

مراجعة شاملة حول الدوال العددية (1)

إقتراح: خالد الجناخشة

بصرف: غريب عصام

(1) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x}$$

(2) بين أن المعادلة $x^3 + x = -4$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر الدوال التالية :

(3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و (Γ) تمثيلها البياني .

- بين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما .

(4) الدالة h معرفة كما يلي : $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ و ليكن (γ) تمثيلها البياني .

أ) عين مجموعة تعريف الدالة h ، ثم أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف .

ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(5) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي : $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ و (δ) تمثيلها البياني .

- أثبت أن المنحنى (δ) يقبل مماسين يشملان مبدأ المعلم يطلب تعيين معادلتيهما .

(6) لتكن الدالة z المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $z(x) = 2 \cos^2 x + \sin 2x$ و (C) تمثيلها البياني .

أ) بين أن الدالة z دورية و دورها هو π ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة z و شكل جدول تغيراتها

على المجال $[0; \pi]$.

ب) بين أن المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\pi}{8}$ هو محور تناظر للمنحنى (C) .

(7) لتكن الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ حيث

n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.

ب) أثبت صحة متباينة برنولي التالية : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ و من أجل

كل عدد طبيعي n يكون : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

(8) لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

أ) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 .

ب) عين عبارة $f'(x)$ ، ثم أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج) يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\sqrt{\frac{7}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$	1

- أنشئ المنحنى (C_f) (يعطى $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.6$ و $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0.3$) .

- (د) لتكن (λ) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي و التي تحقق : $(x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$.
 - بين أن المجموعة (λ) هي اتحاد منحنين يطلب تعيين معادلتيهما ثم أنشئ المجموعة (λ) في نفس المعلم السابق .

(9) لتكن الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x + 1 - m}{x-2}$ حيث m

وسيط حقيقي و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m .

(أ) بين أن كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها .

(ب) أحسب $f'_m(x)$ ، ثم عين قيم الوسيط الحقيقي m التي تكون من أجلها الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها .

(ت) هل يقطع المنحنى (C_m) حامل محور الفواصل ؟ برر إجابتك .

(ث) بين أن النقطة $\Omega_m(2; 2+m)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_m) .

الحل

(1) حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right) : FI \rightarrow \frac{0}{0}$$

نضع $f(x) = \sin(\pi x)$ ، لدينا $f(1) = \sin \pi = 0$ و بالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

و لدينا $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} : FI \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{1+x - 1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{x} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2$ و بالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x} : FI \rightarrow \frac{0}{0}$$

نضع $g(x) = (x+1)^{2021}$ ، لدينا $g(0) = 1^{2021} = 1$ و بالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

و لدينا $g'(x) = 2021(x+1)^{2020}$ إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2021} - 1}{x} = 2021 \times 1^{2020} = 2021$$

(2) تبين أن المعادلة $x^3 + x = -4$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 + x + 4$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و مشتقتها : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 : x \in \mathbb{R}$ أي أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، و لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $x^3 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x = -4$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

- تعيين حصر العدد α سعته 10^{-2} :

لدينا $f(-1) = 2$ و $f(-2) = -6$ و منه $\alpha \in]-2; -1[$. باستخدام طريقة التنصيف نجد

$\alpha \in]-1.50; -1.25[$.

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

(3) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$. تمثيلها البياني .

- تبين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما :

لدينا $g(x) = x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ حيث :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{|x| \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{x \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2x}{|x| \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2x}{-x \times \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 2$$

بحيث : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$

و بالتالي المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

- المستقيم $(\Delta_1): y = x + 2$ بجوار $-\infty$
- المستقيم $(\Delta_2): y = x - 2$ بجوار $+\infty$

(4) الدالة h معرفة كما يلي : $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ و (γ) تمثيلها البياني .

أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

الدالة h معرفة إذا و فقط إذا كان $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$ أي أن (1) $\sqrt{x^2 + 1} \geq -x$ ولدينا مهما يكن x

من $\mathbb{R}$ فإن : $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2}$ أي أن $\sqrt{x^2 + 1} \geq |x|$ ، ولدينا $\begin{cases} -x = |x| ; x \in]-\infty ; 0] \\ -x = -|x| ; x \in [0 ; +\infty[\end{cases}$ أي أنه

مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن (2) $|x| \geq -x$ ، بالتعدي بين (1) و (2) نجد $\sqrt{x^2 + 1} \geq -x$ من أجل

كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.

- حساب النهايات عند حدود (أطراف) مجموعة التعريف :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} = +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} : FI \rightarrow \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}} = 0^+ : \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$$

ب) تبين أن المنحنى (γ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

$$h'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}$$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \sqrt{x^2 + 1}}$$

لدينا $(T): y = f'(0)x + f(0)$ حيث $\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و بالتالي $(T): y = \frac{1}{2}x + 1$.

(5) الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي : $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ و (δ) تمثيلها البياني .

- إثبات أن المنحنى (δ) يقبل مماسين يشملان مبدأ المعلم يطلب تعيين معادلتيهما :

ليكن المماسان هما : $(\Delta_1): y_1 = k'(x_1)(x - x_1) + k(x_1)$ و $(\Delta_2): y_2 = k'(x_2)(x - x_2) + k(x_2)$ عند النقطتين $M_1(x_1; y_1)$ و $M_2(x_2; y_2)$ على الترتيب .

المماسان يشملان المبدأ معناه : $\begin{cases} k'(x_1)(-x_1) + k(x_1) = 0 \\ k'(x_2)(-x_2) + k(x_2) = 0 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} k'(x_1)x_1 = k(x_1) \\ k'(x_2)x_2 = k(x_2) \end{cases}$

و بالتالي :

الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ و مشتقها :

$$k'(x) = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{نحل في } \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ المعادلة } -\frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

المعادلة السابقة تكافئ $-4x^2(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)^2$ أي أن $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$.

نضع $t = x^2$ و بالتالي فالمعادلة السابقة تكافئ $t^2 + 4t - 1 = 0$ ، لدينا $\Delta = 20$ إذن للمعادلة حلان

متمايزان هما : $t_1 = -2 - \sqrt{5}$ (مرفوض لأن $t \geq 0$) و $t_2 = -2 + \sqrt{5}$.

و منه : $x_1 = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ و $x_2 = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.

- كتابة معادلة المماسين :

بملاحظة أن الدالة k زوجية (أي أن $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} : k(-x) = k(x)$)

و $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} : k'(-x) = -k'(x))$ فإن $k(\sqrt{-2 + \sqrt{5}}) = k(-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-3 + \sqrt{5}}$

و $k'(\sqrt{-2 + \sqrt{5}}) = -k'(-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}) = -\frac{4\sqrt{-2 + \sqrt{5}}}{14 - 6\sqrt{5}}$.

$$(T_1): y = -\frac{4\sqrt{-2 + \sqrt{5}}}{14 - 6\sqrt{5}}x$$

$$(T_2): y = \frac{4\sqrt{-2 + \sqrt{5}}}{14 - 6\sqrt{5}}x$$

(6) الدالة z المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $z(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$ و (C) تمثيلها البياني .

أ) تبين أن الدالة z دورية و دورها هو π :

لدينا من أجل كل x و $x + \pi$ من $\mathbb{R}$:

$$z(x + \pi) = 2\cos^2(x + \pi) + 2\sin[2(x + \pi)] = 2\cos^2(x + \pi) + 2\sin(2x + 2\pi)$$

• **تذكير بدساتير الدوال المثلثية :**

(1) مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ و بالتالي :

$$\cdot \cos^2(x + \pi) = (-\cos(x))^2 = \cos^2 x$$

(2) الدالة $x \mapsto \sin x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ دورية و دورها هو 2π إذن مهما يكن x من $\mathbb{R}$

$$\cdot \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

و بالتالي :

$$z(x + \pi) = 2\cos^2(x) + 2\sin(2x) = z(x)$$

مما سبق نجد أن الدالة z دورية و دورها هو π .

- دراسة اتجاه تغير الدالة z و تشكيل جدول تغيراتها على المجال $[0; \pi]$:

الدالة z قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقتها :

$$z'(x) = -4\cos x \sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2\cos 2x$$

$$z'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x) = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right)$$

$$z'(x) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right)$$

لدينا $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ و بالتالي :

$$z'(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

إشارة $z'(x)$ من إشارة $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$:

- لدينا $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ لما $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ لما $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ أي لما $x \in \left[-\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}\right]$

إذن z متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{8}; \pi\right]$.

- لدينا $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ لما $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ لما $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ أي لما $x \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$ إذن z متناقصة تماما على

المجال $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$.

• جدول تغيرات الدالة z على المجال $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	π
$z'(x)$	+	○	-	○
$z(x)$				

$$z\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 2.4142$$

$$z\left(\frac{5\pi}{8}\right) \approx -0.4142$$

ب) تبين أن المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\pi}{8}$ هو محور تناظر للمنحنى (C) :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $\frac{\pi}{4} - x \in \mathbb{R}$:

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right]^2 + \sin\left[\frac{\pi}{2} - 2x\right]$$

• تذكير :

$$\bullet \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\bullet \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (2)$$

و بالتالي :

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x \right]^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2x - \sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) \right]^2 + \cos 2x = 2 \times \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \sin x) + \cos 2x$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + 2 \cos x \sin x + \cos 2x$$

• تذكير :

$$\bullet 2 \cos x \sin x = \sin 2x \quad \text{فإن } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\bullet \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{فإن } x \text{ من } \mathbb{R}$$

و بالتالي :

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cos^2 x + \sin 2x = z(x)$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $\frac{\pi}{4} - x \in \mathbb{R}$: $z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = z(x)$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\pi}{8}$ الموازي لحامل محور الترتيب (yy') هو محور تناظر للمنحنى (C) .

(7) الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ حيث n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$:

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و مشتقتها :

$$f'_n(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$$

إشارة $f'_n(x)$ من إشارة $(1+x)^{n-1} - 1$ لأن $n \geq 2$.

لدينا من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $1+x \geq 1$ و بالتالي $(1+x)^{n-1} \geq 1^{n-1} : n \geq 2$ حيث

$1^{n-1} = 1$ و منه $(1+x)^{n-1} \geq 1 : n \geq 2$ أي أن $(1+x)^{n-1} - 1 \geq 0 : n \geq 2$ إذن من أجل كل x من المجال

$[0; +\infty[$ فإن $f'_n(x) \geq 0$ و الدالة f_n متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

ب) إثبات صحة متباينة برنولي (من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ و من أجل كل عدد

طبيعي n يكون : $(1+x)^n \geq 1+nx$)

لدينا من السؤال السابق : الدالة f_n متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ و بالتالي مهما يكن x من المجال

$[0; +\infty[$ فإن : $f_n(x) \geq f_n(0)$ حيث $f_n(0) = 0$ أي أن $f_n(x) \geq 0$ أي $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$

لدينا : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- دراسة الحالتين $n=0$ و $n=1$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$:

• من أجل $n=0$: $\begin{cases} (1+x)^0 = 1 \\ 1+0 \times x = 1 \end{cases}$ و منه $(1+x)^0 \geq 1+0 \times x$.

• من أجل $n=1$: $\begin{cases} (1+x)^1 = 1+x \\ 1+1 \times x = 1+x \end{cases}$ و منه $(1+x)^1 \geq 1+1 \times x$.

مما سبق فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$(1+x)^n \geq 1+nx$ أي أن متباينة برنولي صحيحة .

(8) الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $\frac{1-x}{x+1} \geq 0$ و $x+1 \neq 0$ أي أن $x \neq -1$.

إشارة الكسر $\frac{1-x}{x+1}$ من إشارة الجداء $(1-x)(x+1)$ حيث $x \neq -1$ و بالتالي :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	○	-
$x+1$	-	○	+	+
$(1-x)(x+1)$	-		○	-

• إذن $ID_f =]-1; 1]$.

- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 :

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 (عند 1 بقيم أكبر) لأنه لا توجد قيم على يمين 1 في

مجال تعريف الدالة f ($ID_f =]-1; 1]$) و بالتالي فالدالة غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; 1[$ و مشتقتها :

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + x \frac{-x-1+1-x}{2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}$$

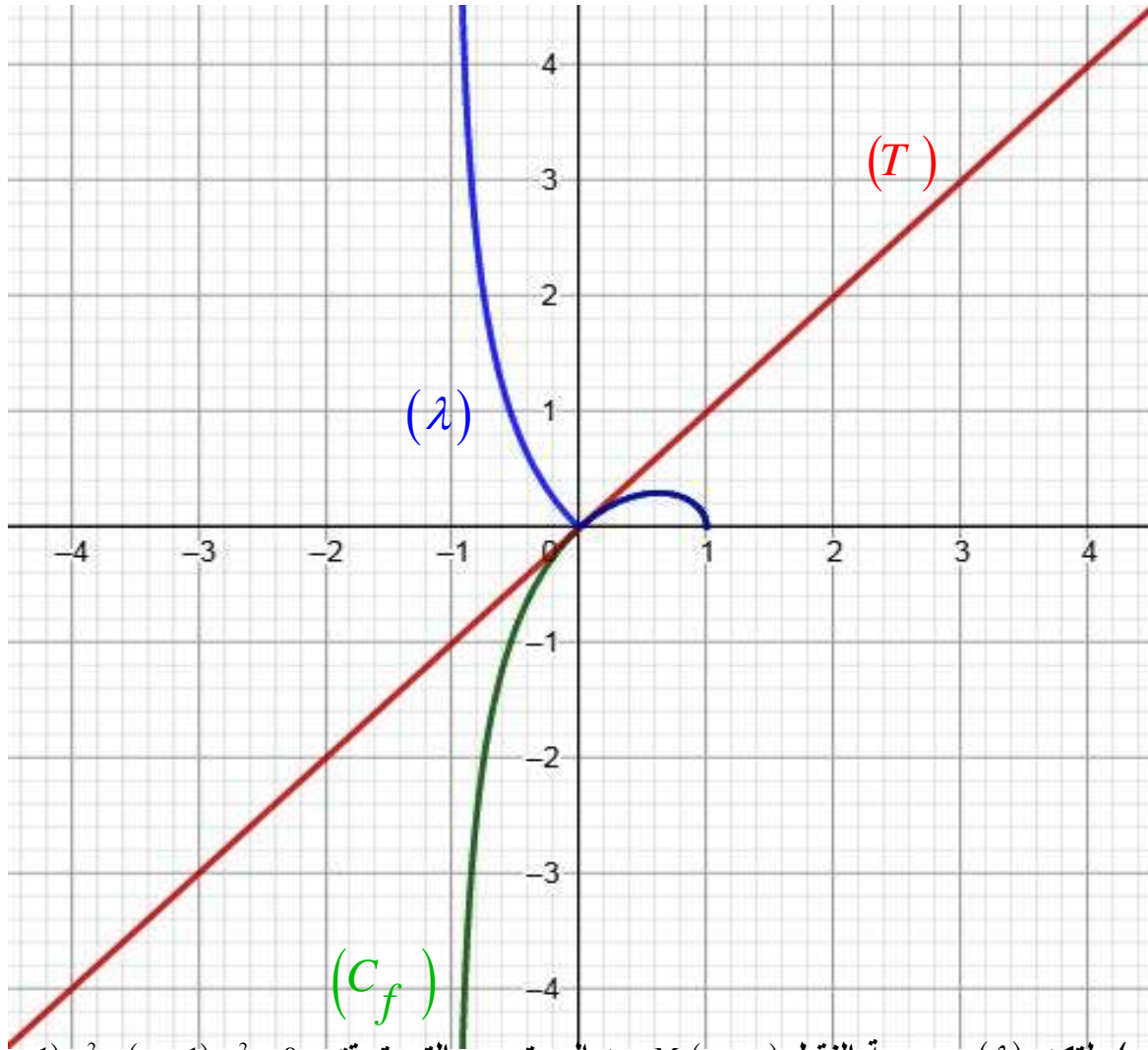
$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} - \frac{x^2}{2(x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}$$

- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

لدينا $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $x_0 = 0$ أي أن $(T): y = f'(0)x + f(0)$ و لدينا

$$\cdot (T): y = x : \text{ إذن } \begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(ج) إنشاء المنحنى (C_f) :



- (د) لتكن (λ) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي و التي تحقق : $(x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$.
 - تبين أن المجموعة (λ) هي اتحاد منحنين يطلب تعيين معادلتيهما :
 لدينا : $(\lambda): (x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$ و بالتالي :

$$(\lambda): (x+1)y^2 = -x^2(x-1)$$

$$(\lambda): (x+1)y^2 = x^2(1-x)$$

$$(\lambda): y^2 = x^2 \times \frac{1-x}{x+1} ; x \neq -1$$

$$(\lambda): y = \pm \sqrt{x^2 \times \frac{1-x}{x+1}} ; x \in]-1; 1]$$

$$(\lambda): y = |x| \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} ; x \in]-1; 1]$$

$$(\lambda): y = \begin{cases} -x \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & ; x \in]-1; 0] \\ x \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & ; x \in [0; 1] \end{cases}$$

$$(\lambda): y = \begin{cases} -f(x) & ; x \in]-1; 0] \\ f(x) & ; x \in [0; 1] \end{cases}$$

- المجموعة (λ) هي اتحاد منحنيين هما منحنى الدالة الذي ينطق على (C_f) لما $x \in [0; 1]$ و منحنى الدالة نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل (xx') لما $x \in]-1; 0]$.
الإنشاء في المعلم السابق .

(9) الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x + 1 - m}{x - 2}$ حيث m وسيط

حقيقي و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m .

(أ) تبين أن كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها :

لتكن $I_m(x_m; y_m) \in (C_m)$ و بالتالي : $y_m = \frac{x_m^2 + (m-2)x_m + 1 - m}{x_m - 2}$ أي أن

$y_m(x_m - 2) = x_m^2 + (m-2)x_m + 1 - m$ أي $y_m x_m - 2y_m = x_m^2 + mx_m - 2x_m + 1 - m$ و منه

$y_m x_m - 2y_m - x_m^2 - mx_m + 2x_m - 1 + m = 0$ و يكافئ

$\begin{cases} -x_m + 1 = 0 \\ y_m x_m - 2y_m - x_m^2 + 2x_m - 1 = 0 \end{cases}$ معناه : $m(-x_m + 1) + y_m x_m - 2y_m - x_m^2 + 2x_m - 1 = 0$

و بالتالي : $\begin{cases} x_m = 1 \\ y_m = 0 \end{cases}$ إذن $I_m(1; 0)$ أي أن

- كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة هي النقطة ذات الإحداثيات $(1; 0)$.

(ب) حساب $f'_m(x)$:

الدالة f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ و مشتقتها :

$$f'_m(x) = \frac{(2x + m - 2)(x - 2) - x^2 - (m - 2)x - 1 + m}{(x - 2)^2}$$

$$f'_m(x) = \frac{x^2 - 4x - m + 3}{(x - 2)^2}$$

- تعيين قيم الوسيط الحقيقي m التي تكون من أجلها الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها :

الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها معناه $f'_m(x) > 0$ أي أن $\frac{x^2 - 4x - m + 3}{(x - 2)^2} > 0$ و بما أن

$x \in \mathbb{R} - \{2\} : (x - 2)^2 > 0$ و معامل x^2 موجب تماما في البسط نجد أن $\Delta_m > 0$ (مميز البسط)

و بالتالي : $(-4)^2 - 4(-m + 3) > 0$ أي $4m + 4 > 0$ و منه $m > -1$ إذن $m \in]-1; +\infty]$ حتى تكون

الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها .

(ت) المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل لأن النقطة ذات الإحداثيات $(1; 0)$ تنتمي إلى المنحنيات

(C_m) و تنتمي إلى محور الفواصل (xx') .

(ث) تبين أن النقطة $\Omega_m(2; 2+m)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_m) :

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ و $4 - x \in \mathbb{R} - \{2\}$:

$$f(4-x) + f(x) = \frac{(4-x)^2 + (m-2)(4-x) + 1-m}{4-x-2} + \frac{x^2 + (m-2)x + 1-m}{x-2}$$

$$f(4-x) + f(x) = -\frac{16+x^2-8x+4m-mx-8+2x+1-m}{x-2} + \frac{x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}$$

$$f(4-x) + f(x) = \frac{-16-x^2+8x-4m+mx+8-2x-1+m+x^2+(m-2)x+1-m}{x-2} = \frac{(2m+4)x-4m-8}{x-2}$$

$$f(4-x) + f(x) = \frac{2(m+2)(x-2)}{x-2}$$

$$f(4-x) + f(x) = 2(m+2)$$

• من الشكل $f(2\alpha-x) + f(x) = 2\beta$ و بالتالي النقطة $\Omega_m(2; 2+m)$ مركز تناظر للمنحنى (C_m) .

إعداد و كتابة : غريب عظام