

مجلة العبقرى في الرياضيات (الأعداد المركبة والتحويلات النقطية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية: تقني رياضي.

ملخص: حول الأعداد المركبة // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج: تر.

1 تعاريف ونتائج

1 تعاريف

كل عدد مركب z يُكتب من الشكل
 $z = x + iy$
 حيث x و y عدنان حقيقيان
 و i عدد تخيلي يُحقق $i^2 = -1$

ملاحظات وترميز:

- الكتابة $z = x + iy$ ، تسمى الشكل الجبري لـ z .
- x يسمى الجزء الحقيقي لـ z ونرمز له بـ: $x = \text{Re}(z)$
- y يسمى الجزء التخيلي لـ z ونرمز له بـ: $y = \text{Im}(z)$
- إذا كان: $\text{Im}(z) = 0$ ؛ فإن: $z = x$ فنقول أن: z حقيقي.
- إذا كان: $\text{Re}(z) = 0$ ؛ فإن: $z = yi$ فنقول أن: z تخيلي صرف (أو تخيلي بحت).
- إذا كان: $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$ ؛ فإن: $z = 0$ إذن: 0 هو في آن واحد حقيقي وتخييلي صرف.

نتيجة:

$$z = 0 \text{، معناه: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2 تساوي عددين مركبين

تعريف:

يكون عدنان مركبان z و z' متساويين
 إذا وفقط إذا كان لهما
 نفس الجزء الحقيقي
 ونفس الجزء التخيلي.

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \text{، معناه: } z = z'$$

بوضع:

$$z = x + iy$$

و

$$z' = x' + iy'$$

يُمثل العدد المركب

$$z = x + iy$$

بالنقطة

$$M(x; y)$$

3 التمثيل الهندسي لعدد مركب

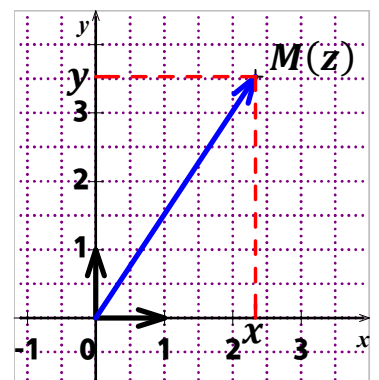
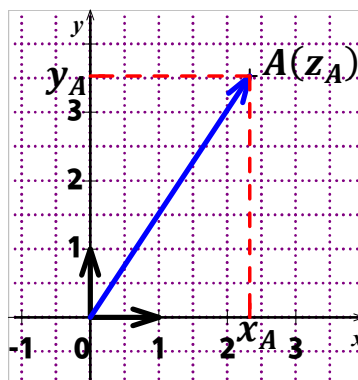
○ نُنسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

يسمى كل من M و $\vec{OM}$ صورة z .

ويسمى z لاحقة كل من M و $\vec{OM}$ ؛ نكتب: $M(z)$ ؛ $\vec{OM}(z)$.

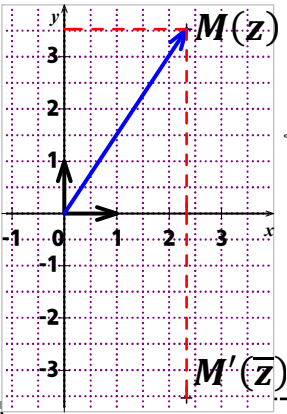
نتائج:

- محور الفواصل (محور الأعداد الحقيقية)
- محور التراتيب (محور الأعداد التخيلية)
- لاحقة الشعاع $\vec{OA} + \vec{OB}$ هي: $z_A + z_B$
- لاحقة الشعاع $\vec{AB}$ هي: $z_B - z_A$ حيث: $A(z_A)$ و $B(z_B)$



$$z_A = x_A + iy_A \text{ (حيث: } \text{Re}(z_A) = x_A \text{ و } \text{Im}(z_A) = y_A)$$

2 مرافق عدد مركب:



صورتا العددين المركبين المتطرفين؛ متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل

1 مرافق عدد مركب

مُرافق العدد المركب $z = x + iy$ ، هو العدد المركب $\bar{z} = x - iy$ (نقوم بتغيير إشارة الجزء التخيلي فقط)

2 خواص المرافق

خواص مباشرة من التعريف

$$\bar{\bar{z}} = z \quad ①$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad ②$$

$$z - \bar{z} = 2iy \quad ③$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad ④$$

المرافق والعمليات

$$\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'} \quad ②$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ①$$

$$(k \in \mathbb{R}) \quad \overline{kz} = k\bar{z} \quad ④$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad ③$$

$$(z \neq 0 \text{ و } k \in \mathbb{R}) \quad \overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\bar{z}} \quad ⑥$$

$$(z' \neq 0) \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad ⑤$$

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad ⑦$$

يمكن استخدام المرافق لإثبات أن z حقيقي، أو تخيلي صرف.

▪ z حقيقي، معناه: $\bar{z} = z$

▪ z تخيلي صرف، معناه: $\bar{z} = -z$

3 طولية وُعْدَة عدد مركب:

العُدة

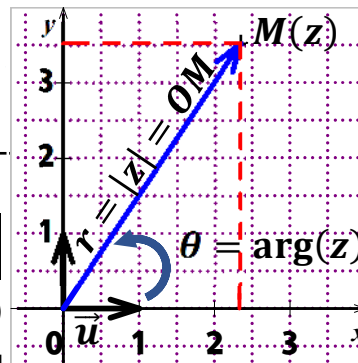
1 تعريف

عُدة z :

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \dots + 2k\pi$$

$$\arg(z) \equiv \dots [2\pi] \text{ ونكتب: } (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$$

...، هو قياس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$



الطولية

1 تعريف

$z = x + iy \neq 0$ صورته M .

طولية z :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$$

▪ في حالة: $z = 0$ ، فإن: $|z| = 0$.

2 خواص العُدة

خواص العُدة

(تذكر: خواص "ln")

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad ①$$

$$(z' \neq 0) \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad ②$$

$$(z \neq 0) \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad ③$$

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad ④$$

خواص الطولية

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad ② \quad |\bar{z}| = |-z| = |z| \quad ①$$

$$(z \neq 0) \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad ④ \quad (z' \neq 0) \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad ③$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad |z^n| = |z|^n \quad ⑥ \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad ⑤$$

3 إضافات

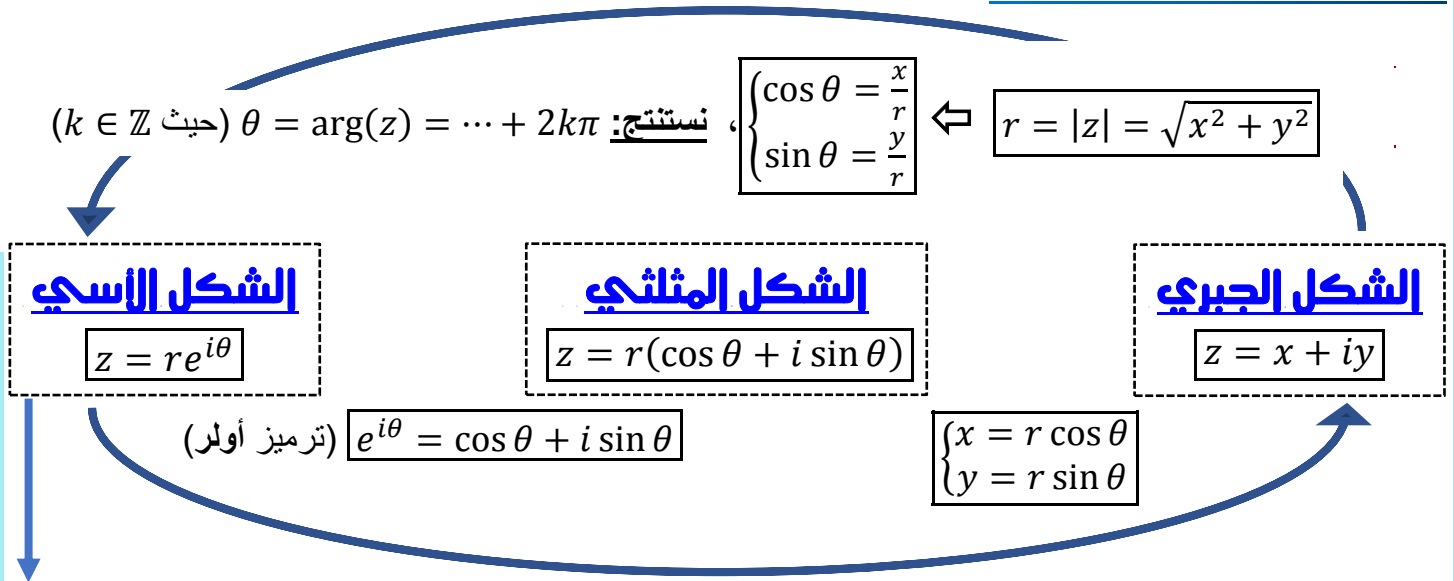
$$|z - z'| \neq |z| - |z'| \quad \text{و} \quad |z + z'| \neq |z| + |z'| \quad \text{و}$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \quad \text{و} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$$

4 الشكلان المثلثي والأسّي لعدد مركب:

لكتابة عدد مركب z على الشكل المثلثي أو الأسّي، نحتاج إلى حساب طويلته r وعمدته θ .

1 الانتقال من شكل إلى آخر



قواعد الحساب على الشكل الأسّي

(تذكر: خواص "exp")

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad ①$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad ②$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad ③$$

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad ; \text{حيث } n \in \mathbb{N}^* \text{ (دستور موافر)}$$

نجد:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$\text{إذن: } (n \in \mathbb{N}^* \text{ حيث}) \quad z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

ومنه:

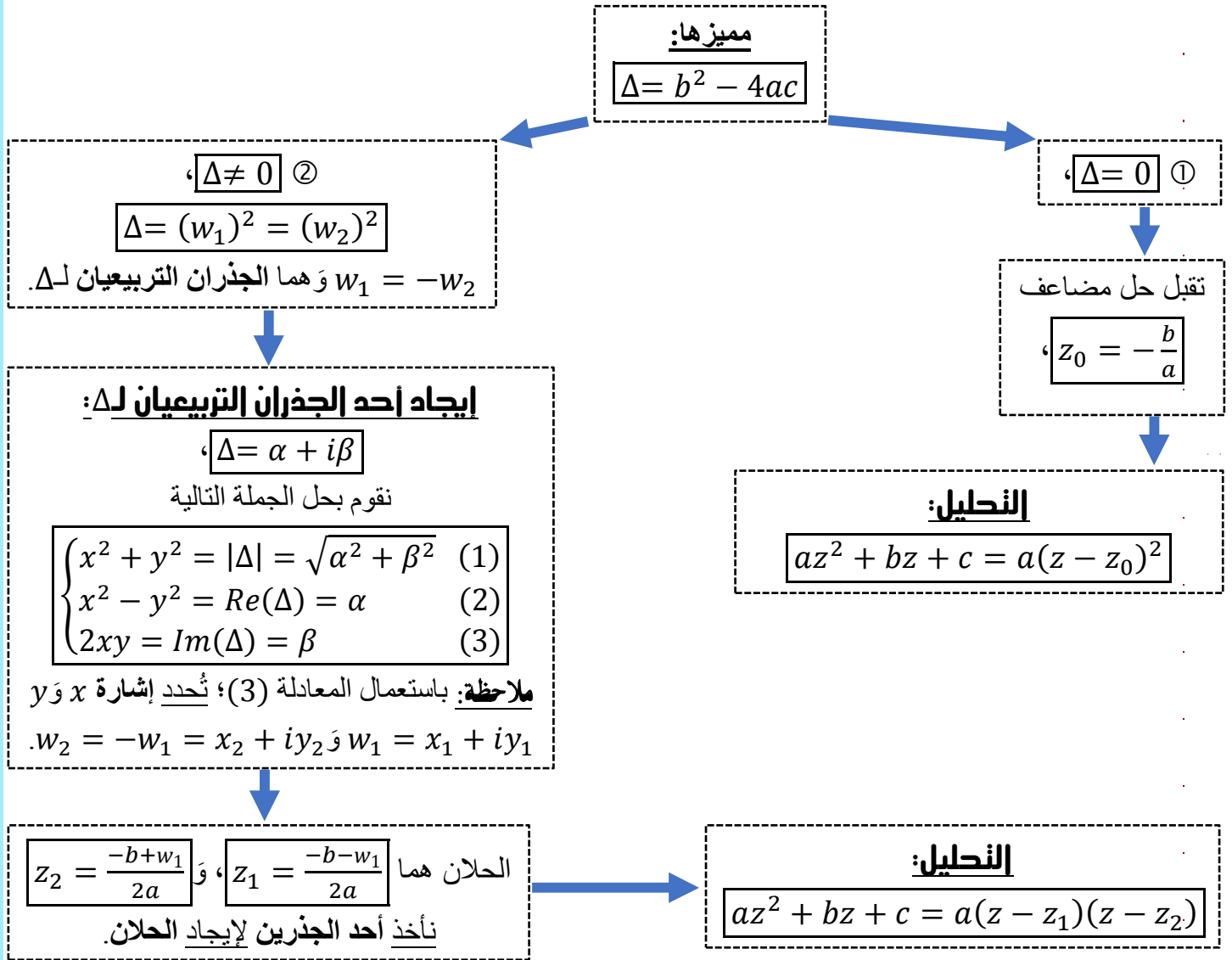
$$r^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

2 تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث z^n عدد مركب # خاص

حيث	حقيقي سالب	حقيقي موجب	حقيقي	z^n
(حيث $k \in \mathbb{Z}$)	$\arg(z^n) = \pi + 2k\pi$ $n\theta = \pi + 2k\pi$	$\arg(z^n) = 2k\pi$ $n\theta = 2k\pi$	$\arg(z^n) = k\pi$ $n\theta = k\pi$	معناه: أي:
حيث	تخيلي صرف	تخيلي صرف	تخيلي صرف	z^n
(حيث $k \in \mathbb{Z}$)	$\arg(z^n) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $n\theta = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$	معناه: أي:

6 حل بعض المعادلات في $\mathbb{C}$

معادلات من الشكل $az^2 + bz + c$ (حيث $a \neq 0$)



هام: في حالة a, b و c أعداد حقيقية، فإن الحلان مترافقان؛ أي: $z_1 = \bar{z}_2$.

5 توظيف الأعداد المركبة في الهندسة:

1 التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة

التفسير الهندسي	الطويلة والعُمدة
$\begin{cases} z = OM \\ \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \end{cases} \quad ①$	① طويلة وعُمدة z (لاحقة كل من النقطة M ؛ والشعاع $\overrightarrow{OM}$)
$\begin{cases} z_A = OA \\ \arg(z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \end{cases} \quad ②$	② طويلة وعُمدة z_A (لاحقة كل من النقطة A ؛ والشعاع $\overrightarrow{OA}$)
$\begin{cases} z_B - z_A = AB \\ \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \end{cases} \quad ③$	③ طويلة وعُمدة $(z_B - z_A)$ ($\overrightarrow{AB} = z_B - z_A$ لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$)

$\left\{ \begin{array}{l} \left \frac{z_B}{z_A} \right = \frac{ z_B }{ z_A } = \frac{OB}{OA} \\ \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \end{array} \right. \quad (4)$ (المقام أولاً في arg)	④ طولية وُعْدَة $\frac{z_B}{z_A}$ ($B \neq O$ و $A \neq O$) (لاحظ أن: $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$)
$\left\{ \begin{array}{l} \left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = \frac{ z_C - z_A }{ z_B - z_A } = \frac{AC}{AB} \\ \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \end{array} \right. \quad (5)$ (المقام أولاً بالعكس في arg)	⑤ طولية وُعْدَة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ($B \neq A$ و $C \neq A$)

② لا حقة المرجح

النقطة (المرجح)	لاحقتها
① لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ (مرجح A و B بنفس المعاملات؛ وتأخذ 1)	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (1)$
② لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC (مرجح A ، B و C بنفس المعاملات؛ وتأخذ 1)	$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \quad (2)$
③ لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$	$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (3)$

③ تداور النقط

إذا كان	نسنتج أن
① $ z_A = z_B = z_C = z_D = r$ معناه: $OA = OB = OC = OD = r$	① النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر r .
② $ z_A - z_\omega = z_B - z_\omega = z_C - z_\omega = z_D - z_\omega = r$ معناه: $\omega A = \omega B = \omega C = \omega D = r$	② النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω ونصف القطر r .

④ إستقامة النقط

إذا كان	نسنتج أن
① $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ (حيث $B \neq A$) معناه: $\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \arg(k) = k\pi$ أي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية مستقيمة	① النقط A, B و C في إستقامة.
② $\frac{z_B}{z_A} = k \in \mathbb{R}$ (حيث $A \neq O$) معناه: $\arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \arg(k) = k\pi$ أي: $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية مستقيمة	② النقط O, A و B على إستقامة واحدة.

5 توازي شعاعين أو مستقيمين

نستنتج أن	إذا كان
① $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) // (AC)$.	① $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k \in \mathbb{R}^*$ (حيث $A \neq C$ و $B \neq D$) تكافئ: $z_D - z_B = k(z_C - z_A)$ معناه: $\overrightarrow{z_{BD}} = k \overrightarrow{z_{AC}}$ أي: $\overrightarrow{BD} = k \overrightarrow{AC}$

6 تعامد مستقيمين أو شعاعين

نستنتج أن	إذا كان
① $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) \perp (AC)$.	① $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy; (y \in \mathbb{R}^*)$ (حيث $A \neq C$ و $B \neq D$) معناه: $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(iy) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) أي: $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية قائمة
② $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ أو $(OB) \perp (OA)$.	② $\frac{z_B}{z_A} = iy; (y \in \mathbb{R}^*)$ (حيث $A \neq O$ و $B \neq O$) معناه: $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(iy) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) أي: $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية قائمة

7 طبيعة مثلث

بصفة عامة

طبيعة المثلث OAB ؛ حسب طولية و عمدة $\frac{z_B}{z_A}$ ، وطبيعة المثلث ABC ؛ حسب طولية و عمدة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

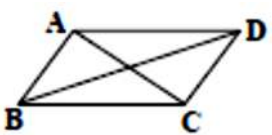
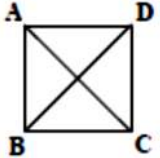
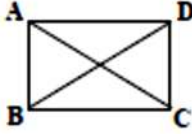
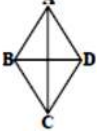
إذن	معناه	لدينا
① المثلث ABC قائم في A ، ومتساوي الساقين.	(التفسير الهندسي للطولية والعمدة) $\begin{cases} \left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = \frac{AC}{AB} = \pm i = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(\pm i) \end{cases}$ ① $AC = AB$ أي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	① $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ ($B \neq A$ و $C \neq A$)
② المثلث ABC قائم في A .	② $\begin{cases} \left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = \frac{AC}{AB} = yi \neq 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(yi) \end{cases}$ $AC \neq AB$ أي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	② $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = yi; y \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$ ($B \neq A$ و $C \neq A$)

③ المثلث ABC متقايس الأضلاع.	$\begin{cases} \left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = \frac{AC}{AB} = \left e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \right = 1 \\ \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \arg \left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \right) \end{cases} \quad \text{أي: } \begin{cases} AC = AB \\ (\overline{AB}; \overline{AC}) = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$	③ $(B \neq A \text{ و } C \neq A) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$
④ المثلث ABC متساوي الأضلاع.	④ $AC = BC = AB$	④ $ z_C - z_A = z_C - z_B = z_B - z_A $
⑤ مُرعاة شروط أخرى (العمدة)	⑤ $AC = AB$	⑤ $ z_C - z_A = z_B - z_A $ (العلاقة غير كافية؛ للحكم على طبيعة المثلث)

تذكر أنه: كل عدد مركب طويلته 1؛ و θ عمدة له، يُكتب من الشكل $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (ترميز أولر).

بصفة عامة

⑧ طبيعة رباعي

الطريقة الثانية	الطريقة الأولى	نُثبت أن لإثبات أن الرباعي
① القطران مناصفان. أي: $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$	① شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ نُثبت مثلاً: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$	① $ABCD$ متوازي أضلاع. 
② القطران مناصفان ومتقاطعان ومتعامدان. أي: $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ z_C - z_A = z_D - z_B \\ \arg \left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$	② شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وضلعان متتابعان متقايسان ومتعامدان. نُثبت مثلاً: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ AB = AD \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ z_B - z_A = z_D - z_A \\ \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$	② $ABCD$ مربع. 
③ القطران مناصفان ومتقاطعان. أي: $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ z_C - z_A = z_D - z_B \end{cases}$	③ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وضلعان متتابعان متعامدان. نُثبت مثلاً: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$	③ $ABCD$ مستطيل. 
④ القطران مناصفان ومتعامدان؛ أي: $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ \arg \left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$	④ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وضلعان متتابعان متقايسان. نُثبت مثلاً: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ AB = AD \end{cases}$ أي: $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ z_B - z_A = z_D - z_A \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$	④ $ABCD$ معين. 

6. ✍ توظيف الأعداد المركبة في التحويلات النقطية:

f تحويل نقطي يُرفق بكل نقطة $M(z)$ ، النقطة $M'(z')$ ؛ نكتب: $f: M(z) \rightarrow M'(z')$ أو $M' = f(M)$.

النحويل f	انسحاب	نحاكي	دوران	نشابه مباشر
التعريف $M' = f(M)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$
العبارة المركبة للتحويل f	العبارة ❶ $z' = \boxed{a}z + b$			
إذا كان	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$a \in \mathbb{C}^*$ و $ a = 1$	$a \in \mathbb{C}^*$ و $ a \neq 1$
العناصر المميزة للتحويل f	❶ شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z\vec{u} = b$.	❶ نسبته a ، ❷ ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$	❶ زاويته $\theta = \arg(a)$ ، ❷ ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$	❶ نسبته $k = a > 0$ ، ❷ وزاويته $\theta = \arg(a)$ ، ❸ ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
في حالة	تعيين تحويل يُحوّل نقطتين: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b & (1) \\ z_{B'} = az_B + b & (2) \end{cases}$ وبالطرح: $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ ، ويكون: $\boxed{z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)}$			
في حالة	تخص التحويلات ذوات المركز: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b & (1) \\ z_{\Omega} = az_{\Omega} + b & (2) \end{cases}$ وبالطرح: $a = \frac{z_{B'} - z_{\Omega}}{z_B - z_{\Omega}}$ ، ويكون: $\boxed{z_{B'} - z_{\Omega} = a(z_B - z_{\Omega})}$			
كتابات أخرى لـ a	$a = ke^{i\theta}$ في إحدى العبارات الخمس $a = e^{i\theta}$ في إحدى العبارات الخمس			
استعمال العلاقات	❶ تُعرف طبيعة التحويل f ، وعناصره المميزة من العدد a . ❷ نقطة صورة أخرى بالتحويل f ، عُد إلى العلاقات الخمس وخاصة ❷، ❸، ❹، و ❺.			

7. ✍ مجموعات النقط:

❶ المرجع ومجموعات النقط

تحويل العبارة الشعاعية (أو المديّة)

ملاحظة	فإن	إذا كان
حيث G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$	$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$	$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة 'شال'؛ نحصل على شعاع ثابت (مستقل عن M)	شعاع ثابت $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$	$\alpha + \beta + \gamma = 0$
حيث G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$	$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$	$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

تذكر أن: $\|(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}\| = |\alpha + \beta + \gamma| \|\overrightarrow{MG}\| = |\alpha + \beta + \gamma| MG$

2 تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق شرط معين:

الشرط	مجموعة النقط هي	النتيجة
$ z = k$	- دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = k$ (في حالة $k > 0$) - النقطة O أي: $(\Gamma) = \{O\}$ (في حالة $k = 0$) - مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$ (في حالة $k = 0$)	$ z = k$ <u>تُكافئ:</u> $OM = k$
$ z - z_A = k$	- دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = k$ (في حالة $k > 0$) - النقطة A أي: $(\Gamma) = \{A\}$ (في حالة $k = 0$) - مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$ (في حالة $k = 0$)	$ z - z_A = k$ <u>تُكافئ:</u> $AM = k$
$ z - z_A = z - z_B $	محور القطعة المستقيمة $[AB]$.	<u>تُكافئ:</u> $AM = BM$

عبارة من الشكل $z = z_\Omega + ke^{i\theta}$ (مبني $\theta \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}_+^*$)

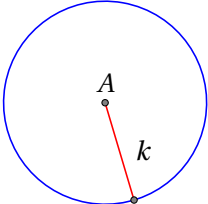
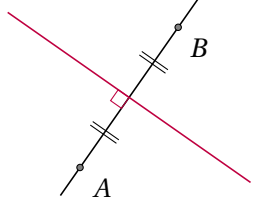
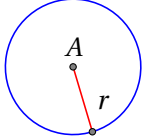
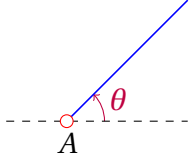
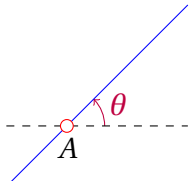
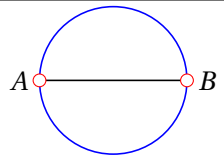
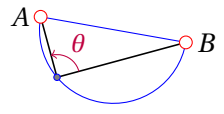
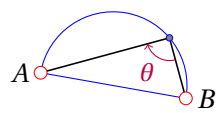
الشرط	مجموعة النقط هي	النتيجة
θ متغير و k ثابت	دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = k$.	$ z - z_\Omega = ke^{i\theta} $ <u>تُكافئ:</u> $\Omega M = k$
θ ثابت و k متغير	- نصف المستقيم $[\Omega B]$ باستثناء Ω (لأن: $k > 0$) - أي: $(\Gamma) = [\Omega B] - \{\Omega\}$ - حيث $B \in (\Gamma)$	$\arg(z - z_\Omega) = \arg(ke^{i\theta})$ <u>تُكافئ:</u> $(\vec{u}; \vec{\Omega M}) = \theta + 2k\pi$

عبارة من الشكل $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ (مجموعات نقط تُستخدم فيها العُقدة)

الشرط	مجموعة النقط هي	النتيجة
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف	الدائرة ذات القطر $[AB]$ ، باستثناء A .	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ <u>أي:</u> $(\vec{AM}; \vec{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $M = B$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وجزئه تخيلي موجب	- نصف الدائرة الذي يشمل C، والذي طرفاه A و B؛ باستثناء A. (حيث: $C \in (\Gamma)$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وجزئه تخيلي موجب <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ <u>أي:</u> $(\vec{AM}; \vec{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $M = B$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وجزئه تخيلي سالب	- نصف الدائرة الذي يشمل D، والذي طرفاه A و B؛ باستثناء A. (حيث: $D \in (\Gamma)$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وجزئه تخيلي سالب <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ <u>أي:</u>

$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أو } M = B$		
$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}$ <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi$ <u>أي:</u> $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi/k \in \mathbb{Z}$	■ المستقيم (AB)، باستثناء النقطة A. (أي: $(\Gamma) = (AB) - \{A\}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \text{ حقيقي}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_+^*$ <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ <u>أي:</u> $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$	■ المستقيم (AB)، باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$. (أي: $(\Gamma) = (AB) - [AB]$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \text{ حقيقي موجب تماما}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_-^*$ <u>معناه:</u> $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi + 2k\pi$ <u>أي:</u> $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$	■ القطعة المستقيمة $[AB]$، باستثناء النقطتين A و B. (أي: $(\Gamma) = [AB] - \{A; B\}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \text{ حقيقي سالب تماما}$

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

التمثيل البياني	مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z	العبرة المركبة
	✿ $k < 0$: مجموعة خالية. ✿ $k = 0$: مجموعة النقط هي النقطة A. ✿ $k > 0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	$ z - z_A = k$
	مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$	$ z - z_A = z - z_B $
	مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r .	$z - z_A = re^{i\theta}$ r ثابت موجب تماماً و $\theta \in \mathbb{R}$
	مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[AM]$ باستثناء النقطة A حيث $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \theta$	$z - z_A = re^{i\theta}$ $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ $r \in \mathbb{R}_+^*$ و θ ثابت
	مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A حيث $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \theta$	$\arg(z - z_A) = \theta + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
	مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ تخيلي $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ صرف
	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
	المستقيم (AB) باستثناء النقطة B .	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ حقيقي $\frac{z - z_A}{z - z_B}$
	القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ حقيقي سالب تماماً $\frac{z - z_A}{z - z_B}$
	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ حقيقي موجب تماماً $\frac{z - z_A}{z - z_B}$