

الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة: 1 ساعة

القسم: 3 ر 3 ت ر

نص التمرين:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و (γ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0, 1)$ نقطة انعطاف للمنحني (γ)

3 / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (γ)

4 / لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x) = f(x) - x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $[1, 2]$ يحقق أن : $h(\alpha) = 0$
ب) استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحني (γ) ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحني (γ) والمماس (Δ)

6 / لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = f(|x|)$ ، بين أن الدالة g زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحني (C_g) انطلاقا من (γ) ، ثم أرسمه في نفس المعلم

بالتوفيق

الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة: 1 ساعة

القسم: 3 ر 3 ت ر

نص التمرين:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و (γ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0, 1)$ نقطة انعطاف للمنحني (γ)

3 / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (γ)

4 / لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x) = f(x) - x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $[1, 2]$ يحقق أن : $h(\alpha) = 0$
ب) استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحني (γ) ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحني (γ) والمماس (Δ)

6 / لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = f(|x|)$ ، بين أن الدالة g زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحني (C_g) انطلاقا من (γ) ، ثم أرسمه في نفس المعلم

بالتوفيق

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} \times \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \end{aligned}$$

أي نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

$$D_f = IR =]-\infty; +\infty[$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 1 + \frac{-\infty}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

إزالة حالة عدم التعيين:

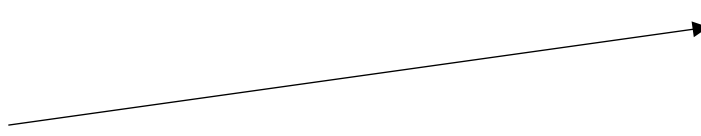
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \right) = 1 - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \right) = 1 + 1 = 2$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	2



(2) اثبات ان النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (γ) :

A نقطة انعطاف للمنحني (γ) معناه ان الدالة المشتقة الثانية للدالة f تنعدم عند فاصلة هذه النقطة وتغير اشارتها

$$\text{لنا } f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2 \times \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} \text{ ومنه}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} \right)' = \frac{-3(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^4} = \frac{-3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x}{(x^2+1)^2 \sqrt{x^2+1}}$$

من خلال عبارة الدالة المشتقة نلاحظ ان مقامها موجب تماما وبالتالي فان اشارتها من نفس إشارة البسط أي من نفس إشارة $f''(x)$: إشارة $-3x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-3x$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-

من خلال جدول إشارة $f''(x)$ يتضح لنا انها فعلا تنعدم عند 0 وتغير اشارتها أي ان النقطة $A(0; f(0))$ أي $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (γ) .

(3) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة $A(0;1)$: وهي $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $y = x+1$.

(4) دراسة وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) ولدراسة ذلك ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

$$= \frac{x - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x - x\sqrt{x^2+1}).$$

وإشارة الفرق هي من إشارة العبارة $x - x\sqrt{x^2+1}$:

$$x - x\sqrt{x^2+1} = x(1 - \sqrt{x^2+1}) = x \left(\frac{(1 - \sqrt{x^2+1})(1 + \sqrt{x^2+1})}{1 + \sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$= x \left(\frac{1 - x^2 - 1}{1 + \sqrt{x^2+1}} \right) = x \left(\frac{-x^2}{1 + \sqrt{x^2+1}} \right) = \left(\frac{x^2}{1 + \sqrt{x^2+1}} \right) (-x)$$

ونستنتج ان إشارة العبارة المعطاة هي من إشارة $-x$ ومنه فان إشارة الفرق $f(x) - y$ هي من إشارة $-x$ وعليه تكون الوضعية المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $-x$	+	0	-
إشارة الفرق $f(x) - y$	+	0	-
الوضعية	(γ) تحت (Δ) / (γ) فوق (Δ) / يقطعه		

(5) الدالة المعرفة بـ: $h(x) = f(x) - x$

(أ) تبين انه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $[1; 2]$ بحيث $h(\alpha) = 0$

لنا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فهي مستمرة على $[1; 2]$ وأيضا الدالة $-x \rightarrow x$ مستمرة على هذا المجال

وعليه فان الدالة h مستمرة على هذا المجال لانها مجموع دالتين مستمرتين وبالتالي فحسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإنه اذا كان $h(1) \times h(2) < 0$ فإنه يوجد على الاقل عدد حقيقي α من المجال $[1; 2]$ يحقق

$$h(\alpha) = 0$$

$$h(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$h(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} - 2 = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})} = \frac{-1}{\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})} < 0$$

ومنه نستنتج انه فعلا $h(1) \times h(2) < 0$ ومنه فإنه يوجد على الاقل عدد حقيقي α من المجال $[1; 2]$ يحقق

$$h(\alpha) = 0$$

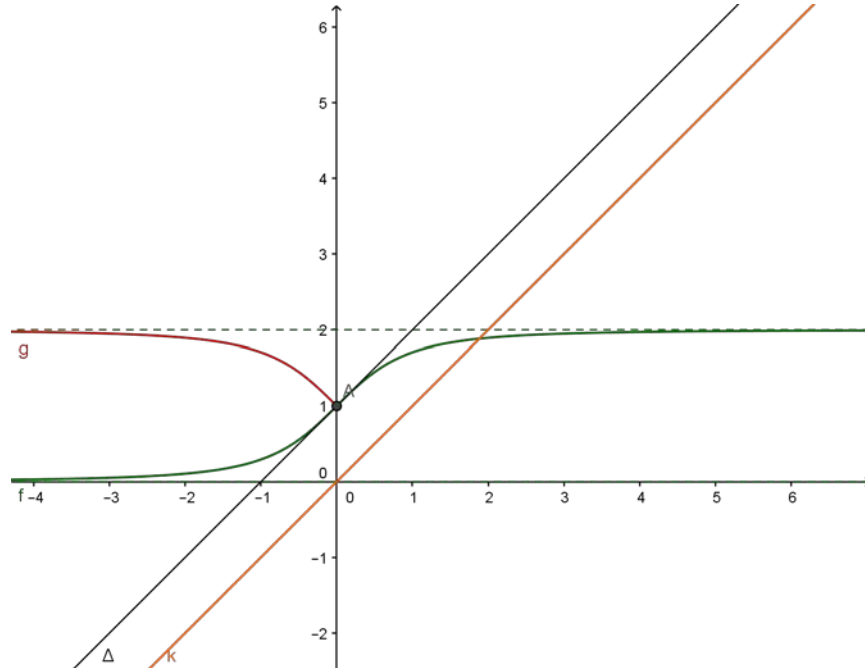
وحدانية α : من جدول التغيرات نلاحظ ان الدالة f رتيبة تماما على المجال $[1; 2]$ والدالة $x \rightarrow -x$ أيضا رتيبة على هذا المجال ونحن نعلم ان مجموع دالتين رتبيتين على مجال هو دالة رتيبة على هذا المجال اذن العدد α وحيد.

(ب) استنتاج عدد نقاط تقاطع المنحني (γ) مع المنصف الأول : ان عدد نقاط تقاطع (γ) مع المنصف الأول هو عدد

حلول المعادلة $f(x) - x = 0$ أي هو عدد حلول المعادلة $h(x) = 0$ ولها حل وحيد α اذن هناك نقطة واحدة

يتقاطع فيها المنحني (γ) مع المنصف الأول وهي $(\alpha; f(\alpha))$ حيث $\alpha \in [1; 2]$.

(6) رسم المنحني (γ) والمماس (Δ) :



$$g(x) = f(|x|) \quad (7)$$

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ اذن مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x) \text{ ومنه الدالة } g \text{ زوجية.}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) : x \geq 0 \\ f(-x) : x < 0 \end{cases} \text{ ومنه نستنتج ان منحنى الدالة } g \text{ هو نفسه منحنى الدالة } f \text{ في المجال الموجب اما في المجال}$$

السالبي فنحصل عليه بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب لان g زوجية

الرسم CG مرفق مع الرسم السابق.