

الواجب التبرلي الثاني

التمرين الأول

الجزء الأول

1. عين حلول المعادلة التفاضلية : $y' - 2y = 0$ (1).
2. a و b عدنان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x) = (ax + b)e^x$.
 أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة $y' - 2y = xe^x$ (2).
 ب- برهن أن v تكون حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $(v + u)$ حل للمعادلة (2).
 ج- استنتج جميع حلول المعادلة (2).
 د- عين الحل الخاص للمعادلة (2) و الذي ينعدم من أجل $x = 0$.

الجزء الثاني

- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1. أدرس تغيرات الدالة g .
 2. برهن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $-1.6 < \alpha < -1.5$.
 3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثالث

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (فسر النتيجة هندسيا) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. بين أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
 4. أرسم (C_f) .
 5. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = e^{-2x} - (1-x)e^{-x}$ و (C_h) تمثيلها البياني.
 • بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) .
 6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) + m = 0$.

الجزء الأول

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{1-x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- بين أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتائج هندسيا.
 - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (1-2x^2)e^{1-x^2}$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - أرسم (C_f) .

الجزء الثاني

- لتكن الدالة φ المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $\varphi(x) = -x^2 + x + \ln(x)$
- بين أن : $\varphi'(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$ ثم أدرس تغيرات الدالة φ .
 - استنتج إشارة الدالة φ .

الجزء الثالث

- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{1-x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.
- بين أنه من أجل كل $x > 0$ المعادلة $f(x) = g(x)$ تكافئ $\varphi(x) = 0$.
 - استنتج الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و (C_g) .
 - بين أن لـ (C_f) و (C_g) نقطة مشتركة نسميها A .
 - بين أن المنحنيين يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا يطلب تعيين معادلة له.

قد لا يبلغ المرء الفجر إلا عن طريق الليل

الأستاذ: ففلول . ع

الجزء الأول

1. تعيين حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 0$: هي الدوال $x \mapsto Ce^{2x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$.

2. أ- تعيين المرددين a و b : u حلا للمعادلة $y' - 2y = xe^x$ معناه $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ أي

$$ae^x + (ax + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \quad \text{بالمطابقة نجد : } a = -1 \text{ و } b = -1.$$

$$\text{ومنه } u(x) = (-x - 1)e^x$$

ب- برهان أن v حل للمعادلة (1) : $(v + u)$ حل للمعادلة (2) معناه $(u + v)' - 2(u + v) = xe^x$ أي

$$u' - 2u + v' - 2v = xe^x \quad \text{و منه نستنتج أن } v' - 2v = 0 \text{ أي } v \text{ حل للمعادلة (1).}$$

ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2) : نضع $f = u + v$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) :

$$f(x) = \overbrace{(-x - 1)e^x}^u + \overbrace{Ce^{2x}}^v \quad \text{حيث } C \in \mathbb{R}$$

د- تعيين الحل الخاص : $f(0) = (-0 - 1)e^0 + Ce^{2 \cdot 0} = 0$ أي $C = 1$ ومنه $f(x) = (-x - 1)e^x + e^{2x}$.

الجزء الثاني

1. دراسة تغيرات الرالة g :

أ- النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \left(2 - \frac{x}{\underbrace{e^x}_0} - \frac{2}{\underbrace{e^x}_0} \right) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \left(2 \frac{e^x}{\underbrace{x}_{+\infty}} - 1 - \frac{2}{\underbrace{x}_0} \right) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{2e^x}_0 \frac{-x}{-(-\infty)} - 2 = +\infty$

ب- اتجاه تغير الرالة : $g'(x) = 2e^x - 1$ ومنه $g'(x) = 0$ معناه $2e^x - 1 = 0$ أي $e^x = \frac{1}{2}$ أي $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

$$\begin{aligned} g(-\ln 2) &= 2e^{-\ln 2} - (-\ln 2) - 2 \\ &= 2e^{\ln \frac{1}{2}} - (-\ln 2) - 2 \\ &= 1 + \ln 2 - 2 \\ &= -1 + \ln 2 \approx -0.31 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\ln 2)$	$+\infty$

ج- جدول التغيرات :

2. برهان أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين : حل معدوم أي $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 0$ و الآخر $-1.6 < \alpha < -1.5$: لدينا الدالة g

مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty, -\ln 2[$ فهي كذلك على المجال $]-1.6, -1.5[$ و

$$g(-1.6) \times g(-1.5) = (0.004) \times (-0.05) < 0 \quad \text{ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل}$$

حل وحيد $-1.6 < \alpha < -1.5$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

الجزء الثالث

1. تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left[1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right] = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^{2x}}_0 - \underbrace{xe^x}_0 + \underbrace{e^x}_0 = 0$

التفسير الهندسي: وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$.

2. تبيان أن: $f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + e^x(x+1)] = 2e^{2x} - xe^x - 2e^x = e^x \underbrace{(e^x - x - 2)}_{g(x)} = e^x \times g(x)$

و منه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ لأن $e^x > 0$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

جدول تغيرات الرالة:

3. تبيان أن: $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ لدينا $g(\alpha) = 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$ و لدينا من جهة أخرى:

$$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha = (e^\alpha)^2 - (\alpha+1)e^\alpha = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -\left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}\right)$$

مصر $f(\alpha)$: $-1.6 < \alpha < -1.5$ أي $\begin{cases} (-1.6)^2 > \alpha^2 > (-1.5)^2 \\ 2(-1.5) > 2\alpha > 2(-1.6) \end{cases}$ أي

$$-0.11 < f(\alpha) < 0.24 \text{ أي } -\left(\frac{-3+(-1.6)^2}{4}\right) < -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} < -\left(\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4}\right)$$

4. الرسم:

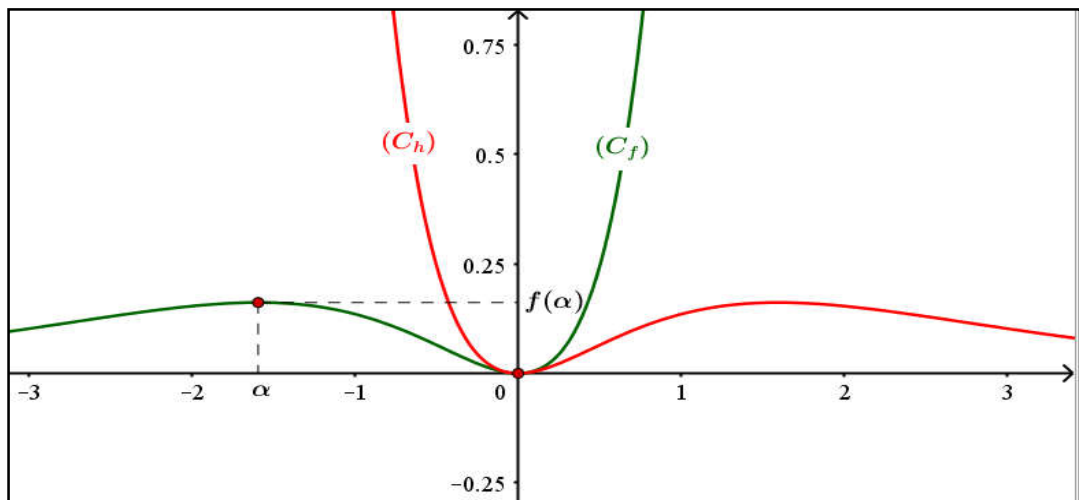
5. نلاحظ أن $h(x) = e^{-2x} - (1-x)e^{-x} = e^{2(-x)} - (1+(-x))e^{(-x)} = f(-x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

6. الناقشة البيانية: $f(x) + m = 0$ أي $f(x) = -m$ ومنه إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = -m$

♦ $-m < 0$ أي $m > 0$: لا توجد حلول ♦ $m = 0$: حل مضاعف ♦ $0 < -m < f(\alpha)$ أي

$-f(\alpha) < m < 0$: ثلاث حلول ♦ $-m = f(\alpha)$ أي $m = -f(\alpha)$: حلين أحدهما موجب و الآخر حل مضاعف

سالب ♦ $-m > f(\alpha)$ أي $m < -f(\alpha)$: حل وحيد موجب.



1. تبيان أن: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x e^{1-x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times e^1 \times e^{-x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \times e^1 \times \frac{1}{e^{x^2}} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{e}{\underbrace{x}_0} \times \frac{x^2}{\underbrace{e^{x^2}}_0} = 0$

التفسير الهندسي: وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y = 0$ بجوار $\pm\infty$.

2. تبيان أن: $f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}$

3. اتجاه تغير الرالة: إشارة المشتقة من إشارة $(1-2x^2)$ لأن $e^{1-x^2} > 0$ ومنه $f'(x) = 0$ يكافئ $(1-2x^2)e^{1-x^2} = 0$ أي

$1-2x^2 = 0$ أي $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ أو $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

جدول تغيرات الرالة :

x	$-\infty$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0		$\sqrt{e/2}$		0

الرسم:

1. دراسة تغيرات الرالة φ :

أ- النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} \left(-1 + \frac{1}{\underbrace{x}_0} + \frac{\ln(x)}{\underbrace{x^2}_0} \right) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{-x^2}_0 + \underbrace{x}_0 + \underbrace{\ln(x)}_{-\infty} \right) = -\infty$

ب- اتجاه تغير الرالة: $\varphi'(x) = -2x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $(-2x^2 + x + 1)$

لأن المقام $x > 0$ ومنه $-2x^2 + x + 1 = 0$ نحسب $\Delta = 9$ نجد $x_1 = -\frac{1}{2} \notin]0, +\infty[$ (مرفوض) أو $x_2 = 1$.

ج- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$		0	$-\infty$

2. استنتاج إشارة φ : من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$: $\varphi(x) \leq 0$.

1. **بيان أن:** $f(x) = g(x)$ تكافئ $xe^{1-x^2} = e^{1-x}$ تكافئ $x \frac{e^{1-x^2}}{e^{1-x}} = 1$ تكافئ $xe^{(1-x^2)-(1-x)} = 1$ تكافئ $xe^{-x^2+x} = 1$

تكافئ $\ln(xe^{-x^2+x}) = \ln(1)$ تكافئ $\ln(x) + \ln(e^{-x^2+x}) = 0$ تكافئ $-x^2 + x + \ln(x) = 0$ تكافئ $\varphi(x) = 0$.

2. **استنتاج الوضع النسبي:** نلاحظ أن إشارة الفرق من إشارة $\varphi(x) \leq 0$ إذن (C_f) تحت (C_g) في المجال $]0, +\infty[$.

3. **بيان أن:** بما أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطة $A(1,1)$ فهي نقطة مشتركة.

4. **بيان أن:**
$$\begin{cases} y = \overbrace{f'(1)}^{-1}(x-1) + \overbrace{f(1)}^1 \\ y = \underbrace{g'(1)}_{-1}(x-1) + \underbrace{g(1)}_1 \end{cases}$$
 ومنه $y = -x + 2$.

