

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
المفتشية العامة للتربية الوطنية

الدوال الأصلية و الحساب التكاملي

يوم تكويني لفائدة أساتذة

المقاطعة الجزائر شرق 03

من إعداد أساتذة المقاطعة

تحت إشراف

بإدي ربيعي

مفتش التربية الوطنية

جانفي 2022

www.dzexams.com

المحتوى المعرفي : ✨ الدوال الأصلية. الحصة : الأولى (ساعة واحدة)

الكفاءة المستهدفة : ✨ تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال .

✨ تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة .

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

نشاط: الدوال العددية f ، F و G معرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$G(x) = \ln(x^2 - 1) + 3 \quad \text{و} \quad F(x) = \ln(x^2 - 1) , \quad f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = f(x)$

حل النشاط: لدينا من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $F'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = f(x)$ و $G'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = f(x)$

الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

نسمة دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

أمثلة

(1) من النشاط السابق الدالتان F و G دالتان أصليتان للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

(2) الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = x^2 + x + e^x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
 $f(x) = 2x + 1 + e^x$

(3) الدالة G المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $G(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ هي دالة أصلية

للدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة (خواص تقبل دون برهان):

- إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل على الأقل دالة أصلية على I .

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f

على I هي الدوال : $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال 1: الدالة G المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $G(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ هي دالة أصلية

للدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

وعليه الدوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$ هي الدوال $x \mapsto \frac{1}{x} + \sqrt{x} + k$ حيث k ثابت حقيقي

مثال 2: الدالة $F: x \mapsto x^3 + x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f: x \mapsto 3x^2 + 1$

وعليه الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^3 + x + k$ حيث k ثابت حقيقي

تقويم: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + e^{x-1}$

(1) بين أن الدالة f تقبل دوالاً أصلية على $\mathbb{R}$

(2) عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(3) عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(1) = 5$.

حل:

(1) الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالاً أصلية على $\mathbb{R}$

(2) لدينا الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال : $x \mapsto x^2 + e^{x-1} + k$ حيث k عدد حقيقي.

(3) لدينا من جهة $F(x) = x^2 + e^{x-1} + k$ و لدينا من جهة ثانية : $F(1) = 5$.

$F(1) = 5$ يعني $1 + e^0 + k = 5$ أي $k = 3$. نجد هكذا أن $F(x) = x^2 + e^{x-1} + 3$

الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I . و x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كفي .

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط : $F(x_0) = y_0$

تقويم: F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$ و $G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$

(1) تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة f على $\mathbb{R}$ (أ) بحساب الفرق $F(x) - G(x)$ ، (ب) باستعمال المشتق

(2) عين الدالة الأصلية H للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق : $H(1) = 5$

تقويم: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (3x + 1)e^{-x}$.

أحسب العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = (ax + b)e^{-x}$

الجواب: $a = -3$ و $b = -4$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تقويم:

لتكن الدالة G المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $G(x) = (ax + b) \ln x$.

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{2x - 3 + 2x \ln x}{x}$

(1) أحسب العددين a و b لكي تكون الدالة G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$ التي تتعدم من أجل e القيمة للمتغير x .

ط:

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $G'(x) = g(x)$

نجد : $G(x) = (2x - 3) \ln x$

(2) F دالة أصلية أخرى لـ f على $]0; +\infty[$: $F(x) = G(x) + k$

$F(e) = 0$ تكافئ : $G(e) + k = 0$ نجد : $k = 3 - 2e$

المحتوى المعرفي : $\blacktriangleright$ الدوال الأصلية. الحصة : الثانية (ساعتين)

الكفاءة المستهدفة : $\blacktriangleright$ الدوال الأصلية لدوال مألوقة و العمليات على الدوال الأصلية.

3. الدوال الأصلية لدوال مألوقة : يستنتج من مشتقات دوال مألوقة.

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F . يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x) =$ إذا كان :	$F(x) =$ فإن :	$I =$
a (a عدد حقيقي)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$; $(k \in \mathbb{Z})$

خواص: (1) إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$ على I

(2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I ، $(k \in \mathbb{R})$.

نتائج:

. كل دالة كثير حدود تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.

. كل دالة ناطقة تقبل دوالا أصلية على أي مجال من مجموعة تعريفها .

تقويم:

عين دالة أصلية F للدالة f على المجال I في الحالتين:

$$(1) \quad I =]0; +\infty[, \quad f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2} + e^x \quad (2) \quad I = [1; 2] , \quad f(x) = 4x^2 + \frac{5}{x} - 3\sqrt{x}$$

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$(n \in \mathbb{N}^*) u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	
$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u' e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$	

يشار إلى أن الدالة $\ln|u| + c$ أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ على المجال I بحيث :

$u(x) > 0$ من أجل كل x من I ، أو $u(x) < 0$ من أجل كل x من I .

تقويم (1) وتطبيقات منزلية :

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية F للدالة f على المجال I :

$$I = \mathbb{R} , f(x) = e^{2x} (1 - e^{2x})^2 \quad (2) \quad I =]-1; +\infty[, f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} , f(x) = \frac{e^x - 1}{(x - e^x)^2} \quad (4) \quad I =]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} \ln(x^2) \quad (3)$$

$$I =]-\infty; 0[, f(x) = e^{2x} + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (6) \quad I = \mathbb{R} , f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad (5)$$

$$I = [0; \pi] , f(x) = 2\sin(2x)\cos(4x) \quad (8) \quad I =]0; +\infty[, f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \quad (7)$$

$$I =]2; +\infty[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} e^{\sqrt{x-2}} \quad (9)$$

تقويم (2)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - (x-1)e^{-x}$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = 1 - e^{-x} - f'(x)$

(ب) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$F(x) = 2 \frac{x^2}{2} + x + \frac{-1}{x+1} = \boxed{x^2 + x - \frac{1}{x+1}} : \text{إذن } u(x) = x + 1 : \text{مع } f(x) = ax + b + \frac{u'(x)}{(u(x))^2} \quad (1)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \frac{(u(x))^3}{3} = \boxed{-\frac{1}{6}(1-e^{2x})^3} : \text{و منه } u(x) = 1 - e^{2x} : \text{حيث } f = -\frac{1}{2} u' \times u^2 \quad (2)$$

$$F(x) = \frac{(u(x))^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}(\ln x)^3} : \text{و منه } u(x) = \ln(x) : \text{حيث } f = u' \times u^2 \quad (3)$$

$$c \text{ ثابت حقيقي } F(x) = \frac{(u(x))^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}(\ln x)^3 + c} : \text{و منه } u(x) = \ln(x) : \text{حيث } f = -\frac{u'}{u^2} \quad (4)$$

$$F(x) = \ln |e^x - x| = \boxed{\ln(e^x - x)} : \text{و منه } (e^x - x > 0) \text{ و } u(x) = e^x - x : \text{حيث } f = \frac{u'}{u} \quad (5)$$

$$]-\infty; 0[\text{ على } e^x - 1 < 0 \text{ و } u(x) = e^x - 1 : \text{حيث } f(x) = e^{ax+b} + 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (6)$$

$$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + x - \ln |u(x)| = \boxed{\frac{1}{2} e^{2x} + x - \ln(1 - e^x)} : \text{و منه}$$

$$F(x) = 2 \times (2\sqrt{u(x)}) = \boxed{4\sqrt{e^x - 1}} : \text{و منه } u(x) = e^x - 1 : \text{حيث } f = 2 \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \quad (7)$$

$$F(x) = 2 \times -\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + \frac{1}{4} \sin(4x) = -\cos(2x + 3) + \frac{1}{4} \sin(4x) \quad (8)$$

$$F(x) = 2 \times e^{u(x)} = 2 \times e^{\sqrt{x-2}} : \text{و منه } u(x) = \sqrt{x-2} : \text{حيث } f = 2 \times (u' e^u) \quad (9)$$

الأجوبة: - تقويم (2) -

أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 - [e^{-x} - e^{-x}(x-1)] = 1 + e^{-x}(x-2)$

من جهة : $1 - e^{-x} - f'(x) = 1 - e^{-x} - 1 - e^{-x}(x-2) = -e^{-x}(x-1)$

و من جهة ثانية : $f(x) - x = -(x-1)e^{-x}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = 1 - e^{-x} - f'(x)$

ب) لدينا $f(x) - x = 1 - e^{-x} - f'(x)$ معناه : $f(x) = x + 1 - e^{-x} - f'(x)$

نستنتج أن : $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + e^{-x} - f(x)$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + e^{-x} - x + (x-1)e^{-x} = \frac{x^2}{2} + x e^{-x}$$

المحتوى المعرفي : الدوال الأصلية. الحصة : الثالثة (ساعة واحدة)

الكفاءة المستهدفة : حل معادلات تفاضلية من الشكل : $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$.

نشاط: نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلتين التفاضليتين : (1) $y' = 4e^{2x} + e^{-x}$ و (2) $y'' = 4e^{2x} + e^{-x}$.

- عين في $\mathbb{R}$ الدوال الأصلية G للدالة: $x \rightarrow 4e^{2x} + e^{-x}$ ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة (1) .
- عين في $\mathbb{R}$ الدوال الأصلية F للدوال G ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة (2) .

(1) المعادلات التفاضلية من الشكل : $y' = f(x)$

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = F(x) + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $]0; +\infty[$ هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{x} + c$ مع c ثابت حقيقي.

تقويم:

- (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : (E) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$. **الجواب:** $F(x) = \ln(x^2 + 1) + c$
- (2) عين حلا خاصا F للمعادلة (E) بحيث: $F(\sqrt{e-1}) = 1$. نجد: $c = 0$

(2) المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'' = f(x)$

مبرهنة:

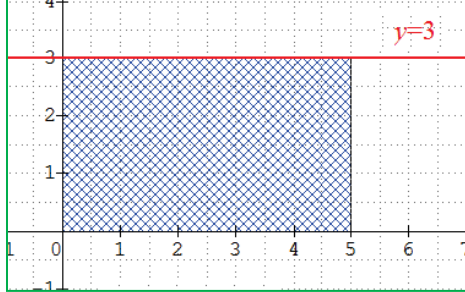
إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وإذا كانت F دالة أصلية لها على I وكانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = G(x) + \alpha x + \beta$ مع α و β عددين حقيقيين ثابتين.

تقويم: (1) حل في المجال $]1; +\infty[$ للمعادلة التفاضلية : (E) $y'' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

(2) عين حلا خاصا F للمعادلة (E) بحيث: $F(2) = 0$ و $F'(2) = 1$ **الجواب:** $F(x) = -\ln(x-1) + 2x - 4$

1. مفهوم التكامل:

نشاط: نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$.



(1) f_1 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_1(x) = 3$.

(C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين 0 و 5.

1. أحسب بـ cm^2 المساحة A_1 .

2. عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.

3. أحسب $F_1(5) - F_1(0)$.

(2) f_2 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_2(x) = -x + 3$.

و (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز بـ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 3$ و $x = -1$.

1. أحسب بـ cm^2 المساحة A_2 .

2. عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$.

3. أحسب $F_2(3) - F_2(-1)$.

(3) f_3 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_3(x) = \frac{3}{2}x$.

و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز بـ A_3 إلى مساحة الحيز مجموعة النقط $M(x; y)$

من المستوي حيث: $1 \leq x \leq 3$ و $0 \leq y \leq f_3(x)$

1. أحسب بـ cm^2 المساحة A_3 .

2. عين دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$.

3. أحسب $F_3(3) - F_3(1)$.

(4) ماذا تلاحظ في الحالات الثلاث؟ ضع تخميناً

حل النشاط: (1) $A_1 = 5 \times 3 = 15 cm^2$ (2) $F_1(x) = 3x$ (3) $F_1(5) - F_1(0) = 3 \times 5 - 3 \times 0 = 15$

(2) $A_2 = \frac{4 \times 4}{2} = 8 cm^2$ (2) $F_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ (3) $F_2(3) - F_2(-1) = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = 8$

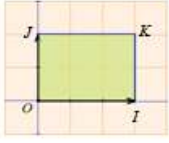
(3) $A_3 = \frac{(1.5 + 4.5) \times 2}{2} = 6 cm^2$ (2) $F_3(x) = \frac{3}{4}x^2$ (3) $F_3(3) - F_3(1) = \frac{27}{4} - \frac{3}{4} = 6$

الملاحظة: نلاحظ أن: $A_1 = F_1(5) - F_1(0)$ و $A_2 = F_2(3) - F_2(-1)$ و $A_3 = F_3(3) - F_3(1)$

وضع تخمين: مساحة حيز تحت المنحني (C_f) الممثل لدالة موجبة f بين العددين a و b هو العدد الحقيقي

$$F(b) - F(a) \text{ حيث } F \text{ دالة أصلية لـ } f$$

2. تكامل دالة - مساحة الحيز تحت منحنى لدالة مستمرة و موجبة



في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. لتكن النقطتان K احداثيها $(1;1)$

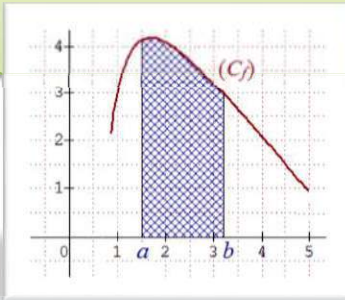
وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$ نرمز له بـ ua .

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I . a و b عدنان حقيقيان من I حيث $a \leq b$

و F دالة أصلية للدالة f على المجال I . (C_f) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$

✧ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = b$ و $x = a$

هو: $F(b) - F(a)$



ملاحظات: الحيز السابق هو الحيز لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي

$$\text{حيث } 0 \leq y \leq f(x) \text{ و } a \leq x \leq b$$

3. التكامل

تعريف f دالة مستمرة على مجال I . a و b عدنان حقيقيان من I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I . يسمى

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ التكامل من a إلى b لـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$

نقرأ: "التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x " ونكتب: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ملاحظات:

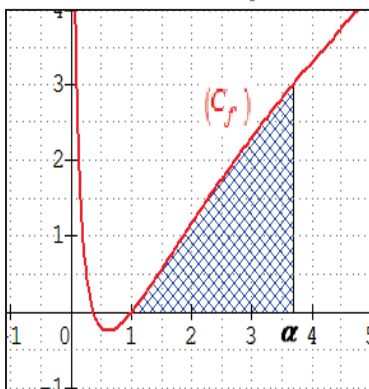
(1) العدد $F(b) - F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I .

(2) يمكن استبدال المتغير x بأي متغير آخر ماعدا a و b و f مثلاً: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = \dots$

أمثلة:

$$(1) \int_1^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 4 \times 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4 \times 1 \right) = \left[-\frac{5}{3} \right]$$

$$(2) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln(e^0 + 1) = \ln 3 - \ln 2 = \left[\ln \frac{3}{2} \right]$$



نتيجة: إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[a; b]$.

فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$

هو العدد الحقيقي: $\int_a^b f(x) dx$

تقويم: ت 23 ص 185

المحتوى المعرفي : ✨ الحساب التكاملي. المحاضرة : الثانية المدة : ساعة (01)
الكفاءة المستهدفة : ✨ توظيف خواص التكامل لحساب دوال أصلية.

نشاط: f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c و c من I

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

حل النشاط: F دالة أصلية لـ f على I :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = [F(c) - F(a)] = \int_a^c f(x) dx$$

1. خواص التكامل:

خاصية شال: f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c و c من I

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{لدينا:}$$

نتيجة: من الواضح أن : $\int_a^a f(x) dx = 0$ ومنه إذا أخذنا $c = a$ نحصل على $\int_a^a f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

خاصية 2 الخطية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b k \times f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \dots\dots(2) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \dots\dots(1)$$

برهان: (1) F و G دالتان أصليتان على الترتيب للدالتين f و g على المجال I

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_a^b k f(x) dx = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{6x}{x^2+1} \right) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{6x}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^2 dx + 3 \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 3 [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{3} + 3 \ln 2 \end{aligned} \quad \text{مثال:}$$

خاصية 3 المقارنة: f و g دالتان مستمرتان على المجال I , a, b عددان من I , $(a < b)$.

$$(1) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ فإن: } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(2) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \leq g(x) \text{ فإن: } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(1) F دالة أصلية للدالة f على المجال I . إذن من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$.

بما أن $f(x) \geq 0$ على $[a; b]$ فإن F متزايدة على المجال $[a; b]$ و بالتالي $F(a) \leq F(b)$:

$$\text{أي : } F(b) - F(a) \geq 0 \text{ و ومنه : } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(2) يكفي أن ملاحظة أن : $g(x) - f(x) \geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

ملاحظات: f دالة مستمرة على المجال $[-a; a]$.

$$\star \text{ إذا كانت } f \text{ زوجية فإن : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\star \text{ إذا كانت } f \text{ فردية فإن : } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

تقويم:

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x - x$.

(2) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم بين دون حساب أن : $\int_1^2 x dx < \int_1^2 e^x dx$ (I)

(3) تحقق بالحساب من صحة (I) .

حل:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = e^x - 1$	$-$	0	$+$

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(2) من (1) نستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \geq f(0)$ ($f(0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f) معناه : $f(x) \geq 1$

و بالتالي : $f(x) > 0$ أي : $e^x - x > 0$ ومنه من أجل كل x من $[1; 2]$: $e^x - x > 0$ تكافئ : $x < e^x$

و بالتالي (الخاصية السابقة) : $\int_1^2 x dx < \int_1^2 e^x dx$

$$\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e^1 \approx 4,67 \text{ و } \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 1,5 \quad (3)$$

تمرين:

(1) احسب التكاملين I و J حيث:

$$J = \int_1^e \ln(1+t^2) dt + \int_e^1 \ln(1+t^2) dt \quad I = \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) dx$$

(2) قارن، دون حساب، بين التكاملين L و K :

$$L = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

حل : (1) حساب I و J :

$$I = \int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e \left(\ln x + x + \ln \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e (\ln x + x - \ln x) dx = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$J = \int_1^e \ln(1+t^2) dt + \int_e^1 \ln(1+t^2) dt = \int_1^e \ln(1+t^2) dt - \int_1^e \ln(1+t^2) dt = 0$$

(2) المقارنة بين التكاملين L و K

لدينا : $0 \leq x \leq 1$ ومنه $0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ وبالتالي $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ أي : $L \leq K$

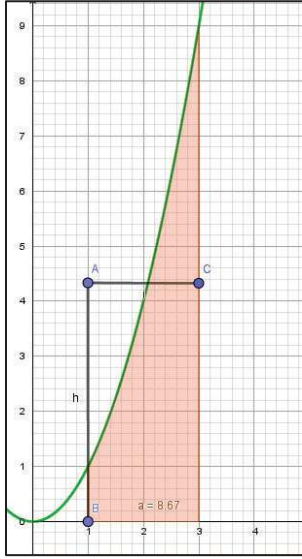


المحتوى المعرفي : الحساب التكاملي الحصة الثالثة (ساعة)

الكفاءة المستهدفة : مفهوم القيمة المتوسطة لدالة وحصرها .

نشاط : f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث

$$\|\vec{i}\| = 1cm$$



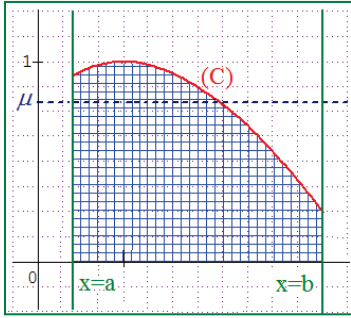
- أحسب A_1 مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و $x=3$

- قارن بين A_1 و A_2 حيث A_2 مساحة المستطيل الذي بعدها 2 و $\frac{13}{3}$.

1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي μ حيث: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



التفسير البياني في حالة دالة موجبة:

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a; b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx \text{ يعني } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

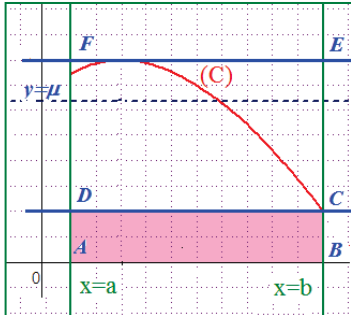
$\mu(b-a)$ هي مساحة لمستطيل بعدها $b-a$ و μ (القيمة المتوسطة)

القيمة المتوسطة لـ f على $[a; b]$ ، هي الارتفاع μ المستطيل

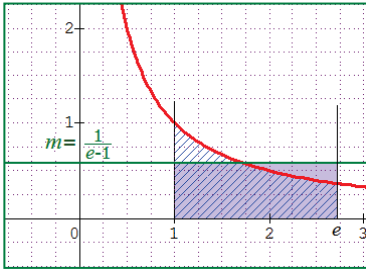
الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

بما أن المساحة $\int_a^b f(x) dx$ محصورة بين مساحة المستطيل $ABCD$ و مساحة المستطيل $ABEF$

من الواضح أنه يوجد مستطيل ارتفاعه μ أي مساحته $\mu(b-a)$ مساوية للمساحة $\int_a^b f(x) dx$.



مثال:



القيمة المتوسطة للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $[1; e]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{e-1} [\ln x]_1^e = \frac{1}{e-1}$

2. حصر القيمة المتوسطة لدالة على مجال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$.

إذا وجد عدنان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a; b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$

فإن: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

برهان: إذا كان من أجل كل x من $[a; b]$: $m \leq f(x) \leq M$ فإن $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$

أي $\int_a^b dx = [x]_a^b = b-a$ و بما أن $m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$

نحصل على: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

حالة خاصة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عدنان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I ، $|f(x)| \leq M$ فإن $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a|$

تمرين: f دالة معرفة على المجال $[1; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x}$

(أ) عين حصرًا للعدد $\int_1^2 f(x) dx$ (ب) استنتج حصرًا لـ: $\ln 2$

حل

(أ) لدينا f مستمرة على المجال $[1; 2]$ ومنه من أجل $1 \leq x \leq 2$ فإن $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ أي $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ ومنه

$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 1$ بمعنى $\frac{1}{2} [x]_1^2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq [x]_1^2$ أي $\frac{1}{2} \int_1^2 dx \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 dx$

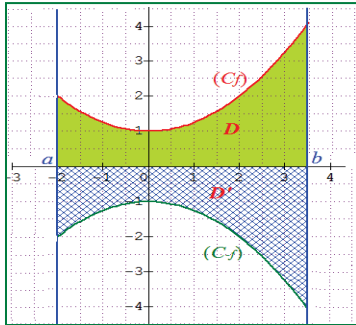
(ب) لدينا $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 1$ أي $\frac{1}{2} \leq [\ln x]_1^2 \leq 1$ ومنه $\frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1$ بالتالي $0.5 \leq \ln 2 \leq 1$

المحتوى المعرفي : ✨ الحساب التكاملي . المحاضرة : الرابعة (ساعة)
الكفاءة المستهدفة : ✨ توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة .

1. التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

(1) تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a; b]$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$
و A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و المستقيمت التي معادلاتها: $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$



بما أن f سالبة على $[a; b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a; b]$
الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل
فمساحتهما متساويتان أي $A' = A$.

$$\text{و بالتالي : } A = \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(2) تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلاً f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a; b]$
و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في مثل هذه الحالة مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C)
و بالمستقيمت التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$

$$\text{هي } S \text{ حيث : } S = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{مثلاً في الشكل أعلاه لدينا : } S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$$

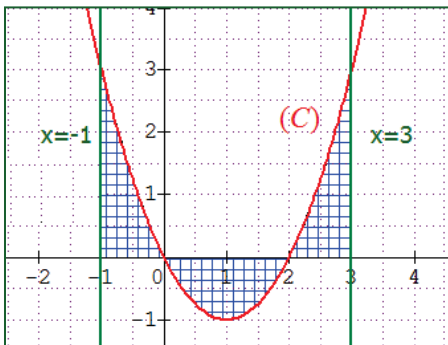
تقويم:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 - 2x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

أحسب بـ cm^2 المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها $x = -1$ ، $x = 3$ و $y = 0$

حل:



$$\text{لدينا } S = \int_{-1}^3 |f(x)| dx$$

. تحديد إشارة $f(x)$:

x	-1	0	2	3	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$S = \int_{-1}^3 |f(x)| dx = \left[\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left(\left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 \right) \times 4 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

ملاحظة :

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a; b]$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) ، (C_g)

و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$ هي: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ حيث :

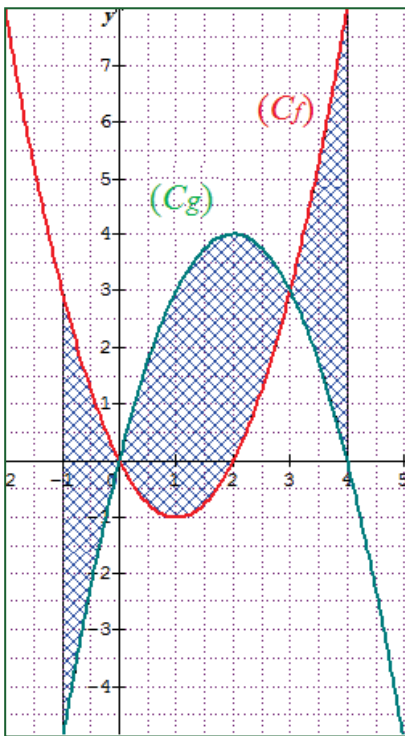
تطبيق :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي 1 cm على كل محور

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$

كما يلي: $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 4$.

حل :



$$S = \int_{-1}^4 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^4 |2x^2 - 6x| dx \quad \text{لدينا}$$

ندرس إشارة $2x^2 - 6x$

x	-1	0	3	4
$2x^2 - 6x$	+	0	-	+

$$S = \left(\int_{-1}^0 (2x^2 - 6x) dx - \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx + \int_3^4 (2x^2 - 6x) dx \right) \text{ cm}^2$$

$$= \left(\left[\frac{2}{3} x^3 - 3x \right]_{-1}^0 - \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x \right]_0^3 + \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x \right]_3^4 \right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{49}{3} \text{ cm}^2$$

المحتوى المعرفي : ✨ الحساب التكاملي . الـحصة : الخامسة . ساعتان

الكفاءة المستهدفة : ✨ استعمال التكامل بالتجزئة .

✨ توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية .

1.المكاملة بالتجزئة

نشاط: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I . u' و v' دالتاهما المشتقتان مستمرتان على I

$$(1) \quad \text{بين أن : } uv' = (uv)' - u'v$$

$$(2) \quad \text{استنتج من أجل كل عددين حقيقيين } a \text{ و } b \text{ من } I : \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

مبرهنة: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I . u' و v' دالتاهما المشتقتان مستمرتان على I .

$$\text{من أجل كل عددين حقيقيين } a \text{ و } b \text{ من } I \text{ لدينا : } \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

مثال 1: باستعمال المكاملة بالتجزئة لنحسب ما يلي : $A = \int_1^2 x e^x dx$

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \text{نجد : } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 x e^x dx = [x e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

مثال 2: باستعمال المكاملة بالتجزئة لنحسب التكامل : $A = \int_1^e \ln(x) dx$

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{نجد : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$A = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln(x) - x]_1^e = 1$$

تقويم:

باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب ما يلي: (1) $A = \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx$ (2) $B = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx$

حل (1) نضع : $\begin{cases} u(x) = \ln(x+2) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+2} \\ v(x) = x+2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx = [(x+2) \ln(x+2)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \left((x+2) \times \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= [(x+2) \ln(x+2)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 dx = [(x+2) \ln(x+2) - x]_{-1}^0 = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ نضع: } \begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \quad \text{نجد: } \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$B = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx = \left[\frac{(2x+1)}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{(2x+1)}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = [xe^{2x}]_0^1 = e^2$$

2. الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I .

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I والتي تنعدم من أجل a هي الدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

مثال: f دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل 1 هي الدالة F المعرفة على $]0; +\infty[$ حيث :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left(t - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \sqrt{t} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + 1$$

3. حجوم مجسمات بسيطة

حجم مجسم دوراني محوره (x, x') : ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a; b]$.

دوران (C) حول المحور (x, x') يولد مساحة دورانية محورها (x, x') تحدد مجسما

خاصية: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور (x, x') لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \quad \text{حيث: } V \text{ هو العدد الحقيقي}$$

مثال:

أحسب حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور (x, x') للمنحني (C)

الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-1; 1]$ كما يلي : $f(x) = e^x$

$$V = \int_{-1}^1 \pi (e^x)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi e^{2x} dx = \frac{1}{2} [\pi e^{2x}]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \pi \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \text{ uv} \quad \text{الجواب:}$$

