

الزوايا الموجهة

◀ يوجه المستوي
 ◀ توجيهها مباشرة (موجب) ← عكس عقارب الساعة
 ◀ توجيهها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

◀ نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1
 $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

◀ نسمي الثنائية $(\vec{u}, \vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

☆ إذا كان x قياس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x + 2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ مع $k \in \mathbb{Z}$

☆ يوجد قياس وحيد على المجال $[-\pi, \pi]$ أو $[0, 2\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$

☆ إيجاد القياس الرئيسي للزاوية $x = (\vec{u}, \vec{v})$:

① نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u}, \vec{v}) = x + 2k\pi$

② نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ أي: $-\pi < x + 2k\pi < \pi$

③ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القياس الرئيسي.

☆ علاقة شال:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

نتائج:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

☆ تقايس الزوايا الموجهة:

$$(\vec{u}', \vec{v}') = \alpha' \text{ و } (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \text{ تكن}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ و } (\vec{u}', \vec{v}') \text{ متقايسان} \Leftrightarrow \alpha' = \alpha + 2k\pi \text{ أي } \alpha' - \alpha \text{ مضاعف لـ } 2\pi$$

☆ الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi & \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ في نفس الاتجاه} \\ \text{أو} \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi & \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مرتبطان خطيا} \\ & \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ في اتجاهين متعاكسين} \end{aligned}$$

☆ خاصية:

$$\{k; k'\} \in \mathbb{R}^*$$

▪ إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

▪ إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن: $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

◀ الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

إذا كانت A, B و M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مثلثية (C) مركزها O فإن:

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB})$$

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{1}{2}(\vec{OA}, \vec{OB})$$

Prof Mustapha
KHA-LD

❖ حساب المثلثات

$$\begin{aligned} \blacksquare -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ \blacksquare -1 &\leq \sin x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \blacksquare \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \blacksquare \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \blacksquare \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(-x) &= \cos x \\ \blacksquare \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

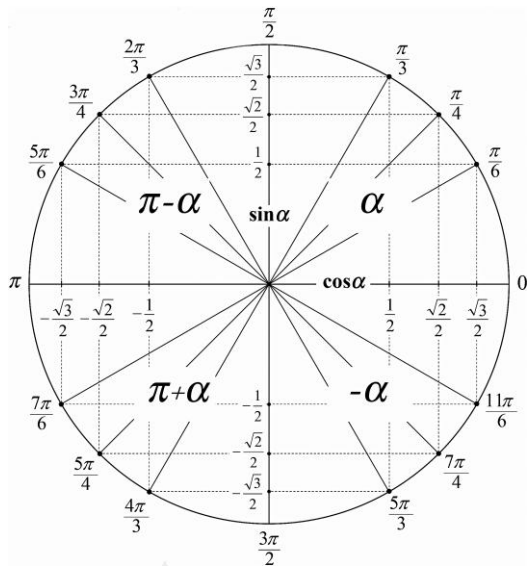
$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \blacksquare \sin(x + \pi) &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \blacksquare \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \blacksquare \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \blacksquare \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

الدائرة المثلثية:



جدول زوايا شهيرة:

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن M نقطة من المستوي غير منطبقة على O

* تسمى الثنائية $M(x; y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

* تسمى الثنائية $M(r; \theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

مصطلحات: النقطة O تسمى القطب، $(O; \vec{i})$ يسمى المحور القطبي، r نصف القطر القطبي و θ زاوية قطبية

❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$y = r \sin \theta \quad ; \quad x = r \cos \theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Prof Mustapha
KdA-LD

❖ المعادلات المثلثية

$$\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases} \quad (2)$$

$$\cos x = a \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (3)$$

* إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

* إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

(1) نبحت عن القيس الرئيسي c حيث $\cos c = a$

$$(2) \quad \begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases} \quad \text{الحلول هي:}$$

$$\sin x = a \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (4)$$

* إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

* إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

(1) نبحت عن القيس الرئيسي c حيث $\sin c = a$

$$(2) \quad \begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases} \quad \text{الحلول هي:}$$

$$\cos u = \sin v \quad \text{المعادلات من الشكل} \quad (5)$$

* إما نحول $\sin$ إلى $\cos$ بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل (1)

* أو نحول $\cos$ إلى $\sin$ بطريقتين:

▪ بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ أي من الشكل (2)

▪ أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin v = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ أي من الشكل (2)

Prof Mustapha

KdH-A-LD