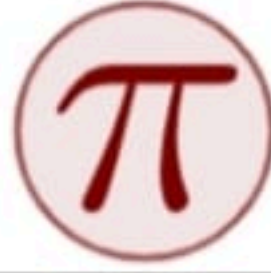


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



السنة الدراسية:
2023 – 2022

ثانوية فارس الطاهر - بئر العاتر -
امتحان الفصل الثاني
الشعبة: ثلاثة رياضيات

المدة: 02 ساعة

اختبار في مادة: الرياضيات

التمرين الأول: (10 نقاط)

لتكن (X_n) و (Y_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{n+1} = 3Y_n + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = 5 \\ X_{n+1} = 3X_n - 2 \end{cases}$$

(1) نعرّف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (u_n) بالعلاقة: $u_n = X_n - 1$

(أ) بين أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = 4 \times 3^n + 1$

(2) بين أنّ: $PGCD(X_{n+1}; X_n)$ يقسم 2 ثمّ استنتج أنّ: $PGCD(X_{n+1}; X_n) = 1$

(3) (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $5X_n - 4Y_n = 21$

(ب) استنتج عبارة Y_n بدلالة n ، ثمّ جد القيم الممكنة لـ: $PGCD(X_n; Y_n)$

(4) (أ) ادرس حسب يم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

(ب) بين أنّه إذا كان $n \equiv 5 [6]$ فإنّ: $PGCD(X_n; Y_n) = 7$

(ج) استنتج قيمة $PGCD(X_{2021}; Y_{2021})$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

(I) n عدد طبيعي غير معدوم، f_n دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب نهايات الدالة f_n عند أطراف مجموعة تعريفها.

- (ب) احسب $f'_n(x)$ ثم ادرس إشارتها.
- (ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
- (3) (أ) من أجل كل عدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)
- (ب) أنشئ بدقة المنحنيين (C_1) و (C_2) .

(II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ: $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- (1) اكتب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.
- (2) (أ) بين أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة.
- (ب) استنتج أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة.
- (3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و $0 \leq x \leq 1$ لدينا:

$$\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\left(\frac{e^{-1}}{n-1} \right) \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \left(\frac{1}{n-1} \right) \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(4) (أ) اعتمادا على السؤال (II) (1) بين أن:

$$I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

(ج) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.