



ممنحة ثالثية
شعبية
علوم تجريبية
تقني رياضي
رياضيات



سلسلة تمارين حول الإحتمالات

طرائق العد

السنة الدراسية: 2021-2022

1 يحتوي صندوق على 9 كرات مرقمة من 1 إلى 9 نسحب بالتتابع (على التوالي) وبدون إرجاع 3 كرات.

(1) ماهو عدد الإمكانيات؟

(2) ما عدد إمكانيات الحصول على 3 كرات تحمل كلها أرقامًا زوجية؟

(3) ما عدد إمكانيات الحصول على :

(أ) الكرة الأولى تحمل رقما فرديًا وكرتان تحملان رقما زوجيًا.

(ب) كرة واحدة تحمل رقما فرديًا فقط.

2 استدعى المسؤول عن الألعاب الجماعية بإحدى الثانويات عشرة تلاميذ لتشكيل فريق كرة السلة. موزعين كالتالي: اثنان من المستوى الأول، ثلاثة من المستوى الثاني وخمسة من المستوى الثالث. حدد عدد الحالات لإختيار:

(1) فريق يضم تلميذًا من المستوى الأول، وتلميذًا من المستوى الثاني، وثلاثة تلاميذ من المستوى الثالث.

(2) فريق يضم تلميذًا من المستوى الثاني، ولا يضم أي تلميذ من المستوى الأول.

(3) فريق يضم التلميذ أحمد من المستوى الأول، وتلميذين على الأقل من المستوى الثاني، والباقيين من المستوى الثالث.

3 يحتوي كيس على 10 قريصات تحمل الأرقام: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

الأرقام 0, 1, 2, 3 و 4 مكتوبة باللون الأحمر مكتوبة باللون الأزرق.

الأرقام 5, 6 و 7 مكتوبة باللون الأزرق.

الرقمان 8 و 9 مكتوبان بالأصفر. لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 قريصات.

ما الاحتمال لكي نحصل على :

(1) ثلاثة أرقام زوجية.

(2) ثلاثة أرقام لها نفس اللون.

(3) ثلاثة أرقام مختلفة اللون.

(4) ثلاثة أرقام زوجية لها نفس اللون.

(5) ثلاثة أرقام زوجية ألوانها مختلفة مثنى مثنى.

4 يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء مرقمة بـ: 1, -1, 1, 1 وثلاث كرات سوداء مرقمة بـ: 0, 0, 1. كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

(1) ما احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من نفس اللون؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المحصل عليهما. حدد قانون احتمال X .

5 يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وثلاث كرات زرقاء.

نسحب عشوائيًا أربع كرات على التوالي وإبراج من الصندوق.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الزرقاء التي سُحبت.

(1) ضع قانون احتمال X .

(2) أحسب الأمل الرياضي والتباين.

6 يحتوي كيس على 10 صفائح مرقمة من 0 إلى 9 لا يمكن التعرف عليها باللمس. نسحب بالتتابع وبدون إرجاع أربع صفائح ونضعها جنبًا إلى جنب من اليسار إلى اليمين في ترتيب السحب بحث نحصل على عدد مكون من أربعة أرقام. نفرض أن جميع السحبات لها نفس الاحتمال، وأن الرقم 0 يمكن أن يكون أول رقم في العدد المحصل عليه.

(1) أحسب احتمال الحصول على : العدد 1987 ثم العدد 1989.

(2) أحسب احتمال الحصول على عدد مكون من أرقام زوجية فقط.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأرقام الزوجية المحصل عليها. حدد قانون احتمال X .

7 (I) يحتوي كيس على 12 كرة غير قابلة للتمييز باللمس، 4 كرات حمراء و 8 كرات بيضاء. نسحب بالتتابع وبدون إرجاع كرتين من الكيس.

(1) ما احتمال سحب كرتين من نفس اللون؟

(2) ما احتمال سحب كرتين أولاهما بيضاء؟

(II) نسحب بالتتابع وإبراج كرتين من الكيس.

(1) ما احتمال سحب كرة واحدة حمراء؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس.

(أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

(ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ج) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

8 يحتوي صندوق على 6 بيادق (البَيْدَق : الجندي في لعبة الشطرنج) لا يمكن التمييز بينها باللمس، ثلاث بيادق حمراء تحمل الأرقام: 1, 2, 3، وثلاث بيادق خضراء تحمل الأرقام: 1, 2, 3. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد بيدقين من الصندوق، وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بالقيمة المطلقة لفرق الرقمين المحصل عليهما.

(1) حدد القيم التي يأخذها X .

(2) أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X .

9 (I) يحتوي وعاء على 3 قريصات سوداء و 4 حمراء، إحدى القريصات السوداء تحمل الرقم 1، والاخرتان تحملان الرقم 3 أما الحمراء فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والاخرتان تحملان الرقم 3.

نسحب عشوائيًا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد.

(1) ما هو احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون ثم استنتج احتمال الحصول على قريصتين مختلفتين في اللون.

(2) ما هو احتمال أن يكون جداء رقمي القريصتين يساوي عددا سالبًا.

(3) ما هو احتمال أن يكون مجموع رقمي القريصتين يساوي 3.

(II) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المحصل عليهما.

(1) عَيِّن قيم المتغير العشوائي X . ثم عرّف قانون احتماله.

(2) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

10 يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل العدد (a) و 5 كرات تحمل العدد $(a-1)$ حيث $(a \in \mathbb{R})$. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق.

(1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A : سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.

B : سحب كرتين بالضبط تحمل نفس العدد.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة.

(أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

(ب) حدد قانون احتمال X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي بدلالة a ، وحدد a من أجل: $E(X) = 0$.

11 يحتوي صندوق على تسع كرات: أربع منها بيضاء و مرقمة 1, 2, 3, 4 وخمس منها سوداء و مرقمة 5, 6, 7, 8, 9.

(1) نسحب عشوائيًا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق، وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.

(أ) حدد قانون احتمال X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(2) نسحب عشوائيًا على التوالي وبدون إرجاع ثلاث كرات من الصندوق ونعتبر العدد المكون من الأرقام الثلاثة المتحصل عليها حيث الرقم المكتوب على الكرة الأولى هو رقم المئات، والرقم المكتوب على الكرة الثانية هو رقم العشرات، والرقم المكتوب على الكرة الثالثة هو رقم الآحاد. - أحسب احتمال الحدثين الآتيين :

E_1 : الحصول على عدد أصغر من 300.

E_2 : الحصول على عدد زوجي.

12 يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة، يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينًا.

(3) أحسب $V(X)$ و $\sigma(X)$.

(17) (I) كيس به 7 كرات متماثلة، لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحادثة: "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

(2) أحسب احتمال الحادثة: "سحب كرتين من نفس اللون".

(II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب (DA) α ، حيث α عدد طبعي معطى و DA تعني دينار جزائري.فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100 DA$ ، وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50 DA$ ، وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .(1) بزر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha, -50 - \alpha, 100 - \alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.(2) بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي بدلالة α هو: $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$. ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

(18) كيس يحوي 9 كرات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي: خمس كرات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2، و ثلاث كرات خضراء مرقمة بـ: (-3)، 2، 3، وكرة بيضاء مرقمة بـ: (-1).

نسحب عشوائيا 4 كرات في آن واحد.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A: "الحصول على أربع كرات من نفس اللون".

B: "الحصول على كرة بيضاء على الأكثر".

C: "الحصول على أربع كرات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الخضراء المتبقية في الكيس.(أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .(ج) أحسب احتمال الحادثة: " $X^2 - X > 0$ ".

(19) صندوق يحتوي على 5 كرات سوداء مرقمة بـ: 0، 2، 2، 2، 2، و كرتين خضراوين مرقمتين بـ: 4، 2. جميع الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع:

(1) أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأكثر.

(2) أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامهم 6.

(3) أحسب احتمال أن تكون الكرات المسحوبة سوداء ومجموع أرقام الكرات 6.

نزع الكرتين الخضراوين من الصندوق ونضع مكانها $n \geq 2$ كرة حمراء. ثم نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد ونعتبر اللعبة التالية: سحب كرة سوداء يعطي -10 نقطة وسحب كرة حمراء يعطي +5 نقطة.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع النقاط المحصل عليها.(1) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

(2) عيّن عدد الكرات الحمراء المضافة حتى تصبح اللعبة عادلة.

(20) يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و أربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42

(2) نعتبر الحوادث التالية:

A "اللجنة من نفس الجنس" B "اللجنة من جنسين مختلفين"

C "H1 هو الرئيس" D "اللجنة لا تضم كلا من H1 و F1"

أ. أحسب $p(A)$ احتمال الحادث A ثم إستنتج $p(B)$ ب. أحسب $p(C)$ و $p(D)$ (3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.عين قانون احتمال X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.

(1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

(2) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث:

(أ) يكون الأمين تلميذا؟

(ب) التلميذ X موجودا في اللجنة؟

(ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذا؟

(د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين؟

(3) نفرض أن الرئيس تلميذا و الأمين تلميذا وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y.

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف؟

(13) يحتوي كيس على كرة واحدة بيضاء و $(n-1)$ كرة سوداء. ($n > 1$)(1) نسحب عشوائيا على التوالي وبدون إرجاع كرتين من الكيس. وليكن X عدد الكرات السوداء المسحوبة.(أ) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .(ب) أحسب بدلالة n الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X .(2) نسحب هذه المرة n كرة من الكيس على التوالي وإرجاع.• أحسب بدلالة n : $P(n)$ احتمال سحب n مرة الكرة البيضاء.(3) نضع $U_n = P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. بين أن المتتالية (U_n) متقاربة.

(14) تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه ابراهيم و امرأة واحدة اسمها فاطمة، نريد تكوين لجنة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A: تكوين لجنة تضم ثلاث رجال.

B: تكوين لجنة تضم رجل و امرأتين.

C: تكوين لجنة تضم ابراهيم.

D: تكوين لجنة تضم ابراهيم أو فاطمة.

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة.(أ) عيّن القيم الممكنة لـ X . و عيّن قانون احتماله.(ب) أحسب الأمل و التباين للمتغير العشوائي X .

(15) يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 و ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 3 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2 (كل الكرات متشابهة لانفرق بينها باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

(أ) الحادثة A: "الحصول على كرة بيضاء واحدة".

(ب) الحادثة B: "الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر".

(ج) الحادثة C: "الحصول على ثلاث كرات تحمل أرقاما غير أولية".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل أرقاما أولية.(أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله(ب) أحسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

(16) كيس به 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

(1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد.

(أ) أحسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء.

(ب) أحسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) أحسب $P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23})$.

(24) يحتوي صندوق على 10 كرات لا نفرق بينهما عند اللمس منها كرتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1

و الكرات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة

(1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$

(2) بين أنّ احتمال الحصول على ثلاث كرات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

(3) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع.

(أ) ما احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي.

(ب) ما احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين جديهما زوجي ؟

(25) توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبررا إختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 1, 2, 3 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 1, 2.

(الكريات لانفرق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا و في آن واحد. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

(1) قيم المتغير العشوائي X هي :

(أ) $\{1; 2; 3\}$ ، (ب) $\{0; 2; 3\}$ ، (ج) $\{0; 1; 2\}$

(2) الأمل الرياضيائي $E(X)$ لـ X هو :

(أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، (ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، (ج) $E(X) = \frac{11}{10}$

(3) احتمال "الحصول على كرتة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكرات المسحوبة"

يساوي : (أ) $\frac{7}{10}$ ، (ب) $\frac{9}{10}$ ، (ج) $\frac{3}{5}$

(4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة على 13 هو 1"

يساوي : (أ) $\frac{2}{5}$ ، (ب) $\frac{3}{10}$ ، (ج) $\frac{1}{5}$



(21) يحتوي كيس غير شفاف على 9 كرات منها: ثلاث بيضاء مرقمة بـ: 1, 0, -2 وأربعة حمراء مرقمة بـ: 2, 1, 0, -1 و كرتين سوداوين مرقمتين بـ: -1, 0. كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

(I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس. نعتبر الحوادث:

A : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون"

B : "سحب ثلاث كرات مجموع الأرقام المسجلة عليها معدوم"

C : "سحب ثلاث كرات جداء الأرقام المسجلة عليها عدد سالب تماما"

(1) أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث: A, B, C, و $A \cup C$ و $A \cap C$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأكبر من بين الأعداد المسحوبة.

(أ) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضيائي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(II) نسحب الآن ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع.

(1) أحسب احتمال الحادثة D : "الحصول على 3 أرقام جديها عدد زوجي".

(22) يحتوي صندوق غير شفاف 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها: أربع كرات بيضاء مرقمة بـ: 1, 1, 2, 2 و ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ: 1, 0, 2 و كرتين خضراوين مرقمتين بـ: 0, 1 و كرتة سوداء مرقمة بـ: 0.

(I) نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من هذا الصندوق. نعتبر الحوادث:

A : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة مثنى مثنى".

B : "الكرات المسحوبة تحمل لونين فقط"

C : "الكرات المسحوبة تحمل على الأقل رقما زوجيا"

(1) بين أن: $P(B) = \frac{29}{105}$ ثم أحسب $P(A)$ و $P(C)$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

(أ) بين أن: $P(X = 3) = \frac{127}{210}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضيائي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(II) نسحب الآن عشوائيا على التوالي و من دون إرجاع أربع كرات من هذا الصندوق. نعتبر الحادثة D : "الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"

(1) أحسب $P(D)$

(23) (I) نعلم أنّ فصيلات دم الإنسان أربعة وهي: A, B, O و AB.

تنوزع مجموعة من الأشخاص حسب فصيلتهم الدموية كما يلي: ستة أشخاص من فصيلة O و ثمانية من فصيلة A و خمسة أشخاص من فصيلة B و شخص واحد من فصيلة AB.

نختار عشوائيا شخصين في آن واحد من هذه المجموعة.

(1) أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

C : "الشخصان المختاران من نفس الفصيلة الدموية".

D : "الشخصان المختاران من فصيلتين مختلفتين".

E : "فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط".

(2) بين أن: $P(E \cap D) = \frac{48}{95}$, ثم استنتج $P(\overline{E} \cup \overline{D})$.

(II) نفرق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصيلات التي يمكن أن تتلّق من الفصيلة O وهكذا نفرق الفصيلة A بالعدد 2 و الفصيلة B بالعدد 2 و الفصيلة AB بالعدد 1. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل اختيار لشخصين بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما.

(1) عيّن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X , ثم عرّف قانون احتماله.

(2) أحسب الأمل الرياضيائي للمتغير العشوائي X .

1- $X = -1$: سحب كرتين في آن واحد، إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 0.
 $X = 0$: سحب كرتين في آن واحد تحملان الرقم 0 أو سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم -1.

$X = 1$: سحب كرتين في آن واحد إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 0.
 $X = 1$: سحب كرتين في آن واحد تحملان الرقم 1.

- تحديد قانون احتمال X :

$$P(X = -2) = \frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$$

$$P(X = -1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{21} = \frac{4}{21}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1}{21} = \frac{7}{21}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_1^1}{21} = \frac{6}{21}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21}$$

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$

5- يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وثلاث كرات زرقاء.

نسحب عشوائيا أربع كرات على التوالي وبارجاع من الصندوق.

- عدد الحالات الممكنة: $10^4 = 10000$

1- المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الزرقاء التي سُحِبَت ومنه: $X \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$X = 0$: لم نسحب كرة زرقاء $4\bar{B}$ ومنه

$$P(X = 0) = \frac{7^4}{10^4} = \frac{2401}{10^4}$$

$X = 1$: سحبنا كرة زرقاء واحدة فقط $B3\bar{B}$ ومنه

$$\alpha = \frac{4!}{1!3!} = 4 \text{ حيث } P(X = 1) = \frac{\alpha 3^1 \times 7^3}{10^4} = \frac{4116}{10^4}$$

$X = 2$: سحب كرتين زرقاوين فقط $BB2\bar{B}$ ومنه

$$\alpha = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ حيث } P(X = 2) = \frac{\alpha 3^2 \times 7^2}{10^4} = \frac{2646}{10^4}$$

$X = 3$: سحب ثلاث كرات زرقاء بالضبط $3BB\bar{B}$ ومنه

$$\alpha = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ حيث } P(X = 3) = \frac{\alpha 3^3 \times 7^1}{10^4} = \frac{756}{10^4}$$

$X = 4$: الكرات الأربع المسحوبة زرقاء $4B$ ومنه

$$P(X = 4) = \frac{3^4}{10^4} = \frac{81}{10^4}$$

- قانون احتمال X :

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2401}{10^4}$	$\frac{4116}{10^4}$	$\frac{2646}{10^4}$	$\frac{756}{10^4}$	$\frac{81}{10^4}$

2- حساب الأمل الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P_i = 1.1708 \text{ ومنه } E(X) = \frac{11708}{10^4}$$

حساب التباين:

$$V(x) = \sum_{i=1}^5 (x_i - E(X))^2 P_i \text{ ومنه}$$

$$V(x) = \left(0 - \frac{11708}{10^4}\right)^2 \times \frac{2401}{10^4} + \left(1 - \frac{11708}{10^4}\right)^2 \times \frac{4116}{10^4} + \left(2 - \frac{11708}{10^4}\right)^2 \times \frac{2646}{10^4} + \left(3 - \frac{11708}{10^4}\right)^2 \times \frac{756}{10^4} + \left(4 - \frac{11708}{10^4}\right)^2 \times \frac{81}{10^4} = \dots$$

1- يحتوي صندوق على 9 كرات مرقمة من 1 إلى 9 نسحب بالتتابع (على التوالي) وبدون إرجاع 3 كرات.

1- عدد الإمكانيات: $A_9^3 = 504$.

2- عدد إمكانيات الحصول على 3 كرات تحمل كلها أرقاما زوجية: لدينا أربع كرات تحمل أرقاما زوجية $\{2; 4; 6; 8\}$ ومنه $A_4^3 = 24$.

3- عدد إمكانيات الحصول على:

أ) الكرة الأولى تحمل رقما فرديا وكرتان تحملان رقما زوجيا: $A_5^1 \times A_4^2 = 60$.

ب) كرة واحدة تحمل رقما فرديا فقط: $\alpha A_5^1 \times A_4^2 = 3 \times 60 = 180$

$$\text{حيث } \alpha = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

2- استدعى المسؤول عن الألعاب الجماعية بإحدى الثانويات عشرة تلاميذ لتشكيل فريق كرة السلة، موزعين كالتالي: اثنان من المستوى الأول، ثلاثة من المستوى الثاني وخمسة من المستوى الثالث.

عدد الحالات الممكنة: $C_{10}^5 = 252$.

- عدد الحالات لإختيار:

1- فريق يضم تلميذاً من المستوى الأول، وتلميذاً من المستوى الثاني، وثلاثة تلاميذ من المستوى الثالث: $C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^2 = 60$.

2- فريق يضم تلميذاً من المستوى الثاني، ولا يضم أي تلميذ من المستوى الأول.

$$C_2^0 \times C_3^1 \times C_5^4 = 15$$

3- فريق يضم التلميذ أحمد من المستوى الأول، وتلميذين على الأقل من المستوى الثاني، والباقين من المستوى الثالث: $C_1^1 C_3^2 C_5^2 + C_1^1 C_3^3 C_5^1 = 35$.

3- يحتوي كيس على 10 قرصات تحمل الأرقام: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.

الأرقام 0، 1، 2، 3 و 4 مكتوبة باللون الأحمر مكتوبة باللون الأزرق.

الأرقام 5، 6 و 7 مكتوبة باللون الأزرق.

الرقمان 8 و 9 مكتوبان بالأصفر. لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 قرصات.

- عدد الحالات الممكنة: $C_{10}^3 = 120$.

إحتمال الحصول على:

$$1- \text{ثلاثة أرقام زوجية: } \frac{C_5^3}{120} = \frac{1}{12}$$

2- ثلاثة أرقام لها نفس اللون: BBB أو RRR

$$\frac{C_5^3 + C_5^3}{120} = \frac{11}{120}$$

3- ثلاثة أرقام مختلفة اللون: هي الحادثة العكسية لسحب ثلاثة أرقام لها نفس اللون ومنه:

$$1 - \frac{11}{120} = \frac{109}{120}$$

4- ثلاثة أرقام زوجية لها نفس اللون أي $R_4 R_2 R_0$

$$\text{ومنه: } \frac{C_5^3}{120} = \frac{1}{120}$$

5- ثلاثة أرقام زوجية ألوانها مختلفة مثنى مثنى: $R_4 R_2 R_0$ ، B_6 ، J_8

$$\text{ومنه: } \frac{C_3^1 + C_1^1 + C_1^1}{120} = \frac{1}{40}$$

4- يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء مرقمة بـ: -1، 1، 1، 1 وثلاث كرات سوداء مرقمة بـ: 0، 0، 0. كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس. عدد الحالات الممكنة: $C_7^2 = 21$.

1- احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من نفس اللون أي NN أو BB ومنه

$$\frac{C_4^2 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{7}$$

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المحصل علمها.

- تعيين قيم المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المحصل علمها: $X \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ حيث:

$X = -2$: سحب كرتين في آن واحد تحملان الرقم -1.

(أ) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X: \{0; 1; 2\}$.

$X = 0$: سحب كرتين بيضاوين $2R$ بمعنى لم نسحب كرة حمراء قط.

$X = 1$: سحب كرة حمراء واحدة فقط. RB .

$X = 2$: سحب كرتين حمراوين $2R$.

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$P(X = 0) = \frac{8^2}{144} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = \frac{4^2}{144} = \frac{1}{9}$$

إذن:

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ج) حساب الأمل الرياضي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i \text{ ومنه } E(X) = \frac{2}{3}$$

(8) يحتوي صندوق على 6 بيادق (البندق: الجندي في لعبة الشطرنج) لا يمكن التمييز بينها

باللمس، ثلاث بيادق حمراء تحمل الأرقام: 1, 2, 3 وثلاث بيادق خضراء تحمل الأرقام: 1, 1, 2. نسحب عشوائيا وفي آن واحد بيدقين من الصندوق، وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بالقيمة المطلقة لفرق الرقمين المحصل عليهما.

عدد الحالات الممكنة: $C_6^2 = 15$.

(1) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X: \{0; 1; 2\}$.

$X = 0$: سحب بيدقين يحملان الرقم 2 أو سحب بيدقين يحملان الرقم 1.

$X = 1$: سحب بيدق يحمل الرقم 3 و بيدق يحمل الرقم 2 أو سحب بيدق يحمل الرقم 2 و بيدق يحمل الرقم 1.

$X = 2$: سحب بيدق يحمل الرقم 3 و بيدق يحمل الرقم 1.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

إذن:

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{15}$

(2) حساب الأمل الرياضي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i \text{ ومنه } E(X) = \frac{14}{15}$$

حساب $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X .

أولا نسحب التباين $V(X)$:

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(X))^2 p_i$$

$$= \left(\frac{14}{15}\right)^2 \times \frac{4}{15} + \left(1 - \frac{14}{15}\right)^2 \times \frac{8}{15} + \left(2 - \frac{14}{15}\right)^2 \times \frac{3}{15} = \frac{104}{225}$$

ومنه

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{104}{225}} \approx 0.68$$

(6) يحتوي كيس على 10 صفائح مرقمة من 0 إلى 9 لا يمكن التعرف عليها باللمس. نسحب بالتتابع وبدون إرجاع أربع صفائح ونضعها جنبا إلى جنب من اليسار إلى اليمين في ترتيب السحب بحث نحصل على عدد مكون من أربعة أرقام. نفرض أن جميع السحبات لها نفس الإحتمال، وأن الرقم 0 يمكن أن يكون أول رقم في العدد المحصل عليه. عدد الحالات الممكنة: $A_{10}^4 = 5040$.

(1) احتمال الحصول على العدد 1987:

$$\frac{A_1^1 A_1^1 A_1^1 A_1^1}{5040} = \frac{1}{5040}$$

احتمال الحصول على العدد 1989: بما أن السحب بدون إرجاع ولدينا صفيحة واحدة فقط تحمل الرقم 9 فإنه لا يمكن سحبه مرتين وبالتالي لا يمكننا تشكيل الرقم 1989 وعليه الإحتمال يساوي 0 -حادثة مستحيلة-

(2) احتمال الحصول على عدد مكون من أرقام زوجية فقط $\{0; 2; 4; 6; 8\}$ ومنه $\frac{A_5^4}{5040} = \frac{1}{42}$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأرقام الزوجية المحصل عليها.

قيم المتغير العشوائي $X: \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$X = 0$: عدد مكون من أرقام فردية فقط.

$$P(X = 0) = \frac{A_5^4}{5040} = \frac{1}{42}$$

$X = 1$: عدد مكون من رقم زوجي فقط $3P\bar{P}$ رقم زوجي

$$P(X = 1) = \alpha \frac{A_5^1 A_5^3}{5040} = \frac{5}{21} \text{ حيث } \alpha = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$X = 2$: عدد مكون من رقمين زوجيين فقط $2P2\bar{P}$.

$$P(X = 2) = \alpha \frac{A_5^2 A_5^2}{5040} = \frac{10}{21} \text{ حيث } \alpha = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$X = 3$: عدد مكون من رقم فردي فقط $3P\bar{P}$ أو مكون من ثلاث أرقام زوجية

$$P(X = 3) = \alpha \frac{A_5^3 A_5^1}{5040} = \frac{5}{21} \text{ حيث } \alpha = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$X = 4$: عدد مكون من أرقام زوجية فقط $4P$

$$P(X = 4) = \alpha \frac{A_5^4}{5040} = \frac{1}{42} \text{ حيث } \alpha = \frac{4!}{4!} = 1$$

وهو نفسه السؤال رقم -2-

- قانون احتمال X :

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

(7) (I) يحتوي كيس على 12 كرة غير قابلة للتمييز باللمس، 4 كرات حمراء و 8 كرات بيضاء.

نسحب بالتتابع وبدون إرجاع كرتين من الكيس.

عدد السحبات: $A_{12}^2 = 132$.

(1) احتمال سحب كرتين من نفس اللون: $2R$ أو $2B$.

$$\frac{A_4^2 + A_8^2}{132} = \frac{17}{33}$$

(2) احتمال سحب كرتين أولاهما بيضاء: BR أو $2B$.

$$\frac{A_8^1 A_4^1 + A_8^2}{132} = \frac{2}{3}$$

(II) نسحب بالتتابع وبإرجاع كرتين من الكيس.

- عدد الحالات الممكنة: $12^2 = 144$.

(1) احتمال سحب كرة واحدة حمراء: $\bar{R}R$.

$$\alpha = \frac{2!}{1!1!} = 2 \text{ حيث } \alpha = \frac{4^1 \times 8^1}{144} = \frac{4}{9}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة.

- (أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X = \{3a-3; 3a-2; 3a-1; 3a\}$.
 $X = 3a$: سحب ثلاث كرات تحمل الرقم a .
 $X = 3a-1$: سحب كرتين تحملان الرقم a وكرة تحمل الرقم $a-1$.
 $X = 3a-2$: سحب كرتين تحملان الرقم $a-1$ وكرة تحمل الرقم a .
 $X = 3a-3$: سحب ثلاث كرات تحمل الرقم $a-1$.

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$P(X = 3a) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

$$P(X = 3a-1) = \frac{C_4^2 C_1^1}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$$P(X = 3a-2) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$$P(X = 3a-3) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

إذن:

$X = x_i$	$3a$	$3a-1$	$3a-2$	$3a-3$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

(ج) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة a .

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i$$

$$E(X) = \frac{252a - 140}{84}$$

تحديد a من أجل: $E(X) = 0$

$$\frac{252a - 140}{84} = 0 \Rightarrow 252a - 140 = 0 \Rightarrow a = \frac{35}{63}$$

(11) يحتوي صندوق على تسع كرات: أربع منها بيضاء ومربعة 1, 2, 3, 4 وخمس منها سوداء ومربعة 5, 6, 7, 8, 9.

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق، وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.
 - عدد الحالات الممكنة: $C_9^3 = 84$.

(أ) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X : $X = \{0; 1; 2; 3\}$.

$X = 0$: كل الكرات المسحوبة سوداء.

$X = 1$: سحب كرة بيضاء وكرتين سوداوين.

$X = 2$: سحب كرتين بيضاوين وكرة سوداء.

$X = 0$: كل الكرات المسحوبة بيضاء.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

إذن:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

(ب) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X . $E(X) = \frac{28}{21}$

(2) نسحب عشوائيا على التوالي وبدون إرجاع ثلاث كرات من الصندوق ونعتبر العدد المكون من الأرقام الثلاثة المتحصل عليها حيث الرقم المكتوب على الكرة الأولى هو رقم المئات، والرقم المكتوب على الكرة الثانية هو رقم العشرات، والرقم المكتوب على الكرة الثالثة هو رقم الآحاد.

- عدد الحالات الممكنة: $A_9^3 = 504$

- حساب احتمال الحدثين الآتين:

(9) (I) يحتوي وعاء على 3 قريصات سوداء و 4 حمراء، إحدى القريصات السوداء تحمل الرقم 3 (-1) والآخران تحملان الرقم 3 أما الحمراء فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والآخران تحملان الرقم 3.

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد.

- عدد الحالات الممكنة: $C_7^2 = 21$.

(1) احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون: $2N$ أو $2RR$.

$$\frac{C_3^2 + C_4^2}{21} = \frac{3}{7}$$

استنتاج احتمال الحصول على قريصتين مختلفتين في اللون. $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ الحادثة العكسية للسؤال السابق.

(2) احتمال أن يكون جداء رقمي القريصتين يساوي عددا مائلا: معناه سحب قريصة تحمل رقما سالبا وأخرى تحمل رقما موجبا ومنه:

$$\frac{C_1^1 C_6^1}{21} = \frac{2}{7}$$

(3) احتمال أن يكون مجموع رقمي القريصتين يساوي 3: 0 لأن الحصول على مجموع رقمي القريصتين يساوي 3 مستحيل.

(II) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المحصل عليهما.

(1) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X = \{1; 2; 4; 5; 6\}$.

$X = 1$: سحب قريصة تحمل الرقم 2 وقريصة تحمل الرقم 1.

$X = 2$: سحب قريصة تحمل الرقم 3 وقريصة تحمل الرقم 1.

$X = 4$: سحب قريصتين تحملان الرقم 2.

$X = 5$: سحب قريصة تحمل الرقم 2 وقريصة تحمل الرقم 3.

$X = 6$: سحب قريصتين تحملان الرقم 3.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$P(X = 1) = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{2}{21}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_1^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{8}{21}$$

$$P(X = 6) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

إذن:

$X = x_i$	1	2	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{6}{21}$

(2) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P_i$$

$$E(X) = \frac{90}{21}$$

ومنه:

(10) يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل العدد (a) و 5 كرات تحمل العدد $(a-1)$ حيث $a \in \mathbb{R}$. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق.

عدد الحالات الممكنة: $C_9^3 = 84$.

(1) حساب احتمال الحدثين التاليين:

A: سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{84} = \frac{14}{84}$$

B: سحب كرتين بالضبط تحمل نفس العدد.

$$P(B) = \frac{C_5^2 C_4^1 + C_4^2 C_5^1}{84} = \frac{70}{84}$$

$X = x_i$	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{n}$	$\frac{n-2}{n}$

(ب) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X بدلالة n .

$$E(x) = \frac{2}{n} + \frac{2n-4}{n} = \frac{2n-2}{n}$$

(2) ن سحب هذه المرة n كرة من الكيس على التوالي وبإرجاع.

- عدد الحالات الممكنة: n^n .

• حساب $P(n)$ احتمال سحب n مرة الكرة البيضاء بدلالة n :

$$P(n) = \frac{1^n}{n^n} = \frac{1}{n^n}$$

(3) نضع $U_n = P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. نبين أن المتتالية (U_n) متقاربة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(\frac{1}{n^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln(n^n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \ln(n)} = 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متقاربة.

14

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم وامرأة واحدة اسمها فاطمة. نريد تكوين لجنة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام. عدد اللجان هو: $C_{12}^3 = 220$

(1) حساب احتمال الحوادث التالية:

A : تكوين لجنة تضم ثلاث رجال.

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{14}{55}$$

$$P(B) = \frac{C_8^1 C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{12}{55}$$

$$P(C) = \frac{C_1^1 C_{11}^2}{C_{12}^3} = \frac{55}{220}$$

$$P(D) = \frac{2C_1^1 C_{10}^2}{C_{12}^3} = \frac{9}{22}$$

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرقى بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة.

(1) القيم الممكنة لـ X : $X = \{0; 1; 2; 3\}$.

$X = 0$ اللجنة المكونة تضم النساء فقط.

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{55}$$

$X = 1$ اللجنة المكونة تضم رجلا واحدا فقط.

$$P(X=1) = P(B) = \frac{12}{55}$$

$X = 2$ اللجنة المكونة تضم رجلين.

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{28}{55}$$

$X = 3$ اللجنة المكونة تضم ثلاثة رجال.

$$P(X=3) = P(A) = \frac{14}{55}$$

قانون احتماله:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

(ب) حساب الأمل الرياضي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i \quad \text{ومنه } E(X) = 2$$

$$V(X) = \frac{6}{11} \quad \text{التباين للمتغير العشوائي } X$$

15

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2 (كل الكرات متشابهة لانفرق بينها باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

- عدد الحالات الممكنة: $C_9^3 = 84$.

E_1 : الحصول على عدد أصغر من 300: معناه الكرة المسحوبة الأولى (رقم المئات) تحمل الرقم 1 أو الرقم 2 والكرتين المتبقيتين من الكيس، أي:

$$P(E_1) = \frac{A_2^1 A_8^2}{A_9^3} = \frac{61}{252}$$

E_2 : الحصول على عدد زوجي معناه يكفي أن يكون رقم الاحاد زوجيًا، ومنه:

$$P(E_2) = \frac{A_4^1 A_8^2}{A_9^3} = \frac{4}{9}$$

12

يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة، يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا.

- المهام محددة هنا نستعمل الترتيبات-

(1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها: $A_{30}^3 = 24360$

(2) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث:

(ا) يكون الأمين تلميذة:

$$A_{12}^1 \times A_{29}^2 = 9744$$

(ب) التلميذ X موجود في اللجنة:

يمكن أن يكون التلميذ X رئيسا أو نائبا أو أمينا، ومنه: $3 \times A_1^1 \times A_{29}^2 = 2436$

(ج) يكون الرئيس تلميذا والأمين تلميذة: أما الأمين لم يشترط الجنس.

$$A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^2 = 6084$$

(د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين:

إما الرئيس ذكرا والنائب أنثى

وإما الرئيس أنثى والنائب ذكر، ومنه:

$$2 \times A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^2 = 12096$$

(3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y.

- عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف هو:

أولا في حالة: التلميذ X موجود في اللجنة رئيس أو نائب والتلميذة Y غير موجودة:

$$A_{17}^1 \times A_{11}^1 \times A_{27}^1 + A_{17}^1 \times A_{11}^1 \times A_{11}^1 = 484$$

ثانيا في حالة: التلميذة Y موجودة في اللجنة أمين أو نائب والتلميذ X غير موجود:

$$A_{17}^1 \times A_{11}^1 \times A_{27}^1 + A_{17}^1 \times A_{11}^1 \times A_{11}^1 = 646$$

ثالثا: التلميذ X والتلميذة Y غير موجودين في اللجنة، معناه:

$$A_{17}^1 \times A_{11}^1 \times A_{26}^1 = 4862$$

ومنه عدد اللجان هو: $484 + 646 + 4862 = 5992$

13

(1) يحتوي كيس على كرة واحدة بيضاء و $(n-1)$ كرة سوداء. $(n > 1)$ نسحب عشوائيا على التوالي وبدون إرجاع كرتين من الكيس. وليكن X عدد الكرات السوداء المسحوبة.

- عدد الحالات الممكنة: $A_n^2 = n(n-1)$

(ا) قانون احتمال المتغير العشوائي X .

قيم X : $X = \{1; 2\}$

$X = 1$: سحب كرة سوداء و كرة بيضاء.

$$P(X=1) = \alpha \frac{A_{n-1}^n A_1^1}{A_n^2} = 2 \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

$$\alpha = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$X = 2$: سحب كرتين سوداوين.

$$P(X=2) = \frac{A_{n-1}^2}{A_n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n}$$

إذن:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(3) حساب الأمل الرياضي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i \text{ ومنه } E(X) = \frac{6}{5}$$

17 (I) كيس به 7 كرات متماثلة، لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس. - عدد الحالات الممكنة: $C_7^2 = 21$.

(1) حساب احتمال الحادثة: "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

$$\frac{C_4^1 C_3^1}{21} = \frac{4}{7}$$

(2) حساب احتمال الحادثة: "سحب كرتين من نفس اللون".

$$\frac{C_4^2 + C_3^2}{21} = \frac{3}{7}$$

(II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب (DA)، حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري.

فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100 DA$ ، وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50 DA$ ، وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

(1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha, 50 - \alpha, 100 - \alpha\}$ - إذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100 DA$ ويدفع α إذن ربح: $X = 100 - \alpha$ - إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50 DA$ ويدفع α إذن ربح: $X = 50 - \alpha$ - إذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه إذن يخسر: $X = -\alpha$

- قانون احتماله:

$$P(X = 100 - \alpha) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(X = 50 - \alpha) = \frac{4}{7}$$

$$P(X = -\alpha) = \frac{C_4^2}{21} = \frac{2}{7}$$

ومنه:

$X = x_i$	$100 - \alpha$	$50 - \alpha$	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(2) نبين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي بدلالة α هو: $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$

$$E(X) = \frac{1}{7}(100 - \alpha) + \frac{4}{7}(50 - \alpha) - \alpha \frac{2}{7} = \frac{300 - 7\alpha}{7} = -\alpha + \frac{300}{7}$$

أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب: يكافئ $E(X) > 0$

$$\text{ومنه: } -\alpha + \frac{300}{7} > 0 \text{ إذن } -\alpha < -\frac{300}{7} \text{ وعليه: } \alpha < 42.85 \text{ (DA) } \alpha = 42$$

18 كيس يحوي 9 كرات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كرات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 و ثلاث كرات خضراء مرقمة بـ: (-3)، 2، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ: (-1).

نسحب عشوائيا 4 كرات في آن واحد.

- عدد الحالات الممكنة: $C_9^4 = 126$

(1) حساب احتمال الحوادث التالية:

A: "الحصول على أربع كرات من نفس اللون".

$$P(A) = \frac{C_5^4}{126} = \frac{5}{126}$$

(1) حساب احتمال الحوادث التالية:

(أ) الحادثة A: "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_5^2}{84} = \frac{10}{21}$$

(ب) الحادثة B: "الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر".

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_5^2 C_4^1 + C_5^1 C_4^2}{84} = \frac{20}{21}$$

(ج) الحادثة C: "الحصول على ثلاث كرات تحمل أرقاما غير أولية".

$$P(C) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$$

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل أرقاما أولية.

(أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X: $X = \{0; 1; 2; 3\}$ $X = 0$ الكرات المسحوبة لا تحمل رقما أوليا.

$$P(X = 0) = P(C) = \frac{1}{21}$$

 $X = 1$: من بين الكرات المسحوبة توجد واحدة فقط تحمل رقما أوليا

$$P(X = 1) = \frac{C_4^2 C_5^1}{84} = \frac{5}{14}$$

 $X = 2$: من بين الكرات المسحوبة توجد كرتان فقط تحملان رقما أوليا.

$$P(X = 2) = \frac{C_4^1 C_5^2}{84} = \frac{10}{21}$$

 $X = 3$: سحب ثلاث كرات تحمل أرقاما أولية.

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{5}{42}$$

قانون الإحتمال:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

(ب) حساب $P(X^2 - X \leq 0)$:

$$P(X^2 - X \leq 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{17}{42}$$

16 كيس به 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

(1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد.

عدد الحالات الممكنة: $C_{10}^3 = 120$

$$(أ) \text{ احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء: } \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}$$

(ب) احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء:

الحصول على الأقل على كرية حمراء هو الحادثة العكسية للحصول على 3 كرات بيضاء

$$\text{ومنه: } 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

- قيم المتغير العشوائي X: $X = \{0; 1; 2; 3\}$ $X = 0$ سحب 3 كرات حمراء.

$$P(X = 0) = \frac{C_6^3}{220} = \frac{1}{6}$$

 $X = 1$: سحب كرية بيضاء و كرتين حمراوين.

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{220} = \frac{1}{2}$$

 $X = 2$: سحب كرتين بيضاوين و كرية حمراء.

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{220} = \frac{3}{10}$$

 $X = 3$: سحب ثلاث كرات بيضاء.

$$P(X = 3) = \frac{1}{30}$$

قانون الإحتمال:

$$C_{5+n}^2 = \frac{(5+n)!}{2!(3+n)!} = \frac{(5+n)(4+n)(3+n)!}{2(3+n)!} = \frac{(5+n)(4+n)}{2}$$

ونعتبر اللعبة التالية : سحب كرة سوداء يعطي 10 - نقطة وسحب كرة حمراء يعطي 5 نقطة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع النقاط المحصل عليها.

(1)

(2) قيم المتغير العشوائي X : $X = \{-20; -5; 10\}$

$X = -20$ سحب كرتين سوداوين .

$$P(X = -20) = \frac{C_5^2}{\frac{(5+n)(4+n)}{2}} = \frac{20}{(5+n)(4+n)}$$

$X = -5$: سحب كرة سوداء وكرة حمراء .

$$P(X = -5) = \frac{C_n^1 C_5^1}{\frac{(5+n)(4+n)}{2}} = \frac{10 \frac{n!}{(n-1)!}}{(5+n)(4+n)} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$X = 10$: سحب كرتين حمراوين

$$P(X = 10) = \frac{C_n^2}{\frac{(5+n)(4+n)}{2}} = \frac{2 \frac{n!}{2!(n-2)!}}{(n+5)(n+4)} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

قانون الإحتمال :

$X = x_i$	-20	-5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{(5+n)(4+n)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

(3) تعيين عدد الكرات الحمراء المضافة حتى تصبح اللعبة عادلة ، يكافئ : $E(X) = 0$ ، ومنه:

$$E(x) = \frac{-400 - 50n + 10n^2 - 10n}{(5+n)(4+n)} = \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+5)(n+4)} = 0$$

أي: $10n^2 - 60n - 400 = 0$ يكافئ $n^2 - 6n - 40 = 0$ ومنه $n = 10$

(20) يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و أربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4

(1) نبين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42.

المهام محددة نستعمل الترتيبات ومنه: $A_7^2 = 42$

(2) أ) حساب احتمال الحادثة A "اللجنة من نفس الجنس" أي HH أو FF :

$$P(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{42} = \frac{3}{7}$$

استنتاج احتمال الحادثة B "اللجنة من جنسين مختلفين" :

B هي الحادثة العكسية للحادثة A ومنه :

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{7}$$

(ب) حساب احتمال الحادثة C " H_1 هو الرئيس" :

$$P(C) = \frac{A_1^1 \times A_6^1}{42} = \frac{1}{7}$$

حساب احتمال الحادثة D "اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1 :

توجد لجنتان تضمان H_1 و F_1 معاً وهما: $H_1 F_1$ أو $F_1 H_1$ ومنه عدد اللجان التي لا تضم كلا من H_1 و F_1 هو: $40 = 42 - 2$ وعليه:

$$P(D) = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}$$

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها .

- قيم المتغير العشوائي X : $X = \{0, 1, 2\}$

$X = 0$: اللجنة تضم النساء فقط.

$$P(X = 0) = \frac{A_4^2}{42} = \frac{2}{7}$$

B : "الحصول على كرة بيضاء على الأكثر" .

$$P(B) = \frac{C_1^1 C_8^3 + C_8^4}{126} = 1$$

C : " الحصول على أربع كرات مجموع أرقامها معدوم " . أي أرقام الكرات المسحوبة تكون: $3; -1; 1; 1; 3$ أو $2; -1; 2; -1; 3$ ومنه:

$$P(C) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1 C_4^2}{126} = \frac{4}{63}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الخضراء المتبقية في الكيس .

(1) قيم المتغير العشوائي X : $X = \{0; 1; 2; 3\}$

$X = 0$ سحب 3 كرات خضراء .

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3 C_6^1}{126} = \frac{1}{21}$$

$X = 1$: يتبقى في الكيس كرة خضراء واحدة أي سحب كرتين خضراوين .

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 C_6^2}{126} = \frac{5}{14}$$

$X = 2$: سحب كرة خضراء واحدة

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 C_6^3}{126} = \frac{10}{21}$$

$X = 3$: عدم سحب أي كرة تحمل اللون الأخضر .

$$P(X = 3) = \frac{C_6^4}{126} = \frac{5}{42}$$

قانون الإحتمال :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{121}$	$\frac{5}{42}$

(ب) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(x) = \frac{5}{3}$$

(ج) حساب احتمال الحادثة : " $X^2 - X > 0$ " .

$$P(X^2 - X > 0) = P(X(X-1) > 0)$$

$$P(X^2 - X > 0) = P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{25}{42}$$

ومنه :

(19) صندوق يحتوي على 5 كرات سوداء مرقمة بـ 0, 2, 2, 2, 2 وكرتين خضراوين مرقمتين بـ 2, 4 . جميع الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع :

- عدد الحالات الممكنة: $7^3 = 343$

(1) احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأكثر: $2NV$ أو $2V$ أو $0N3V$ ، ومنه :

$$\frac{\alpha(5^2 \times 2^1 + 5^1 \times 2^2) + 2^3}{343} = \frac{3(50 + 20) + 8}{343} = \frac{218}{343}$$

$$\alpha = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

(2) حساب احتمال الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامهم 6 .

أي الكرات المسحوبة تحمل الأرقام: 2, 2, 2 أو 2, 4, 0 ، ومنه:

$$\frac{5^3 + \alpha(5^1 \times 1^1 \times 1^1)}{343} = \frac{125 + 30}{343} = \frac{155}{343}$$

$$\alpha = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$$

(3) حساب احتمال أن تكون الكرات المسحوبة سوداء ومجموع أرقام الكرات 6 .

$$\frac{4^3}{343} = \frac{64}{343}$$

أي: $3N_2$ ، ومنه :

نزع الكرتين الخضراوين من الصندوق ونضع مكانها n كرة حمراء . ثم نسحب عشوائيا كرتين في أن واحد .

- عدد الحالات الممكنة:

$X = 1$: اللجنة تضم رجلا فقط.

$$P(X = 1) = P(B) = \frac{4}{7}$$

$X = 2$: اللجنة تضم رجلين.

$$P(X = 2) = \frac{A_3^2}{42} = \frac{1}{7}$$

تعيين قانون احتمال X :

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

(4) حساب الأمل الرياضي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \text{ ومنه } E(X) = \frac{6}{7}$$

ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.

(21) I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

عدد الحالات الممكنة هو : $C_9^3 = 84$

(1) حساب احتمال كل حادثة من الحوادث: $A, B, C, A \cap C$ و $A \cup C$

الحادثة $A: (R, R, R), (B, B, B)$

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{4 + 1}{84} = \frac{5}{84}$$

الحادثة $B: (0, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 2, -2), (-1, -1, 2), (-2, 1, 1)$

إذن :

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^2 \times C_1^1 + C_2^2 \times C_1^1}{C_9^3} = \frac{1 + 12 + 3 + 1 + 1}{84} = \frac{18}{84}$$

الحادثة C :

$$P(C) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \frac{1 + 9}{84} = \frac{10}{84}$$

الحادثة $A \cap C: (R_1, R_2, R_{-1})$

$$p(A \cap C) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$$

الحادثة $A \cup C$:

$$P(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{5 + 18 - 1}{84} = \frac{22}{84}$$

(2) أ) قيم المتغير العشوائي X هي $\{-1, 0, 1, 2\}$

$X = -1$ معناه أكبر الأعداد المسحوبة هو -1 ومنه

$$P(X = -1) = \frac{C_2^2 \times C_1^1}{C_9^3} = \frac{1}{84}$$

$X = 0$ معناه أكبر الأعداد المسحوبة هو 0 ومنه

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \frac{1 + 9 + 9}{84} = \frac{19}{84}$$

$X = 1$ معناه أكبر الأعداد المسحوبة هو 1 ومنه

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_6^2 + C_2^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{30 + 6}{84} = \frac{36}{84}$$

$X = 2$ معناه أكبر الأعداد المسحوبة هو 2 ومنه

$$P(X = 2) = \frac{C_1^1 \times C_8^2}{C_9^3} = \frac{28}{84}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$X = x_i$	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{36}{84}$	$\frac{28}{84}$

(ب) حساب الأمل الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \frac{-1 \times 1 + 0 \times 19 + 1 \times 36 + 2 \times 28}{84} = \frac{91}{84}$$

(II) نسحب الآن ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع.

عدد الحالات الممكنة: $A_9^3 = 504$

$$P(D) = \frac{A_5^3 + 3A_5^2 \times A_4^1 + 3A_5^1 \times A_4^2}{A_9^3} = \frac{60 + 240 + 180}{504} = \frac{480}{504} = \frac{20}{21}$$

طريقة 2: باستعمال الحادثة العكسية لـ D

أي $\bar{D}$: جداء يساوي عدد فردي ومنه :

$$P(D) = 1 - \frac{A_4^3}{504} = \frac{20}{21}$$

(I) 22) I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 كرات ومنه عدد الحالات الممكنة هو: $C_{10}^4 = 210$

$$(1) \text{ نبيّن أن: } P(B) = \frac{29}{105}$$

B : "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

أي $2B2R - 2B2V - 2R2V - 3B(R, V, N) - 3R(B, V, N)$

$$P(B) = \frac{C_4^2 C_3^2 + C_4^2 C_2^2 + C_3^2 C_2^2 + C_4^3 C_6^1 + C_3^3 C_7^1}{210} = \frac{58}{210} = \frac{29}{105}$$

حساب $P(A)$ و $P(C)$:

A : "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة مثنى مثنى". أي: $BVRN$

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{210} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

C : "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقمًا زوجيًا"

$\bar{C}$: الحادثة العكسية للحادثة C أي كل الكرات تحمل رقما فرديا

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_4^4}{210} = \frac{209}{210}$$

ومنه :

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

$$(1) \text{ نبيّن أن: } P(X = 3) = \frac{127}{210}$$

$X = 3$: معناه الحصول على 3 ألوان لما نسحب 4 كرات في آن واحد أي:

	2VBN	2RBV	2BRV
ومنه	2VBR	2RBN	2BNV
	2VRN	2RVN	2BNR

$$P(X = 3) = \frac{C_4^2 C_2^1 C_3^1 + C_4^2 C_1^1 C_2^1 + C_4^2 C_1^1 C_3^1 + C_3^2 C_1^1 C_2^1 + C_3^2 C_1^1 C_4^1}{210} + \frac{C_3^2 C_2^1 C_4^1 + C_2^2 C_4^1 C_3^1 + C_2^2 C_4^1 C_1^1}{210} = \frac{127}{210}$$

تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

- قيم المتغير العشوائي $X: \{1; 2; 3; 4\}$ ، حيث:

$X = 1$: الحصول على 4 كرات لها نفس اللون أي $4B$ ومنه:

$$P(X = 1) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$$

$X = 2$ الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط (الحادثة B) ومنه

$$P(X = 2) = P(B) = \frac{58}{210}$$

$$P(X = 3) = \frac{127}{210} \text{ الكريات المسحوبة تحمل 3 ألوان :}$$

$X = 4$ الكريات المسحوبة تحمل 4 ألوان (الحادثة A) ومنه :

$$P(X = 4) = P(A) = \frac{24}{210}$$

ومنه تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

$$(ب) \text{ حساب الأمل الرياضي } E(X) \text{ للمتغير العشوائي } X: E(X) = \frac{99}{35}$$

(II) نسحب الآن عشوائياً على التوالي و من دون إرجاع أربع كرات من هذا الصندوق. عدد

الحالات الممكنة : $A_{10}^4 = 5040$

$$(1) \text{ حساب } P(D) = \frac{A_3^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times A_4^1}{5040} = \frac{1}{70}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{120} = \frac{15}{120}$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{120} = \frac{30}{120}$$

$$P(X=8) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}$$

8	4	2	1	0	X
$\frac{10}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{64}{120}$	$P(X=x)$

$$E(X) = 0 \times \frac{64}{120} + 1 \times \frac{1}{120} + 2 \times \frac{15}{120} + 4 \times \frac{30}{120} + 8 \times \frac{10}{120}$$

$$E(X) = \frac{231}{120}$$

(2) نضع A الحصول على ثلاث كرات تحمل كل منها رقما زوجيا ،

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_2^2 \times C_5^1 + C_5^2 \times C_2^1}{120} = \frac{35}{120}$$

(3) عدد الحالات الممكنة للسحب هي: $A_{10}^2 = 90$ ،

(أ) نضع S : الحادثة : الحصول على رقمين مجموعهما فردي المجموع فردي معناه الرقمين من شفتين مختلفتين

$$P(S) = \frac{2 \times A_2^1 \times A_3^1 + 2 \times A_3^1 \times A_5^1}{90} = \frac{42}{90}$$

$$P(S) = \frac{21}{45}$$

(ب) D الحادثة: الحصول على رقمين جداؤهما زوجي.

الجداء زوجي معناه الرقمان زوجيان أو أحدهما فردي والآخر زوجي ومنه

$$P(D) = \frac{2 \times A_5^1 + A_2^1 + A_2^2 \times A_5^1 + 2 \times A_2^1 \times A_3^1 + 2 \times A_3^1 \times A_5^1}{90}$$

$$P(D) = \frac{84}{90}$$

$$P(D) = \frac{14}{15}$$

عدد الكرات بالألوان 3B و 2N (25)

(1) قيم المتغير X تتعلق بعدد الكرات السوداء المسحوبة وعليه قيم X هي 0 ، 1 و 2 ومنه الإجابة الصحيحة هي : (ج) .

(2) الأمل الرياضي: عدد الحالات الممكنة هو C_5^3 .

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{10} = \frac{1}{10} , P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{10} = \frac{6}{10}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \frac{0+6+6}{10} = \frac{6}{5}$$

(3) احتمال الحصول على كرة سوداء تحمل الرقم 1 هو $\frac{3}{5}$ ومنه الإجابة الصحيحة هي (ج) .

(4) باقي مجموع المربعات $1^2 + 2^2 + 3^2 \equiv 1[13]$ ، $1^2 + 2^2 + 2^2 \equiv 9[13]$ ، $1^2 + 2^2 + 1^2 \equiv 6[13]$ ، $2^2 + 2^2 + 3^2 \equiv 4[13]$ و $1^2 + 1^2 + 3^2 \equiv 11[13]$ ،

وا احتمال أن يكون مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة على 13 هو 1 :

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{10} = \frac{2}{5}$$

(أ) .

(23) ① عدد السحبات: $C_{20}^2 = 190$.

(1) حساب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

C : "الشخصان المختاران من نفس الفصيلة الدموية" .

$$P(C) = \frac{C_6^2 + C_8^2 + C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{53}{190}$$

D : "الشخصان المختاران من فصيلتين مختلفتين" .

$$P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{53}{190} = \frac{137}{190}$$

E : فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط .

$$P(E) = \frac{C_8^1 C_{12}^1}{190} = \frac{48}{95}$$

(2) $E \cap D$: "الشخص المختار يحمل فصيلة A والآخر يحمل فصيلة مختلفة عن A"

$$P(E \cap D) = P(E) = \frac{48}{95}$$

نلاحظ أن $E \subset D$ ومنه $E \cap D = E$ و بالتالي

$$P(\bar{E} \cap \bar{D}) = P(\bar{E} \cap D) = 1 - P(E \cap D) = 1 - \frac{48}{95} = \frac{47}{95}$$

(II) المتغير العشوائي الذي يربط بكل اختيار لشخصين بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما.

(1) القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X:

لما نختار شخصين يحملان فصيلة O فإن قيمة X المرفقة هي :

$X = 4 + 4 = 8$ بنفس الطريقة نكمل مع جميع المخرج فنجد:

$$X = \{3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 C_8^1 + C_1^1 C_5^1}{190} = \frac{13}{190}$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2 + C_5^2 + C_8^1 C_5^1}{190} = \frac{78}{190}$$

$$P(X=5) = \frac{C_6^1 C_1^1}{190} = \frac{6}{190}$$

$$P(X=6) = \frac{C_6^1 C_8^1 + C_6^1 C_5^1}{190} = \frac{13}{190}$$

$$P(X=8) = \frac{C_6^2}{190} = \frac{15}{190}$$

ومنه قانون احتمال X:

x_i	3	4	5	6	8
$P(X=x_i)$	$\frac{13}{190}$	$\frac{78}{190}$	$\frac{6}{190}$	$\frac{78}{190}$	$\frac{15}{190}$

(2) حساب الأمل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P_i$:

$$E(X) = 3 \times \frac{13}{190} + 4 \times \frac{78}{190} + 5 \times \frac{6}{190} + 6 \times \frac{78}{190} + 8 \times \frac{15}{190} = \frac{51}{10}$$

(3) حساب $P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23})$:

$$P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23}) = P(X^2 - 9X + 1 \leq X - 23)$$

$$P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23}) = P(X^2 - 10X + 24 \leq 0)$$

$$P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23}) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$P(e^{X^2-9X+1} \leq e^{X-23}) = \frac{78+6+78}{190} = \frac{81}{95}$$

(24)

(1) عدد الحالات الممكنة للسحب هي $C_{10}^3 = 120$ ، القيم الممكنة ل X هي $\{0, 1, 2, 4, 8\}$.

قانون احتمال X :

$$P(X=0) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{64}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$