاحظة في اتجاه الدوران نُميّز اتجاهين: (أ) الاتجاه المُباشر (أو الاتجاه الموجب أو اتجاه عقارب الساعة).

(ب) الاتجاه غير المُباشر (أو الاتجاه السالب أو اتجاه عقارب الساعة).

مثال



نعتبر O و M نقطتان متميزتان. أنشئ النقطة M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 45° في الاتجاه غير المُباشر.

ملاحظة

صورة نقطة بدوران مركزه معلوم وزاويته 180° هو تناظر مركزي - لا نحتاج لإضافة شرط الاتجاه -.

مثال

إنشاء نقطة A' صورة نقطة A بالدوران الذي مركزه نقطة O معناه إنشاء A' نظيرة A بالنسبة إلى O .

2. خواص الدوران

يحفظ الدوران الأطوال وأقياس الزوايا والمساحات والتوازي والاستقامة.

3. الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

✓ كل زاوية رأسها مركز دائرة هي زاوية مركزية.

✓ كل زاوية رأسها ينتمي إلى الدائرة وضلعها يقطعان الدائرة هي زاوية مُحيطية.

4. خاصية الزاويتان المُحيطيتان

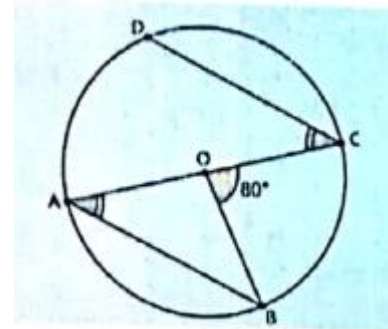
في دائرة إذا كانتا زاويتان مُحيطيتان يحصران نفس القوس فإنهما متقايتان.

5. خاصية الزاويتان المُحيطية والمركزية:

في دائرة إذا كانتا زاويتان مركزية ومُحيطية يحصران نفس القوس فإنهما متقايتان.

مثال

الزاوية $\widehat{COB}$ مركزية والزاوية $\widehat{CAB}$ مُحيطية وكلاهما تحصران نفس القوس $\widehat{BC}$ فإن $\widehat{COB} = 2 \times \widehat{CAB}$ أو $\widehat{CAB} = 0,5 \times \widehat{COB}$



الزاويتان $\widehat{ACD}$ و $\widehat{DBA}$ مُحيطيتان وكلاهما تحصران نفس القوس $\widehat{AD}$ فهما مُتقايتان.

السنايل الملى تنحني تواضعا
والفارغات رؤوسهن شوامخ

زكاة العلم نشره
دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

Prof_khaled_mathpro على انستغرام:

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

- التكرار في سلسلة إحصائية هو عدد مرّات ظهور قيمة ما.
- التكرار المُجمّع الصاعد لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأصغر منها في نفس السلسلة.
- التكرار المُجمّع النازل لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأكبر منها في نفس السلسلة.
- التكرار النسبي لقيمة في سلسلة إحصائية هو تكرار هذه القيمة على المجموع الكلي للتكرارات.
- التكرار النسبي المُجمّع الصاعد لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم الأصغر منها في نفس السلسلة.
- التكرار النسبي المُجمّع النازل لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم الأكبر منها في نفس السلسلة.

مثال أول

نعتبر السلسلة الإحصائية الآتية في شكل قيم كما: (قد تكون ممثلة في مخطط أعمدة أو مخططات إحصائية أخرى)

2	6	2	4	4	4	7	5	7	4	5	4	5	5
4	2	2	5	4	4	11	6	4	4	2	2	7	4

القيمة	2	4	5	6	7	11	المجموع
تكرارها	6	11	5	2	3	1	28
تكرارها المُجمّع الصاعد	6	17	22	24	27	28	/
تكرارها المُجمّع النازل	28	22	11	6	4	1	/
تكرارها النسبي (تواترها)	$\frac{6}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{28}$	1
تكرارها النسبي المُجمّع الصاعد (تواترها المُجمّع الصاعد)	$\frac{6}{28}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{22}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{27}{28}$	$\frac{28}{28}$	/
تكرارها النسبي المُجمّع النازل (تواترها المُجمّع النازل)	$\frac{28}{28}$	$\frac{22}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{1}{28}$	/

مثال ثاني

نعتبر السلسلة الإحصائية في شكل فئات كما يأتي، حيث x يُمثل علامات تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط:

العلامة x	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x \leq 20$
التكرار	2	14	12	10
التواتر	$\frac{2}{38}$	$\frac{14}{38}$	$\frac{12}{38}$	$\frac{10}{38}$
التواتر المُجمّع الصاعد	$\frac{2}{38}$	$\frac{16}{38}$	$\frac{28}{38}$	$\frac{38}{38}$
التواتر المُجمّع النازل	$\frac{38}{38}$	$\frac{36}{38}$	$\frac{22}{38}$	$\frac{10}{38}$

الفشل هو التوقف عن المحاولة، أما النجاح هو الاستمرار في المحاولة وأما التميز هو الاستمرار حين يتوقف الآخرون.

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

زكاة العلم نشره



الأستاذ هلال خالد BEM2025

7. الإحصاء #المدى

المدى في سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في هذه السلسلة.
مثال في السلسلة الإحصائية الآتية، المدى هو 3 لأن $7 - 4 = 3$.

4	4	7	5	7	4	5	4	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

ملاحظة المدى يُعطي انطبعا عن فكرة تشتت قيم سلسلة ما (فوارق معتبرة بين قيم نفس السلسلة).

الأستاذ هلال خالد BEM2025

8. الإحصاء #الوسيط

الوسيط في سلسلة هو قيمة تُقسم السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التكرار.

ملاحظات

- الوسيط ليس بالضرورة قيمة من السلسلة.
- في سلسلة إحصائية مُجمعة في فئات، بدل أن نبحث عن الوسيط نبحث عن الفئة الوسيطة.

طريقة

لتعيين وسيط سلسلة إحصائية تكرارها الكلي N ، نُرتبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا:

- إذا كان N فرديا فإن الوسيط يُساوي القيمة التي رُتبته $\frac{N+1}{2}$.

مثال أول في السلسلة الإحصائية الآتية، مجموع التكرار $N = 7$ فرتبة الوسيط هي $\frac{7+1}{2}$ أي 4 وبترتيب القيم تصاعديا (يمكن أيضا تصاعديا): 71 ؛ 51 ؛ 51 ؛ 51 ؛ 41 ؛ 41 ؛ 51. فنجد الرتبة الرابعة للقيمة 51 فهي وسيط هذه السلسلة.

51	71	41	51	41	51	51
----	----	----	----	----	----	----

- إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتبيهما $\frac{N}{2} + 1$ و $\frac{N}{2}$.

مثال ثاني في السلسلة الإحصائية الآتية: 8 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 3 ؛ 11 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 10 أي $N = 10$ وبترتيب السلسلة ترتيبا تنازليا: 11 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 8 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 11 نجد القيمة ذات الرتبة $\frac{10}{2} = 5$ (أي 8) والقيمة ذات الرتبة $\frac{10}{2} + 1 = 6$ (أي 8) هي 8. فالوسيط هو الوسط الحسابي $\frac{4+8}{2}$ أي 6.

مثال ثالث

نعتبر السلسلة الإحصائية في شكل فئات كما يأتي، حيث x يمثل علامات تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط:

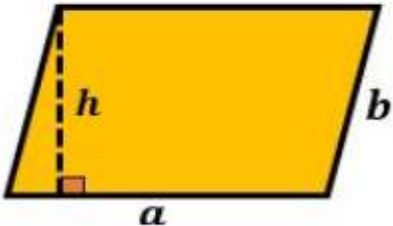
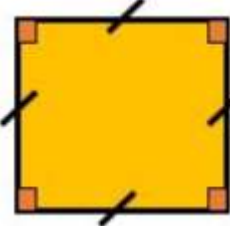
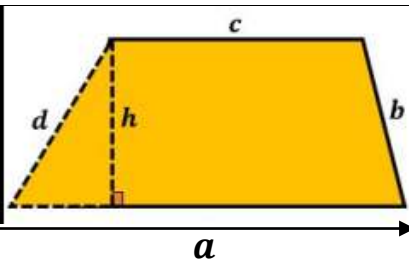
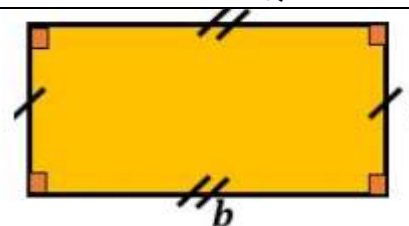
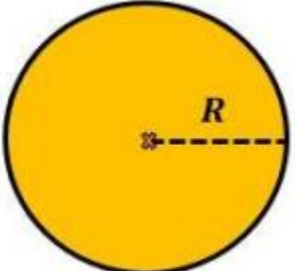
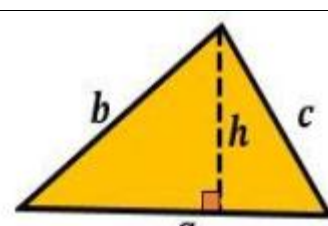
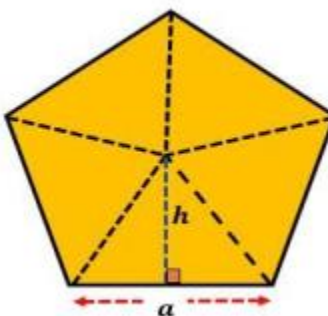
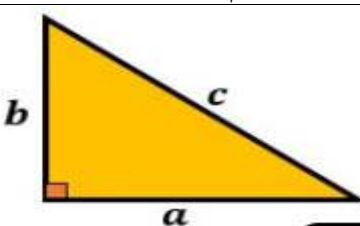
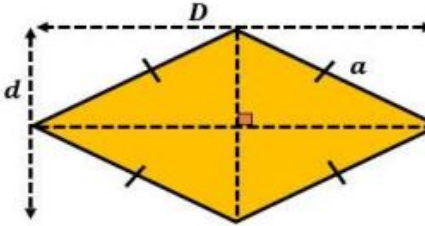
العلامة x	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x \leq 20$
التكرار	2	14	12	10
التكرار المُجمع الصاعد	2	16	28	38

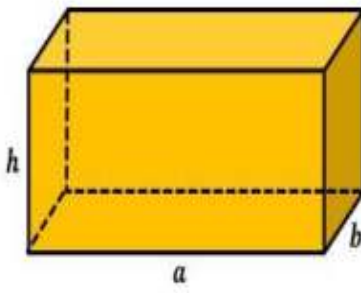
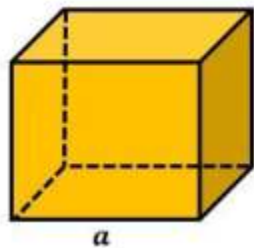
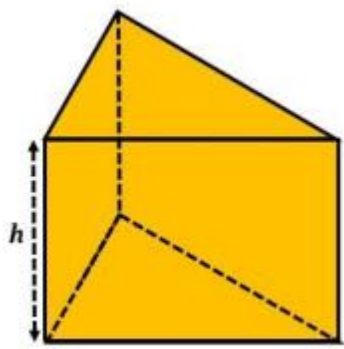
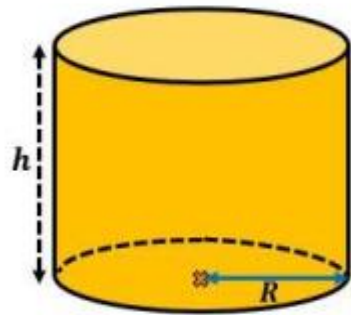
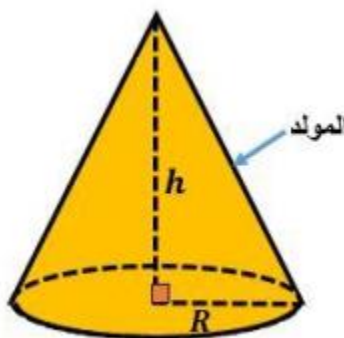
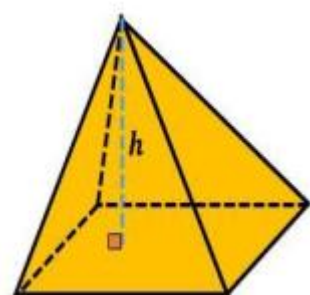
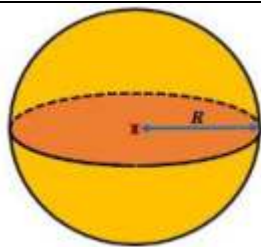
لدينا $N = 38$ ومنه الوسيط هو القيمة ذات الرتبة 19 وهي موجودة في الفئة $10 \leq x < 15$ حسب التكرار المجمع الصاعد ومنه الفئة الوسيطة هي $10 \leq x < 15$.

الروايات لا ينبغي أن تكون مصدر ثقافتك، وإلا فتلك مجرد خيالات وعليك تعلم دينك لتعرف ربك واقرأ في كتب الفكر لتعرف الحياة واقرأ الأدب ليرق طبعك.

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات

متوازي أضلاع  مساحته $A = \frac{a \times h}{2}$ مُحيطه $P = 2(a + b)$	المُربع  مساحته $A = a \times a$ مُحيطه $P = 4 \times a$ طول ضلع المربع a
شبه المنحرف  مساحته $A = \frac{(a+c) \times h}{2}$ مُحيطه $P = a + b + d + c$	المُستطيل  مساحته $A = a \times b$ عُرضه a طوله b مُحيطه $P = 4(a + b)$
دائرة  مساحتها $A = \pi \times R^2$ مُحيطها $P = 2 \times \pi \times R$	مثلث  مساحته $A = \frac{a \times h}{2}$ قاعدته a ارتفاعه h مُحيطه $P = a + b + c$
مُضلع (منتظم خماسي)  $P = a \times n$ n: هو عدد الأضلاع. $S = n \times \left(\frac{a \times h}{2} \right)$	مثلث قائم  مساحته $A = \frac{a \times b}{2}$ $P = a + b + c$
من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له به طريقا إلى الجنة على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد على انستغرام: Prof_khaled_mathpro	معين  مساحته $A = \frac{d \times D}{2}$ مُحيطه $P = 4 \times a$

الأستاذ هلال خالد BEM2025 الأشكال منقولة للأمانة		أهم ما يُراجع في: المساحات والحجوم	
متوازي مستطيلات		مكعب	
	مساحته الجانبية $A = 2h(a + b)$ مساحته الكلية $S = 2ah \times 2bh + 2ab$ حجمه $V = ab \times h$		مساحته الجانبية $A = a \times a \times 4$ مساحته الكلية $S = a \times a \times 6$ حجمه $V = a \times a \times a$
الموشور القائم		اسطوانة دوران	
	مساحته الجانبية $S = P \times h$ حيث P محيط القاعدة مساحته الكلية $A = 2B + S$ حيث B مساحة القاعدة حجمه $V = B \times h$		مساحته الجانبية $S = 2\pi R \times h$ مساحته الكلية $A = 2\pi R^2 + S$ حجمه $V = \pi R^2 \times h$
المخروط		الهرم	
	مساحته الجانبية $S = \frac{2\pi R \times \text{المولد}}{2}$ مساحته الكلية $A = \pi R^2 + S$ حجمه $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h$		مساحته الجانبية $S = A' \times n$ حيث A' مساحة وجه جانبي منه و n عدد الالوجه الجانبية. مساحته الكلية $A = B + A'$ حيث B مساحة القاعدة حجمه $V = \frac{1}{3} B \times h$
على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد على انستغرام: Prof_khaled_mathpro البريد الإلكتروني: khaledhellal1993@gmail.com زكاة العلم نشره دعواتكم للوالد بالرحمة		الكرة	
			مساحته الكلية $A = 4\pi R^2$ حجمه $V = \frac{4}{3} \pi R^3$