



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.
2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.
أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \leq u_n < 2$
ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج أنها متقاربة.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب - أكتب كل من u_n و v_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U على ثلاث كرات تحمل الرقم 2 و كرتان تحملان الرقم 3، ويحتوي كيس V على ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوتين. (كل الكرات متماثلة لا نميز بين الكرات عند اللمس)
نسحب الآن كرة واحدة من الكيس U ونسجل رقمها.

• إذا كانت تحمل رقم 2 نسحب كرتين بالتتابع دون ارجاع من الصندوق V

• إذا كانت تحمل رقم 3 نسحب ثلاث كرات في أن واحد من الصندوق V

نعتبر الحادثتين: A "الكرات المسحوبة من نفس اللون"

B "الحصول على كرتين حمراوتين على الأقل"

1. بين أن $P(A) = \frac{7}{25}$ ، ثم احسب $P(B)$

2. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U تحمل رقم 2 علما أن الكرات المسحوبة من V من نفس اللون

3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ. عين قيم المتغير X

ب. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ. أكتب كلا من z_C و z_A على شكل أسي ، ثم استنتج شكل أسي لكل من العددين z_D و z_B

ب. تحقق أن $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

ت. اكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على شكل أسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

(3) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z بحيث : $|iz - z_B| = |\overline{z} - z_C|$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x} - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول ، أحدها الحلول معدوم والآخرين هما α و β حيث

$$-1,48 < \beta < -1,47 \text{ و } 2,51 < \alpha < 2,52$$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 2 + (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ،

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = -g(x)$

ب . استنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. أنشئ (Δ) و (C_f) ، حيث نأخذ $f(\alpha) \approx 2,2$ و $f(\beta) \approx 2,1$

5. أ- عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث تكون الدالة $H : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ هي دالة

أصلية للدالة $x \mapsto (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x = \alpha$ و $x = 0$.

ج - بين أن : $A(\alpha) = \frac{2\alpha(5\alpha+8)}{(\alpha+1)^2}$ ، ثم جد حصرا للمساحة $A(\alpha)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط):

يحتوي صندوق على 12 كرية كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها ستة كريات سوداء مرقمة ب: 0، 0، 0، 0، 1، 1، -1 و أربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1، 1، -1، 1 و كرتين حمراوتين مرقمتين ب: 2، -2 - نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية

"الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

"الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم"

"الحصول على ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى"

(2) بين أن $P(B \cap C) = \frac{2}{11}$

(3) علما أن الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ارقام مختلفة مثنى مثنى علما أن مجموع أرقامها معدوم .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل الرقم 0

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X

• احسب امله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (05 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

1. عمدة العدد المركب : $Z = -4ie^{i\frac{\pi}{6}}$ هي :

(أ) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (ب) $Arg(Z) = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi$ (ج) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على

الترتيب $z_D = -2 - i$ و $z_C = 1$ ، $z_B = -1 + 2i$ ، $z_A = 2 + 3i$

(أ) ABDC مربع (ب) ABDC معين (ج) ABDC مستطيل

3. القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e; e^e]$ هي

(أ) $m = \frac{1}{e^e - e}$ (ب) $m = 0$ (ج) $m = \frac{e - 1}{e^e - e}$

4. (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ ب: $u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9$ و $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي :

(أ) $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ (ب) $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ (ج) $\alpha = -3$ و $\beta = 1$

التمرين الثالث : (04 نقاط):

1. (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة حدها الأول u_0 وأساسها q حيث :

$$u_1 + u_3 = 90 \text{ و } u_1 \times u_3 = 729$$

أ. أحسب u_0 و q

ب. اكتب u_n بدلالة n

2. نفرض أن $u_0 = 3$ و $q = 3$ ونعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$$

أ) بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، عيّن أساسها وحدها الأول w_0 .

ب) أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .

ت) احسب بدلالة n المجموع حيث S_n : $S_n = \frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \dots + \frac{v_n}{u_n}$

التمرين الرابع : (07 نقاط):

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع : $t = \sqrt{x}$) ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أ . أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

ب . استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $0,34 < \alpha < 0,35$

6. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

7. أرسم (Δ) و (C_f)

8. أحسب بدلالة α العدد : $A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [f(x) - x] dx$.

• بين أن : $A(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1} \left(\frac{2 - \alpha^2}{3} \right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $A(\alpha)$

انتهى الموضوع الثاني