



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسية ^xe

②

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

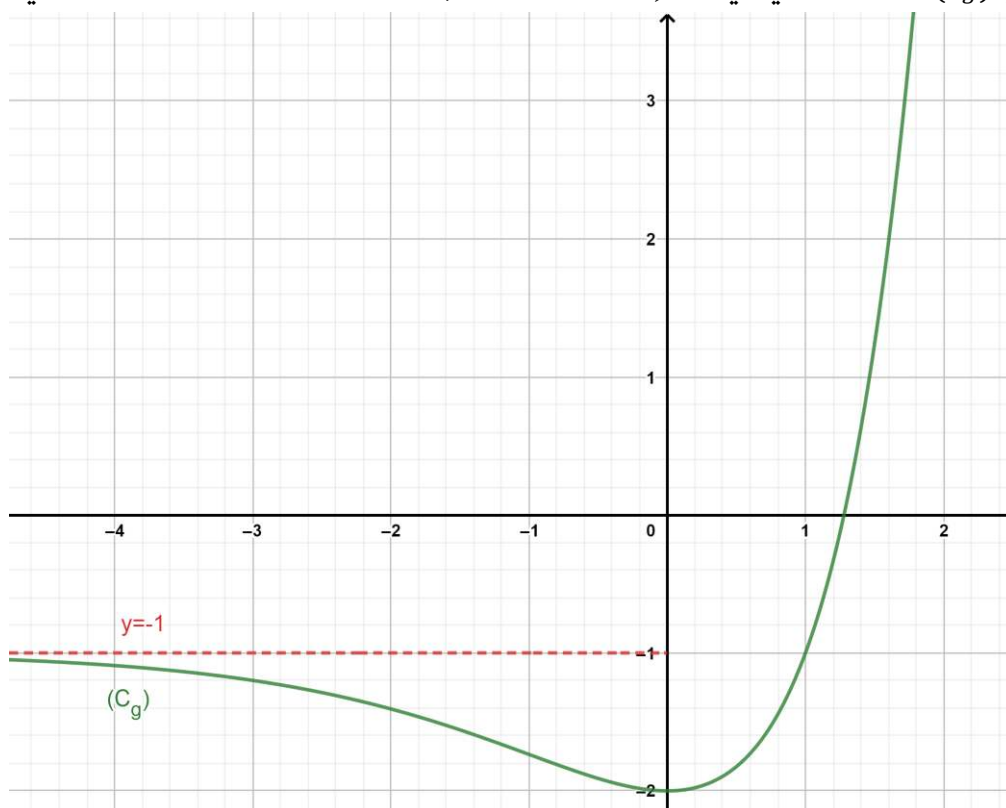
2020 / 12 / 15



(I) a, b و c أعداد حقيقية، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



(1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]$

ب- $g(0)$ و $g'(0)$

(2) مما سبق أوجد a, b و c .

(3) نضع: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

(4) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$

(5) أ- بين أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

(7) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

(8) بين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصر $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

(9) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(10) مثل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

(11) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

(I)

(1) من البيان نجد:

أ-

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1$$

ب-

$$\bullet g'(0) = 0 \quad \bullet g(0) = -2$$

(2) ايجاد a, b, c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a(0) + b)e^0 + c = -2 \\ (a(0) + a + b)e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

(3) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

$$\text{لدينا: } g(1.3) = 0.1 \quad \text{و} \quad g(1.2) = -0.3$$

$$\text{ولدينا: } g(1.3) \times g(1.2) < 0$$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$

(2) أ- تبين أنه من أجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-((x - 1)e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $0 < f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	0

(3) تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} = 0$$

- التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α .

(4) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0; 0)$ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0 \\
&\Rightarrow a \frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a + 1)^2} + \frac{a}{e^a + 1} = 0 \\
&\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a + 1) = 0 \\
&\Rightarrow a^2e^a = 0 \\
&\Rightarrow a = 0
\end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$\begin{aligned}
(T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\
y &= \frac{-g(0)}{(e^0 + 1)^2}x + \frac{0}{e^0 + 1} \\
y &= \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

(5) تبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$\begin{aligned}
g(\alpha) = 0 &\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha = 1 \\
&\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} \\
&= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\
&= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} \\
&= \alpha - 1
\end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
1.2 &< \alpha < 1.3 \\
0.2 &< \alpha - 1 < 0.3 \\
0.2 &< f(\alpha) < 0.3
\end{aligned}$$

(6) أ- تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ يقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \quad (\text{نهاية شهيرة})$$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - y]$:

$$f(x) - y = \frac{x}{e^x + 1} - x = \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-xe^x}{e^x + 1}$$

لدينا $(e^x + 1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

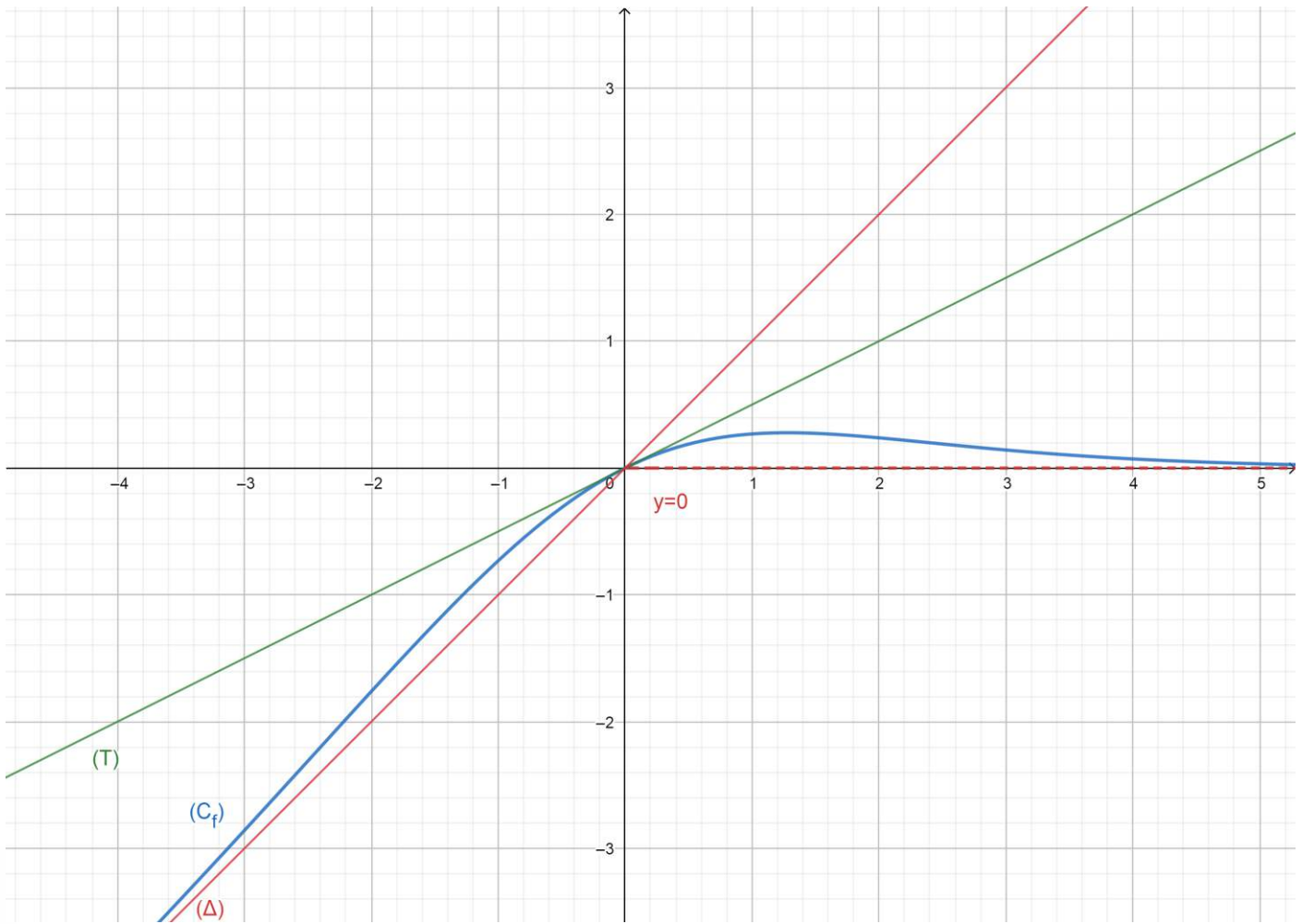
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0; +\infty[$

(7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



لما	$m < 0$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 0$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$0 < m < \alpha$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما	$m = \alpha$	المعادلة تقبل حل مضاعف موجب
لما	$m > \alpha$	المعادلة لا تقبل حلولاً

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶