

كتاب الرائد للرياضيات
السنة الثانية ثانوي علمي

BEYMATHS + BELABIDI

جزء: التحليل

الدوال + المتتاليات

تأليف الأستاذين: باي زواوي + بالعبيدي محمد العربي

السنة الدراسية: 2021/2020

الباب الأول

عموميات على الدوال

الكفاءات المستهدفة

- تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية
- دراسة اتجاه تغير دالة الدوال المرجعية
- تمثيل بعض الدوال بيانيا باستعمال الدوال المرجعية

من بداية الأسبوع الثاني من سبتمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من سبتمبر

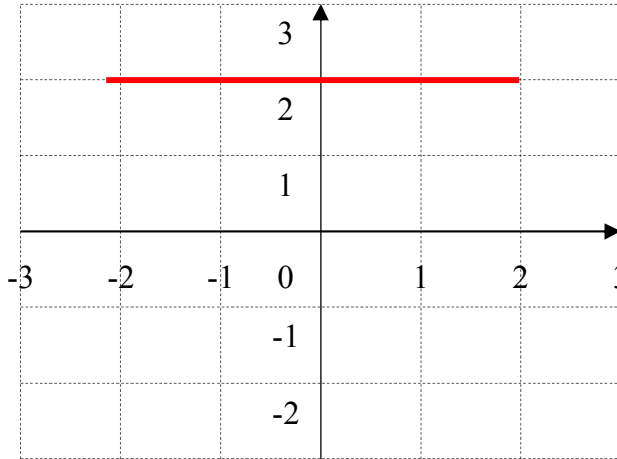
المدة: 3 أسابيع
المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 21 ساعة و تقني رياضي 18 ساعة

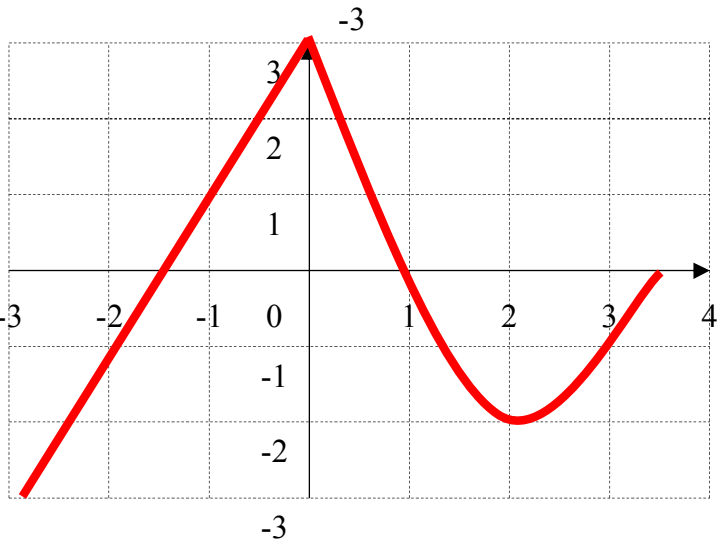
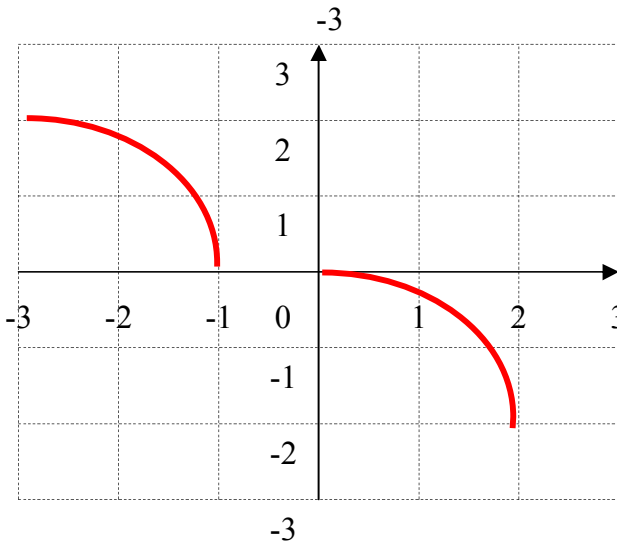
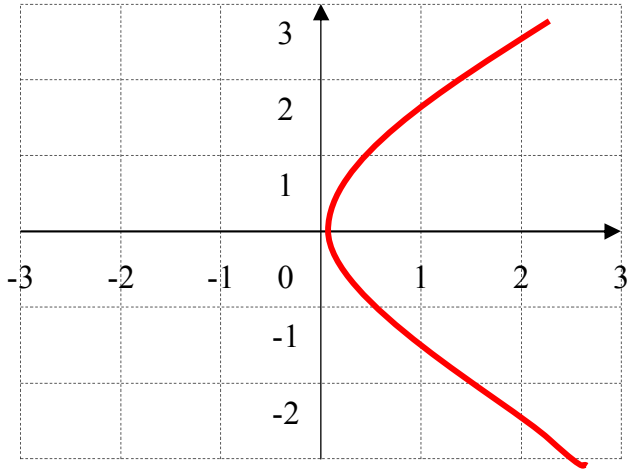
الدوال العددية

نشاط 01: أي التمثيلات يمثل تمثيل بياني لدالة مع التعليل

البيان ②



البيان ①



البيان ④

البيان ③

1. عين بيانيا مجموعة تعريف الدالة f_3 للبيان (C_3) "الرسم 3"
2. عين بيانيا من (C_3) صور كل من 1، 0، -1 و سابقة 4
3. حل بيانيا المعادلتين ثم المتراجحة $f(x) < 0$ ، $f(x) = -x$ ، $f(x) = -2$
4. شكل جدول تغيرات f_3
5. عين القيم الصغرى والعظمى على المجال $[-3, 4]$ للدالة f_3

تذكير:

1. **الدالة و مجموعة التعريف:** D جزء من R إذا كان كل عدد حقيقي من D نرفق له عددا حقيقيا وحيدا من R بواسطة f نسمي f بدالة و $f(x)$ هو صورة x في مجموعة تعريفها
2. **ملاحظة:** نسمي مجموعة تعريف دالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجاها $f(x)$ ممكن حسابه
3. **التمثيل البياني لدالة:** f دالة D مجموعة تعريفها (C) هو التمثيل البياني للدالة f يعني أنه يمثل مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $x \in D$ و $y = f(x)$ أي أن $y = f(x)$ هي معادلة البيان (C) في المعلم (O, I, J)

تطبيقات: عين مجموعة تعريف الدوال العددية الحقيقية التالية

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, f(x) = \frac{1}{x^2-1}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}, f(x) = \frac{1}{x^2-x}, f(x) = \frac{1}{|x|-1}$$

$$f(x) = \sqrt{6-2|x|}, f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{x-7}, f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x-6}}, f(x) = \sqrt{6-2x}, f(x) = \sqrt{2x-6}$$

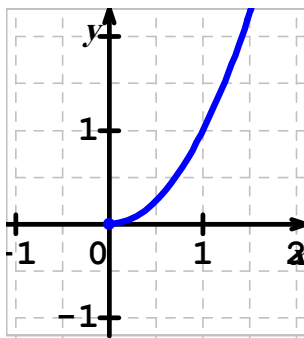
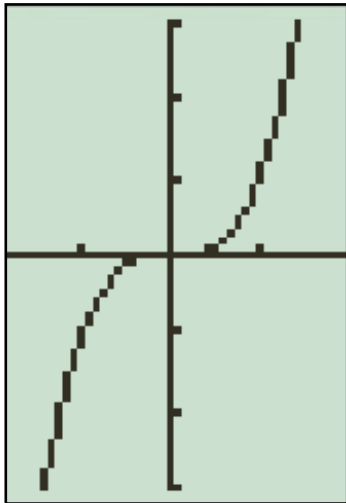
3. اتجاه تغير دالة:

نشاط: باستعمال الآلة الحاسبة البيانية مثلنا الدالة "مكعب" $f(x) = x^3$ المعرفة على $\mathbb{R}$:

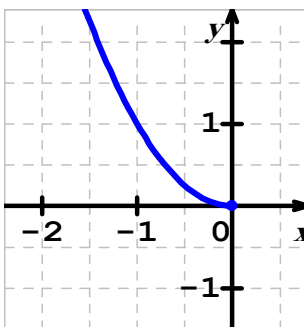
1. ماهو التخمين الذي يمكن أن نستنتجه حول اتجاه تغيرها من البيان

2. تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا:

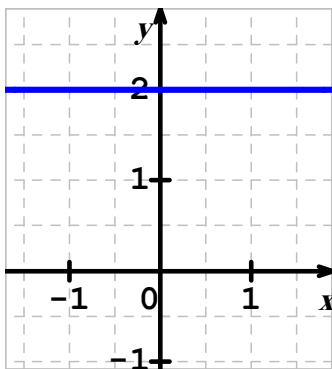
$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} x_2^2 \right]$$



الدالة f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$



الدالة f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين x_1 , x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$



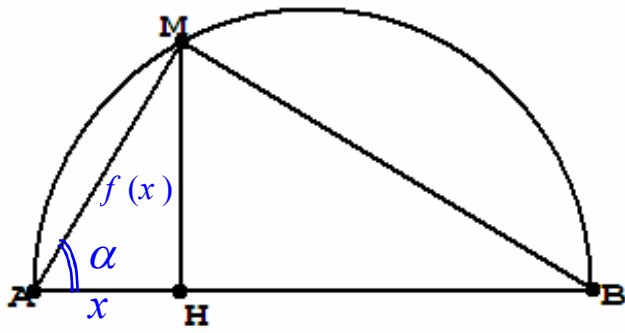
الدالة f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين x_1 , x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$

واجب منزلي: التمرين رقم 08، 12، 14، 19 الصفحة 27

4. الدوال المرجعية:

نشاط: (C) نصف دائرة قطرها $AB = 1 \text{ cm}$ حيث: نرفق بكل نقطة M من (C) مختلفة عن A النقطة H

المسقط العمودي للنقطة M على (AB) نضع: $\widehat{BAM} = \alpha$ و $AH = x$ و $f(x) = AM$



1. عبر عن $\cos(\alpha)$ بطريقتين مختلفتين

2. استنتج عبارة $f(x)$ بدلالة x

3. حدد مجموعة تعريف الدالة f

4. حدد اتجاه تغيرها ثم شكل جدول تغيراتها

5. ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

الجواب:

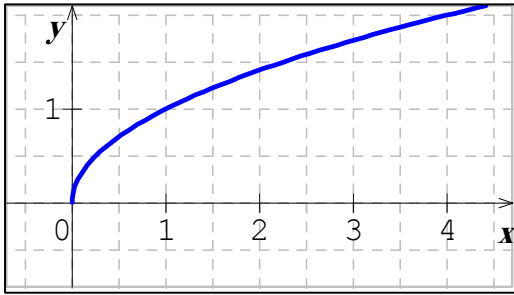
1. بما أن المثلث AHM قائم في H فإن: (1) $\cos(\alpha) = \frac{AH}{AM} = \frac{x}{f(x)}$

وبما أن المثلث ABM قائم في M فإن: (2) $\cos(\alpha) = \frac{AM}{AB} = \frac{f(x)}{1} = f(x)$

ومن (1) و (2) ينتج: $\frac{x}{f(x)} = f(x)$ ومنه: $(f(x))^2 = x$ ومنه: $f(x) = \sqrt{x}$

2. لما M تتحرك (C) فإن: M تتحرك على $[AB]$ فإن: x تسمح $]0;1]$ ومنه: $D_f =]0;1]$ لأن: M مختلفة عن A

3. لكل a و b من D_f : نفرض $a < b$ لدينا: $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$ ومنه: f متزايدة تماما



الدوال المرجعية:

التمثيل البياني	الدالة مقلوب	التمثيل البياني	الدالة مربع
	$f: x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ f متناقصة تماما على $]0; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$ وهي معرفة على $\mathbb{R}^*$		$f: x \rightarrow f(x) = x^2$ f متزايدة على $[0; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; 0]$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$
التمثيل البياني	الدالة قيمة مطلقة	التمثيل البياني	الدالة جذر تربيعي
	$f: x \rightarrow f(x) = x $ f متزايدة على $[0; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; 0]$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$		$f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ f متزايدة على $[0; +\infty[$ وهي معرفة على $[0; +\infty[$
		$f: x \rightarrow f(x) = \sin x$ و $f: x \rightarrow f(x) = \cos x$ دوريتان و دورهما 2π	

نشاط: f و g دالتان معرفتان على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x^2 + 3$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ أجب بصح أو خطأ على مايلي:

$$(f + g)(5) = \frac{-22}{5} \quad (1) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -x^3 + 3x \quad (2)$$

$$(2f + 3g)(1) = 7 \quad (4) \quad (f + g)(x) = \frac{-x^2 + 3}{x} \quad (3)$$

الجواب: 1. خطأ 2. صح 3. خطأ 4. صح

1. تساوي الدالتان:

تعريف: لتكن f و g دالتان نقول أن الدالتان f و g متساويتان إذا:

● الدالتان f و g لهما نفس مجموعة التعريف D

● لكل $x \in D : f(x) = g(x)$

مثال 01: لتكن f و g و h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x$ لدينا: $f = g$ لأن الشرطان محققان بينما: $f \neq h$ لأن مثلاً: $f(-1) = 1 \neq h(-1) = -1$

مثال 02: لتكن f معرفة على $\mathbb{R} - \{5\}$ بـ: $f(x) = \frac{(x-5)(x+2)}{x-5}$ و g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 2$

$f \neq g$ لأن ليس لهما نفس مجموعة التعريف لكن $f = g$ على $\mathbb{R} - \{5\}$ فقط

2. **العمليات الجبرية على الدوال:** لتكن f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب

العمليات	الترميز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع دالة بعدد حقيقي	$f + k$	$(f + k)(x) = f(x) + k$	D_f
مجموع دالتان	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء دالة بعدد حقيقي	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$	D_f
جداء دالتان	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
حاصل قسمة دالتان	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0$

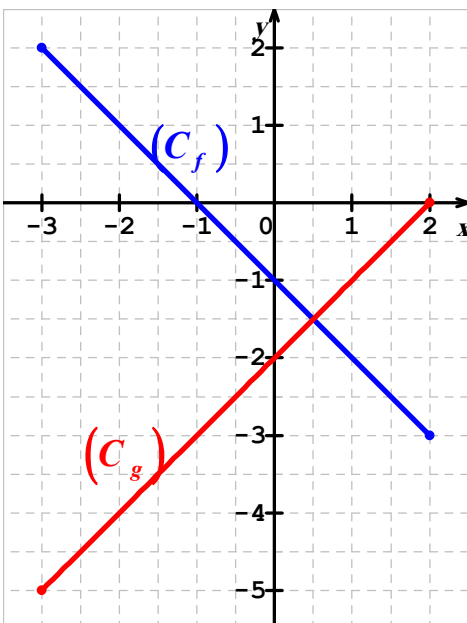
تمرين تطبيقي:

1. بين أن مجموع دالتان تألفتان هو دالة تألفية

2. لتكن f و g دالتان معرفتان على $[-3; 2]$ و المرسومان في المعلم التالي:

● مثل في نفس المعلم السابق بيان الدالة $f + g$

● أعطي العبارة الجبرية $(f + g)(x)$



واجبات منزلية: التمرين 27 الصفحة 27 و التمرين 28 الصفحة 28

تعريف: لتكن f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب
إذا كان لكل $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$ فإن: مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة $g(f(x))$
و نرمز لها بالرمز $g \circ f$ ونكتب: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

مثال 03: لتكن f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2 + 2$

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 2 = (x + 1)^2 + 2$
2. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)) + 1 = x^2 + 3$

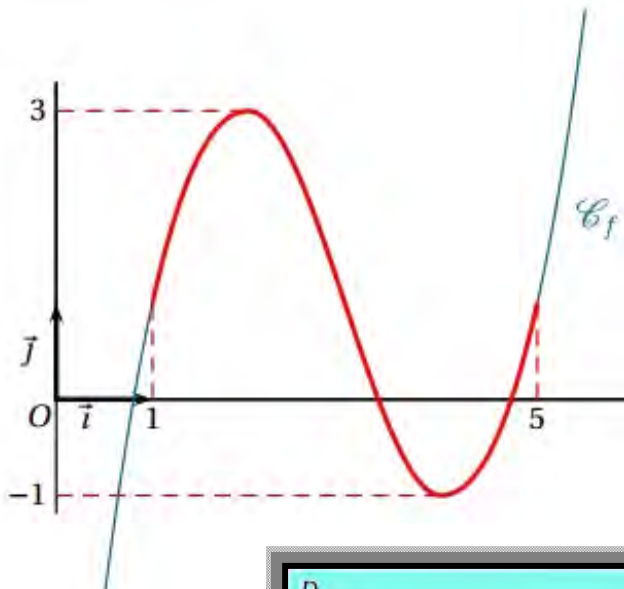
عموما: $g \circ f \neq f \circ g$

ملاحظات هامة:

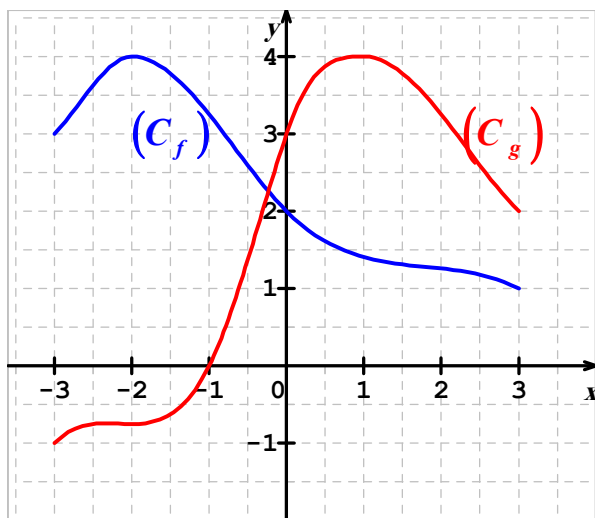
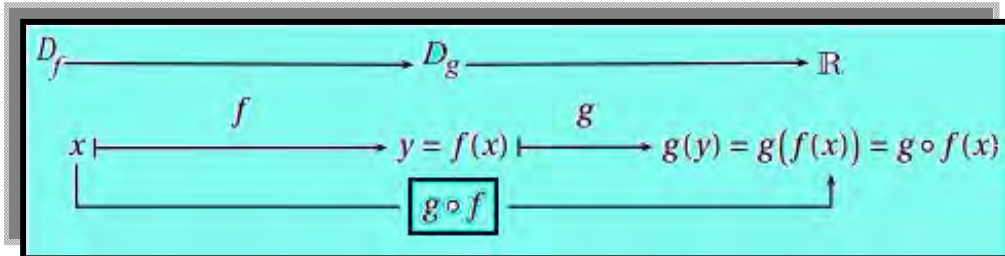
1. **صورة مجال:** لتكن f دالة و I مجال جزئي من مجموعة التعريف D_f

نسوي $f(I)$ مجموعة الصور "مجموعة القيم" لما x تمشح I أي: $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

مثال: نقرأ من التمثيل البياني التالي: $f([1;5]) = [-1;3]$



2. **مخطط التركيب:**



مثال 03: لتكن f و g معرفتان على $[-3;3]$

و المرسومان في المعلم التالي:

1. عين إن وجدت الأعداد التالية: $(g \circ f)(-1)$ ، $(g \circ f)(-3)$

$(g \circ f)(3)$ ، $(g \circ f)(1)$ ، $(g \circ f)(0)$

2. ماهي مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$

3. عين سابقة "أوسوابق" العدد 3 بواسطة g ، $g \circ f$

واجبات منزلية: التمرين 34 الصفحة 28 و التمرين 39 الصفحة 28

6. اتجاه تغير الدوال:

نشاط 01: لتكن f دالة معرفة على $]-\infty; 0[$ بـ: $f(x) = -5x^2 + 3$

1. أكتب الدالة f على شكل تركيب دالتان إحداهما الدالة المرجعية مربع

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty; 0[$

الجواب: 1. $h(x) = x^2$ و $g(x) = -5x + 3$ و $f(x) = g(h(x)) = (goh)(x)$

2. لكل a و b من المجال $]-\infty; 0[$ نفرض $a < b$ ومنه: $a^2 > b^2$ لأن الدالة مربع متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$

ومنه: $-5a^2 < -5b^2$ "الضرب في عدد سالب"

ومنه: $-5a^2 + 3 < -5b^2 + 3$ ومنه: $f(a) < f(b)$ ينتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$

نشاط 02: لتكن f دالة معرفة على $[2; +\infty[$ بـ: $f(x) = (-2x + 4)^2$

1. أكتب الدالة f على شكل تركيب دالتان: g دالة تألفية و h الدالة المرجعية مربع

2. أدرس اتجاه تغير الدوال g ، h و f على $[2; +\infty[$

3. عين صورة المجال $[2; +\infty[$ بواسطة الدالة التألفية g

الجواب: 1. $f(x) = (x^2) \circ (-2x + 4) = g(h(x)) = (goh)(x)$ حيث: $g(x) = -2x + 4$ و $h(x) = x^2$

2. لكل a و b من المجال $[2; +\infty[$ نفرض $a < b$

ومنه: $-2a > -2b$ "الضرب في عدد سالب" ومنه: $-2a + 4 > -2b + 4$

ومنه: $g(a) > g(b)$ أي: g دالة متناقصة تماما أو "بما أن g دالة تألفية معاملها سالب فهي متناقصة تماما"

لدينا: a و b من المجال $[2; +\infty[$ معناه

$a \geq 2 \Leftrightarrow -2a \leq -4$	بالمثل	$b \geq 2 \Leftrightarrow -2b \leq -4$
$\Leftrightarrow -2a + 4 \leq 0$		$\Leftrightarrow -2b + 4 \leq 0$

وعليه: $(-2a + 4)$ و $(-2b + 4)$ تنتمي إلى $]-\infty; 0[$ و الدالة مربع هي متناقصة على $]-\infty; 0[$

ومنه: $f(a) < f(b) \Leftrightarrow (-2a + 4)^2 < (-2b + 4)^2$ إذن: الدالة f متزايدة على $[2; +\infty[$

3. $g([2; +\infty[) =]-\infty; 0]$

نتيجة: الدالة التألفية g متناقصة تماما على $[2; +\infty[$

و $g([2; +\infty[) =]-\infty; 0]$ و الدالة مربع هي متناقصة على $]-\infty; 0[$

ومنه: تركيب دالتان متناقصتان هو دالة متزايدة على $[2; +\infty[$

1. **اتجاه تغير الدالة $f + k$:** لتكن الدالة f رتيبة على D_f فإن f و $f + k$ لهما نفس اتجاه التغير على D_f مع $k \in \mathbb{R}$

2. **اتجاه تغير الدالة λf :** لتكن الدالة f رتيبة على D_f و $\lambda \in \mathbb{R}^*$ فإنه:

- إذا كان $\lambda > 0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على D_f
- إذا كان $\lambda < 0$ يكون للدالتين f و λf اتجاهين متعاكسين في التغير على D_f

3. **اتجاه تغير الدالة $g \circ f$:** لتكن الدالة f رتيبة على مجال I و g رتيبة على مجال J و حيث: $f(I) \subset J$

	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
g متزايدة تماما على $f(I)$	$g \circ f$ متزايدة تماما على I	$g \circ f$ متناقصة تماما على I
g متناقصة تماما على $f(I)$	$g \circ f$ متناقصة تماما على I	$g \circ f$ متزايدة تماما على I

ملاحظة: إذا كانت g متزايدة تماما على $f(I)$ فإن $g \circ f$ لها نفس اتجاه تغير f على I

إذا كانت g متناقصة تماما على $f(I)$ فإن $g \circ f$ و f من اتجاهين متعاكسين في التغير على I

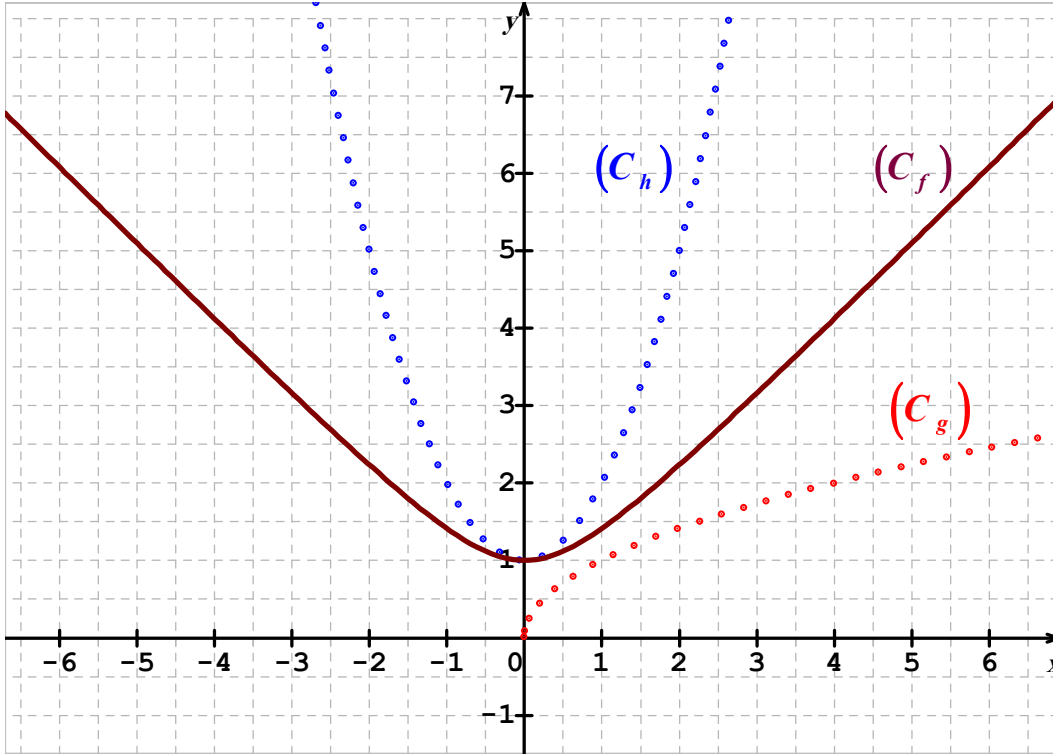
البراهين في الكتاب المدرسي

مثال 01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ يمكن تفكيك الدالة $f = goh$ حيث: $g(x) = \sqrt{x}$

و $h(x) = x^2 + 1$

(أ) لدينا الدالة h متناقصة على $]-\infty; 0]$ و $[1; +\infty[$ و $h(]-\infty; 0]) = [1; +\infty[$ و $h([0; +\infty[) = [1; +\infty[$ إذن دالة f متناقصة على $]-\infty; 0]$

(ب) لدينا الدالة h متزايدة على $[0; +\infty[$ و $h([0; +\infty[) = [1; +\infty[$ و $h(]-\infty; 0]) = [1; +\infty[$ إذن دالة f متزايدة على $[0; +\infty[$



التمثيل البياني يوضح النتائج:

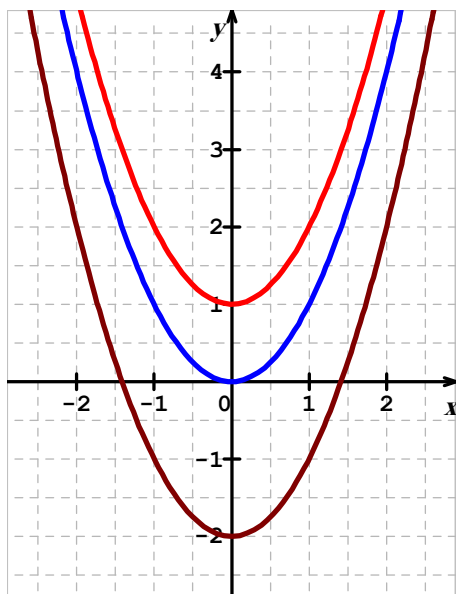
تطبيقات: التمرين 49 الصفحة 29

7. التمثيل البياني:

1. التمثيل البياني للدالة $f + k$: إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلان البيانيان في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

للدالتان f و $f + k$ على الترتيب حيث $k \in \mathbb{R}$ فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{k} \cdot \vec{j}$ البرهان في الكتاب المدرسي

مثال:



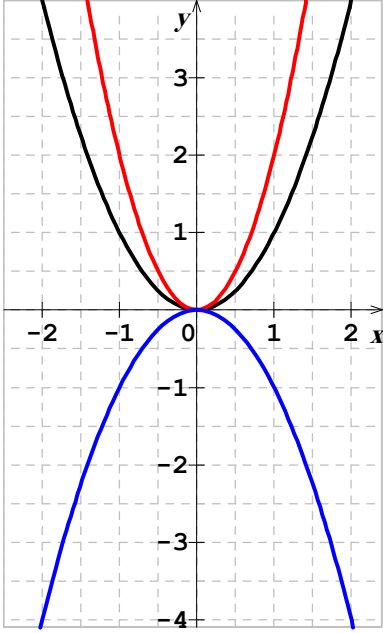
- اللون الأزرق هو بيان الدالة مربع
- اللون الأحمر هو بيان الدالة $h(x) = x^2 + 1$
- اللون البني هو بيان الدالة $h(x) = x^2 - 2$

تطبيق: التمرين 48 الصفحة 29

2. التمثيل البياني للدالة f_λ : إذا كان (C_f) و $(C_{\lambda f})$ التمثيلان البيانيان في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

للدالتان f و λf على الترتيب حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$ فإن $(C_{\lambda f})$ و لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x نحصل على نقطة من $(C_{\lambda f})$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ

مثال 01:



• اللون الأسود بيان الدالة مربع

• اللون الأسود هو بيان الدالة $h(x) = 2x^2$

• اللون الأزرق هو بيان الدالة $h(x) = -x^2$

مثال 02: لتكن f, g, h, k, l دوال معرفة كمايلي:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad / x \in [0; +\infty[$$

$$g(x) = 3 + \sqrt{x} \quad / x \in [0; +\infty[$$

$$h(x) = \sqrt{x+4} \quad / x \in [-4; +\infty[$$

$$k(x) = -\sqrt{x} \quad / x \in [0; +\infty[$$

$$l(x) = 4\sqrt{x} \quad / x \in [0; +\infty[$$

أرسم تمثيلاتها البيانية ثم حدد التحويل الذي يحول بيان f إلى بيان g ثم إلى بيان h
تطبيق: التمرين 51 الصفحة 30

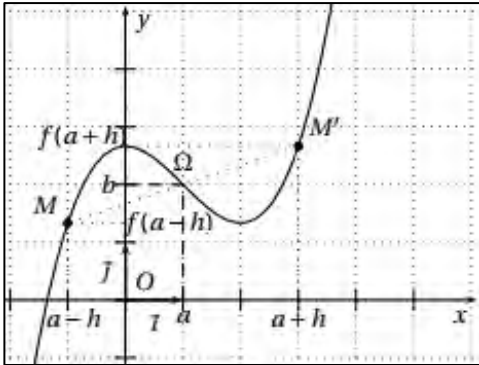
3. عناصر التناظر لتمثيل بياني للدالة: في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نسمي (C_f) بيان دالة f معرفة على D_f

• **مركز تناظر بيان دالة:** نقول عن $I(\alpha; \beta)$ أنها مركز تناظر للبيان (C_f) إذا و فقط إذا تحقق الشرطان

$$1. \alpha + h \in D_f \text{ و } \alpha - h \in D_f \text{ مهما تكن قيمة } h$$

$$2. f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta \text{ أو } f(2\alpha - h) + f(h) = 2\beta$$

بيانيا:



ملاحظة: يمكن تبين: $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$

$$\text{أو } f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بين أن $I(1; 2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

الجواب: لدينا: $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ ومنه: نلاحظ: $1+h \in D_f$ و $1-h \in D_f$ مهما تكن قيمة h

نثبت أن: $f(1+h) + f(1-h) = 4$???????

$$f(1+h) + f(1-h) = \frac{2(1+h)}{1+h-1} + \frac{2(1-h)}{1-h-1}$$

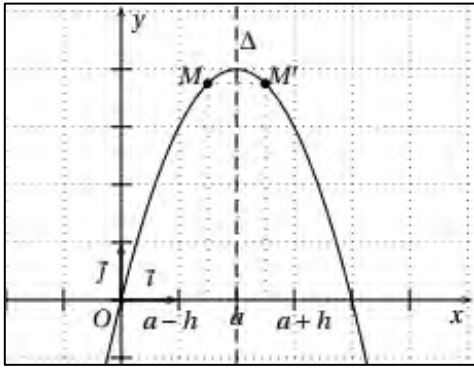
$$= \frac{2h+2}{h} + \frac{2-2h}{-h}$$

$$= \frac{2h + \cancel{2} - \cancel{2} + 2h}{h} = \boxed{4}$$

نوجد المقام

نحسب الطرف الأول :

● **محور تناظر بيان دالة:** نقول عن $x = \alpha$: (Δ) أنه محور تناظر للبيان (C_f) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان



بيانيا:

1. $\alpha + h \in D_f$ و $\alpha - h \in D_f$ مهما تكن قيمة h

2. $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$ أو $f(2\alpha - h) = f(h)$

ملاحظة: يمكن تبيان : $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$

أو $f(2\alpha - x) = f(x)$

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بين أن $x = 2$: (Δ) محور تناظر للبيان (C_f)

الجواب: لدينا : $D_f = \mathbb{R}$ ومنه : نلاحظ : $2 + h \in D_f$ و $2 - h \in D_f$ مهما تكن قيمة h

نثبت أن: $f(4 - h) = f(h)$???????

$$f(4 - h) = (4 - h)^2 - 4(4 - h) + 3$$

$$= 16 - 8h + h^2 - 16 + 4h + 3$$

نحسب الطرف الأول:

$$= h^2 - 4h + 3 = f(h)$$

تطبيق 01: 1. نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{-4}{x+1}$

● عين مجموعة تعريفها D_g

● أدرس اتجاه تغيرها وضع جدول تغيراتها على D_g

2. لتكن f دالة معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$: $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1}$

(C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

● عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث لكل $x \in D_f$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

● باستعمال الجزء (1) أدرس اتجاه تغير الدالة f

● عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات

● بين أن $I(-1; 0)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

تطبيق 02: لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

● عين مجموعة تعريفها D_f

● أكتب على الشكل النموذجي للعبارة $x^2 + 4x$ ثم أعطي عبارة أخرى لـ : $f(x)$

● بين أن $x = -2$: (Δ) محور تناظر للبيان (C_f)

f دالة مرجعية و (C_f) بيانها و g دالة مرجعية و (C_g) بيانها وحيث $g(x) = f(x - b) + k$ لتكن $M(x; y)$ نقطة من (C_f)

ولتكن $M'(x'; y')$ نقطة من (C_g) ومنه: $y' = g(x') = \overbrace{f(x' - b)}^y + k$ أي: $\begin{cases} x = x' - b \\ y' = y + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - b \\ y = y' - k \end{cases}$ ومنه: $M(x' - b; y' - k)$

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - (x' - b))\vec{i} + (y' - (y' - k))\vec{j} \quad \text{ونحسب مركبات الشعاع } \overrightarrow{MM'} \text{ ومنه:}$$

$$\overrightarrow{MM'} = b\vec{i} + k\vec{j} = \vec{U}$$

لاحظ أن b يعدم $(x - b)$

$$\vec{U} \begin{pmatrix} b \\ k \end{pmatrix}$$

معناه أن: (C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه

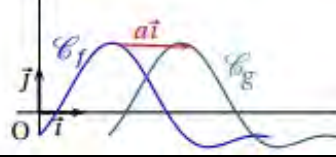
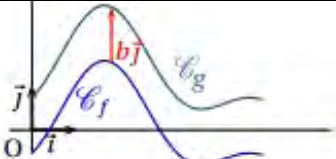
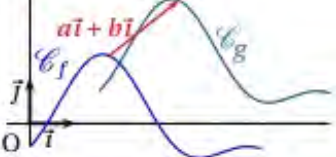
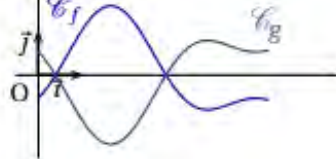
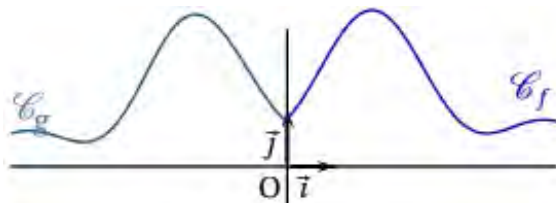
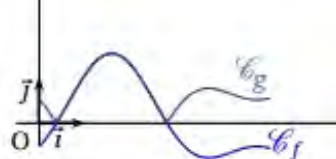
أمثلة: 1. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة مربع بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $f(x) = \frac{1}{x + 2} - 4$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة مقلوب بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة جذر تربيعي بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

تطبيق: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. بين أن $x \in D_f$: $f(x) = 2 - \frac{1}{x + 1}$ ثم استنتج أن (C_f) هو صورة بيان الدالة $g(x) = -\frac{1}{x}$ (C_g) بواسطة انسحاب يطلب شعاعه

التحويل	(C_g) هو صورة (C_f)	عبارة $f(x)$
انسحاب شعاعه $a\vec{i}$		$g(x) = f(x - a)$
انسحاب شعاعه $b\vec{j}$		$g(x) = f(x) + b$
انسحاب شعاعه $a\vec{i} + b\vec{j}$		$g(x) = f(x - a) + b$
تناظر محوري محوره حامل محور الفواصل		$g(x) = -f(x)$
تناظر محوري محوره حامل محور الترتيب		$g(x) = f(-x)$
نطابق على الجزء الموجب و نرسم نظير الجزء السالب بالتناظر مع حامل محور الفواصل		$g(x) = f(x) $

تطبيق: التمرين 50 الصفحة 30

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي و $\Omega(a; b)$ بالنسبة إلى $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نسمي $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ معلم جديد

لتكن $M(x; y)$ بالنسبة إلى $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و $M(X; Y)$ بالنسبة إلى $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{إذا دساتير التغيير:} \quad \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

ملاحظة: يستعمل هذا الدستور لإثبات أن: نقطة ما تختلف عن مبدأ المعلم أنها مركز تناظر للبيان
أو: محور ما يختلف عن حامل محور الترتيب هو محور تناظر للبيان

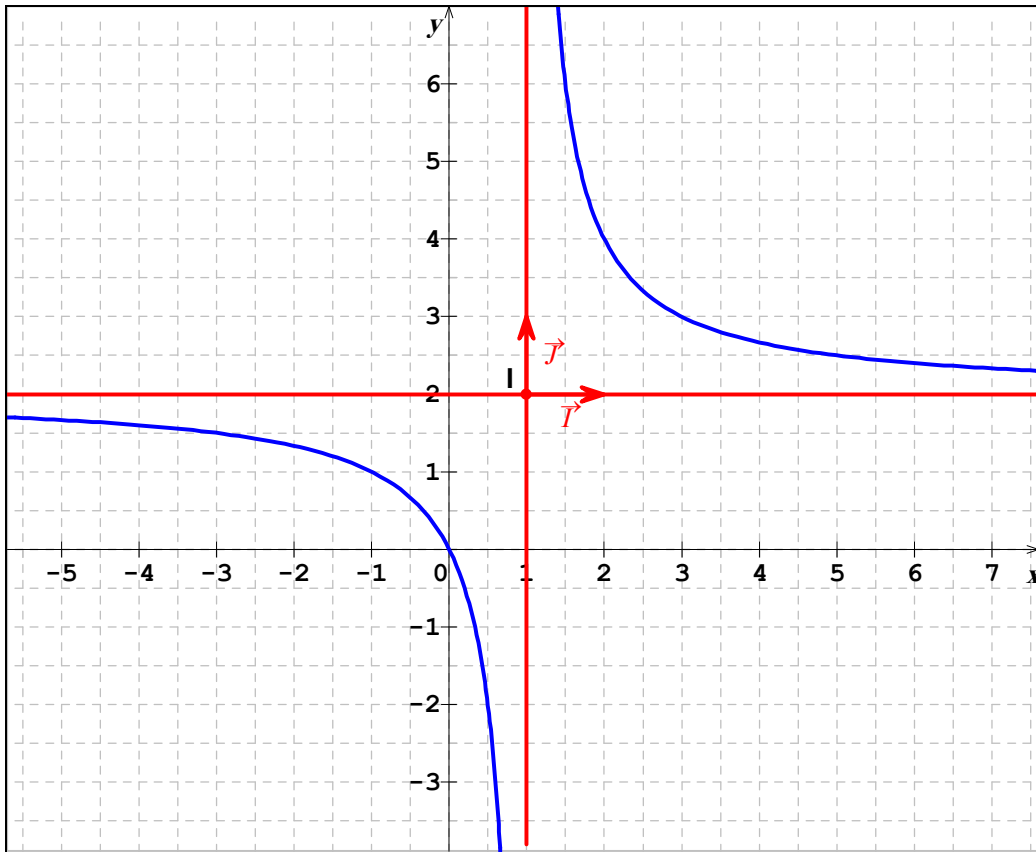
مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بين أن $I(1; 2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

نغير المعلم من $(O; \vec{i}; \vec{j})$ إلى $(I; \vec{i}; \vec{j})$ إذا دساتير التغيير: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ نعوض في عبارة $y = \frac{2x}{x-1}$

$$Y + 2 = \frac{2(X+1)}{X+1-1} \quad \text{ومنه} \quad Y = \frac{2X+2}{X} - 2 \quad \text{ومنه:} \quad Y = \frac{2}{X} = h(X)$$

ونلاحظ أن: $h(-X) = \frac{2}{-X} = -h(X)$ دالة فردية معناه أن $I(1; 2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)



تطبيقات على الدوال – عموميات –

التمرين 01: عين مجموعة تعريف الدوال التالية : $1) f(x) = \frac{3-x}{2x+3}$ ، $2) f(x) = \frac{3x}{x^2-4x}$ ، $3) f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$4) f(x) = \sqrt{2-x}$ ، $5) f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ ، $6) f(x) = \sqrt{x^2+x}$ ، $7) f(x) = \sqrt{9+x^2}$

التمرين 02: القراءة البيانية: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21$

1. باستعمال الآلة الحاسبة البيانية مثل بيان هذه الدالة في نافذة: $x \in [-2,5 ; 4]$ و $y \in [-15 ; 30]$

2. باستعمال هذا البيان أجب على الأسئلة التالية :

- شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$
- عين عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ " تعطي النتائج كقيم تقريبية إلى 10^{-2}
- شكل جدول إشارة f حسب قيم x
- حل بيانيا المتراجحة $f(x) \geq 10$ موضحا الطريقة
- حل بيانيا المتراجحة $f(x) \leq -x + 11$ موضحا الطريقة
- بين أن $f(3) = 0$ ثم عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث: $f(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$
- استنتج القيم المضبوطة لحلول المعادلة $f(x) = 0$

التمرين 03: شكل جدول تغيرات الدوال التالية على مجموعة تعريفها

$1) f(x) = 2(x-4)^2 + 3$ ، $2) f(x) = -3(x+1) - 5$ ، $3) f(x) = x(x-8)$

$4) f(x) = 2 + \frac{5}{x+2}$ ، $5) f(x) = 1 - \frac{1}{x-5}$

التمرين 04: ① لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = |2x+3|$

● أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

● شكل جدول إشارة f

● أرسم (C_f) بيان الدالة f

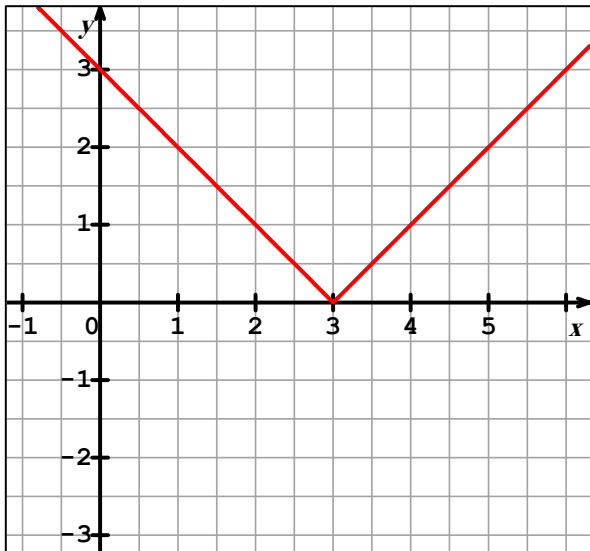
② لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = |2-x|$

● أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

● شكل جدول إشارة g

● أرسم (C_g) بيان الدالة g

③ حل بيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$ ثم تحقق من ذلك حسابيا



التمرين 05: أعطي على أبسط شكل عبارة الدالة الممثلة في البيان التالي :

التمرين 06: أكتب الدالة f على شكل تركيب دوال مرجعية ثم ضع جدول تغيراتها على المجال I في كل حالة :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $I =]-\infty ; 0]$ و $J = [0 ; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $I =]-\infty ; 0]$ و $J = [0 ; +\infty[$

3) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$, $I =]-3 ; +\infty[$

5) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 3}$, $I =]-\infty ; 1]$ و $J = [1 ; +\infty[$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{-2}{3-x}}$, $I = [3 ; +\infty[$

التمرين 07: يعطى جدول تغيرات الدالة u المعرفة على المجال $[-3 ; 3]$ بدون أن تعطى العبارة الجبرية

x	-3	0	3
$f(x)$	7	1	5

1. شكل جدول تغيرات الدالتان f و g المعرفة على المجال $[-3 ; 3]$

2) $g(x) = \sqrt{u(x)}$ و 1) $f(x) = -2u(x) + 1$

التمرين 08: يعطى جدول تغيرات الدالة u بدون أن تعطى العبارة الجبرية

x	0	5	9
$f(x)$	9	0	-1

ولتكن الدالتان f و g المعرفتان كمايلي:

2) $g(x) = [u(x)]^2$ و 1) $f(x) = \sqrt{u(x)}$

أجب **بصح** أو **خطأ** على مايلي :

1. f معرفة على المجال $[0 ; 9]$

2. f متناقصة على المجال $[0 ; 5]$

3. $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0 ; \sqrt{5}]$

4. g معرفة على المجال $[0 ; 9]$

5. g متناقصة على المجال $[0 ; 9]$

لن حطه ٺڪي ا.

3) حقيق او م ه اخم ك م x مه دنيا: $h(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$

بيرح ذغزاخ هكهي كم ممان ممان ه: $[-\infty; 1] \cup [2; +\infty]$

4) ه لداي ذغزاخ هكهي كم م م ه: $[-\infty; 1] \cup [2; +\infty]$

5) گهي اي مڊال م ٺڪي ذغزاخ hog: hog

19 $v = u$ لنه م ٺڪي فرمت: $u(x) = -x + 4$ $v(x) = \frac{1}{x}$

انان ح ٺڪي گهي ان مڊال $[-\infty; 4]$: $f = vou$

1) ائو ٺڪي چارج $f(x)$ ٺڪي ن x

2) گ ه لداي ذغزاخ هكهي ان مڊال $[-\infty; 4]$

3) $g(x) = -f(x) + 5$: $[-\infty; 4]$ انان ح ٺڪي گهي

ا) گ ه لداي ذغزاخ g ان مڊال $[-\infty; 4]$

ب) ائو ٺڪي چارج $g(x)$ ٺڪي ن x

4) h انان ح ٺڪي گهي $[-\infty; 4]$: $h(x) = \frac{5x-19}{x-4}$

حقيق ان: $h(x) = \frac{1}{x-4} + 5$ انان ح ٺڪي گهي لداي ذغزاخ h

01 f ان ٺڪي گهي $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

0. ا ٺڪي ٺڪي ان حقيق a ، b ح ٺڪي م ه اخم ك م ٺڪي

حقيق x : $f(x) = (x+a)^2 + b$

2) ٺڪي ٺڪي انان f ان مڊال $[-\infty; -2]$ لداي ذغزاخ

3) لداي ذغزاخ هكهي ان مڊال $[-\infty; -2]$ لداي ذغزاخ

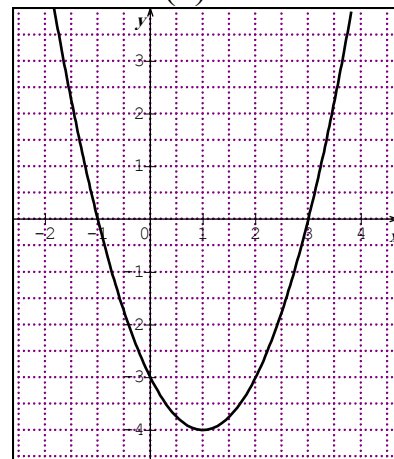
4) ا ٺڪي ٺڪي ان حقيق a ، b ح ٺڪي م ه اخم ك م ٺڪي

5) ٺڪي د ان: $f(-4-x) = f(x)$

6. ارسم (C_f) و طالقا مڊال مڊال و ٺڪي مڊال

00 ٺڪي ٺڪي مڊال و (P) فاش ٺڪي مڊال و ٺڪي مڊال

ٺڪي $\mathbb{R}$: $f(x) = ax^2 + bx + c$



ا) ٺڪي ٺڪي مڊال و (P) فاش ٺڪي مڊال و ٺڪي مڊال

x	-1	1
f(x)	0	-3

2) گهي a ، b ، c حقيق ان: $f(x) = (x-1)^2 - 4$

3) ارسم خد ذغزاخ انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

4) ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

5) ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

02 ان ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

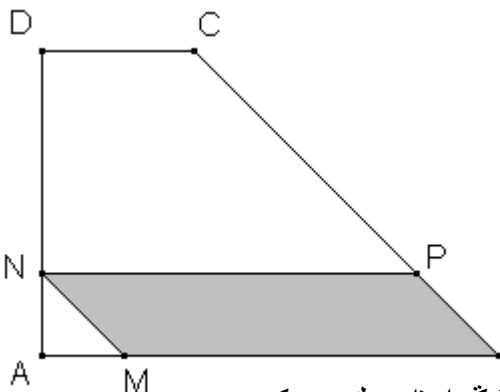
AD = 4، DC = 2، AB = 6

انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$



1) گهي ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

2) گهي ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

3) گهي ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

4) حقيق او م ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

5) اوص ذغزاخ انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

6) ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

اوص ذغزاخ انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

اوص ذغزاخ انان ح f گهي ان مڊال $[-2; 4]$

03 ان ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

x	-4	0	1	2	4
f(x)	3	0	-2	0	1

0. ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

2. م ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

3. ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

4. $h(x) = |f(x)|$: $[-4; 4]$ انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

5. $k(x) = f(|x|)$: $[-4; 4]$ انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

6. $L(x) = f(2x-2)$: $[-4; 4]$ انان ح ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

ا ٺڪي ٺڪي انان ح f گهي ان مڊال $[-4; 4]$

الباب الثاني

كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

الكفاءات المستهدفة

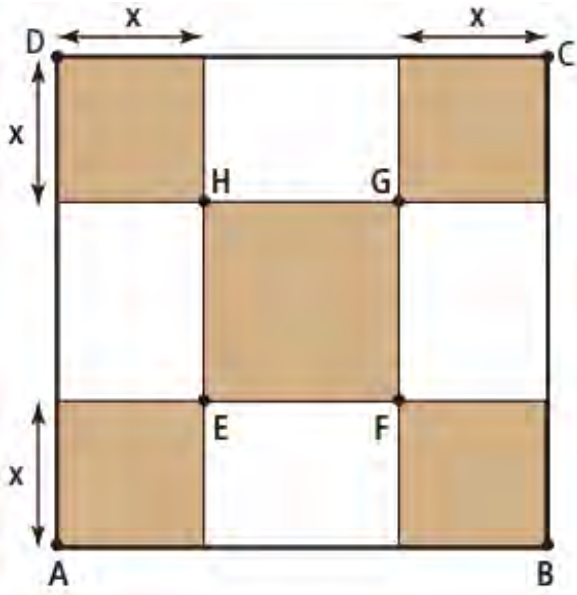
- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو مترجمات من الدرجة الثانية.

من بداية الأسبوع الثاني من سبتمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من سبتمبر

المدة: 2 أسابيع
المدة الزمنية :

10 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 14 ساعة و تقني رياضي 12 ساعة

كثيرات الحدود



نشاط 01: الشكل المقابل يمثل مربع طول ضلعه 5 نرسم بداخله مربعات طول ضلعها x ونهتم بـ: $S(x)$ مجموع المساحة الملونة للمربعات الخمسة

1. بين ببرهان هندسي أن: $S(x) = 4x^2 + (5-2x)^2$

و $S(x) = 25 - 4x(5-2x)$

2. بين أن: $S(x) = 8x^2 - 20x + 25$

3. باستعمال العبارة المناسبة أحسب: $S(2,5)$ و $S(\sqrt{3})$

4. بين أن: $S(x) = 8\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 12,5$

5. استنتج أن المساحة $S(x)$ تكون أدنى ما يمكن لما $x = \frac{5}{4}$ أعطي قيمتها

6. بين أن: $S(x) = (2x-1)(4x-8) + 17$

7. عين قيمة x بحيث: $S(x) = 17$

الجواب:

1. المساحة $S(x)$ هي مجموع مساحات أربع مربعات تساوي $4x^2$ ومساحة المربع $EFGH$ التي تساوي $(5-2x)^2$

ومنه: $S(x) = 4x^2 + (5-2x)^2 \rightarrow (*)$

من جهة ثانية: المساحة $S(x)$ هي المساحة الكلية للمربع $ABCD$ والتي تساوي 25 نحذف منها المساحات البيضاء

حيث: المساحة البيضاء الواحدة عرضها x وطولها $5-2x$ ومنه مساحتها تساوي $x(5-2x)$

وعليه: $S(x) = 25 - 4x(5-2x) \rightarrow (**)$

2. بعد النشر نجد: $S(x) = 8x^2 - 20x + 25 \rightarrow (***)$

3. $S(2,5) = 25$ باستخدام العبارة $(*)$ و $S(\sqrt{3}) = 49 - 20\sqrt{3}$ باستخدام العبارة $(***)$

4. بعد النشر نجد: $S(x) = 8\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 12,5 = 8x^2 - 20x + 25$

5. لدينا: لكل $x \neq \frac{5}{4}$: $8\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 > 0$ ومنه: $S(x) > 12,5$ ومنه: $S(x) > S\left(\frac{5}{4}\right)$

وعليه نستنتج أن المساحة $S(x)$ تكون أدنى ما يمكن لما $x = \frac{5}{4}$ و قيمتها هي: 12,5

6. بعد النشر نجد: $S(x) = (2x-1)(4x-8) + 17 = 8x^2 - 20x + 2$

7. $S(x) = 17$ تكافئ $(2x-1)(4x-8) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x-8) = 17 - 17 = 0$ ومنه: $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

ملاحظة: نسمي $S(x) = 4x^2 + (5-2x)^2$ كثير حدود من الدرجة الثانية

و $S(x) = 8\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 12,5$ الشكل النموذجي له

1. الدوال كثيرات الحدود

1. الدالة كثير حدود

تعريف: نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد طبيعي و $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x \mapsto 0$.
- الدوال: $x \mapsto x^5$ ، $x \mapsto (x+2)(x^2-2)$ ، $x \mapsto 0, 3x^2 + x - \sqrt{2}$ هي كثيرات حدود.
- الدوال: $x \mapsto \frac{1}{x^5 + 4}$ ، $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ ليس كثيرات حدود

2. درجة كثير حدود

مبرهنة و تعريف: كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{مع } a_n \neq 0$$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد $a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملاته و يسمى $a_p x^p$ الحد الذي درجته p .

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto a_0$ ($a_0 \neq 0$) هي كثير حدود درجته 0.
 - كل دالة تألفية: $x \mapsto ax + b$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 1.
 - كل دالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية)
- ملاحظة:** درجة كثير الحدود المعدوم غير معينة.

3. تساوي كثيري حدود

مبرهنة:

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين ، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال 01: إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$ فإن: $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = -1$ و $d = 3$.

مثال 02: نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$ عين الأعداد a ، b ، c بحيث لكل عدد حقيقي x لدينا:

$$P(x) = (x+5)(ax^2 + bx + c) \quad \text{ثم استنتج جذور } P(x)$$

$$x^3 + 5x^2 - 3x - 15 = (x+5)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + (5a+b)x^2 + (5b+c)x + 5c$$

الجواب: بعد نشر الطرف الثاني

$$P(x) = (x+5)(x^2 - 3) = (x+5)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \quad \text{ومنه: } \begin{cases} a=1 \\ 5a+b=5 \\ 5b+c=-3 \\ 5c=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases} \quad \text{بالمقارنة:}$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow S = \{-5; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\} \quad \text{جذور } P(x) \text{ هي الأعداد التي تعدمها ومنه}$$

2. عمليات على كثيرات الحدود: عمليات على كثيرات الحدود تسمح قواعد الحساب الجبري من التوصل إلى النتائج التالية:

نتائج: مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود. مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

ملاحظة: بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و تسمى الدالة: $h: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة.

جذر كثير حدود:

تعريف: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي. العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$.

مثال: ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

لدينا: $f(2) = 0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0) \neq 0$ ($f(0) = -2$)

تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x - \alpha)$

مبرهنة: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي. إذا كان $f(\alpha) = 0$ (α جذر لكثير الحدود f)

فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

مثال 01: ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

لدينا $f(1) = 0$ و $f(2) = 0$ و $f(3) = 0$ ومنه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f .

يمكن إذن تحليل f و لدينا: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

مثال 02: f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1. تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f

2. عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x-2)g(x)$

الجواب: لدينا: $f(2) = 0$ ومنه العدد 2 جذر لكثير الحدود f .

إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x-2)g(x)$

الطريقة العملية لتعيين $g(x)$

$x^3 - x^2 - 4x + 4$	$x - 2$
$-x^3 + 2x^2$	$x^2 + x - 2$
$x^2 - 4x + 4$	
$-x^2 + 2x$	
$-2x + 4$	
$2x - 4$	
$0 + 0$	

نجد هكذا: $g(x) = x^2 + x - 2$

و منه: $f(x) = (x-2)(x^2 + x - 2)$

طريقة أورنر HORNER:

	1	-1	-4	4
2	0	2	2	-4
0	1	1	-2	0
	x^2	x	1	

ومنه: $f(x) = (x-2)(x^2 + x - 2)$

المعادلات من الدرجة الثانية

1. المعادلات من الدرجة الثانية: تعريف: هي كل معادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ / $a \neq 0$
2. الشكل النموذجي للعبارة $ax^2 + bx + c = 0$: من أجل كل عدد حقيقي x و a عدد حقيقي غير معدوم،

لدينا: $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$ لكن $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$ ، عندئذ $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

3. تعريف: العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ هو مُميزّ العبارة $ax^2 + bx + c = 0$ / $a \neq 0$ ونرمز إليه بالرمز Δ (نقرأ " دلتا").

هو الشكل النموذجي للعبارة $ax^2 + bx + c = 0$ / $a \neq 0$ $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

تطبيق: أعطى الشكل النموذجي لمايلي: 1. $3x^2 - 6x + 4$ 2. $-2x^2 + x - 4$ 3. $x^2 + 6x + 9$

مبرهنة: لتكن المعادلة $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ مع $(a \neq 0)$ مميزها: Δ

- إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين x_1, x_2 : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ وينتج $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- إذا كان $\Delta = 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً x_0 : $x_0 = \frac{-b}{2a}$ وينتج $f(x) = a(x - x_0)^2$
- إذا كان $\Delta < 0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولاً والعبارة $ax^2 + bx + c$ لا تقبل التحليل.

- تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1. $2x^2 + 5x - 1 = 0$ 2. $3x^2 - 2x - 4 = 0$
3. $2x^2 + (10\sqrt{2})x + 25 = 0$ 4. $(2x + 4)^2 + (x^2 + 5x + 6)^2 = 0$
5. $2(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 1 = 0$ 6. $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$

4. المتراجحات من الدرجة الثانية:

تعريف: نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ، حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

مثال: $2x^2 + 5x - 1 < 0$ ، $3x^2 - 2x - 4 \geq 0$

5. إشارة ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

$\Delta < 0$							
المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ لا تقبل حلولاً من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $ax^2 + bx + c$ هي من نفس إشارة a							
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">مع إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a		
x	$-\infty$	$+\infty$					
$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a						

$\Delta > 0$											
المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2											
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="4">مع إشارة a 0 عكس إشارة a 0 مع إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a 0 عكس إشارة a 0 مع إشارة a				
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$							
$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a 0 عكس إشارة a 0 مع إشارة a										

$\Delta = 0$									
المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلاً مضاعفاً x_1									
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="3">مع إشارة a 0 مع إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a 0 مع إشارة a			
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$						
$ax^2 + bx + c$	مع إشارة a 0 مع إشارة a								

جدول عام خاص بكثير الحدود من الدرجة 2

حساب وتحديد الإشارة	$P(x) = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$																								
الحلول	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ليس لها حلول																								
التحليل	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $P(x) = a(x - x_0)^2$ لا تقبل التحليل																								
دراسة الإشارة	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مع إشارة a</td><td>عكس إشارة a</td><td>مع إشارة a</td><td></td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مع إشارة a</td><td>مع إشارة a</td><td>مع إشارة a</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مع إشارة a</td><td>مع إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	مع إشارة a	عكس إشارة a	مع إشارة a		x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$P(x)$	مع إشارة a	مع إشارة a	مع إشارة a	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	مع إشارة a	مع إشارة a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																					
$P(x)$	مع إشارة a	عكس إشارة a	مع إشارة a																						
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																						
$P(x)$	مع إشارة a	مع إشارة a	مع إشارة a																						
x	$-\infty$	$+\infty$																							
$P(x)$	مع إشارة a	مع إشارة a																							
التفسير البياني																									

تطبيقات:

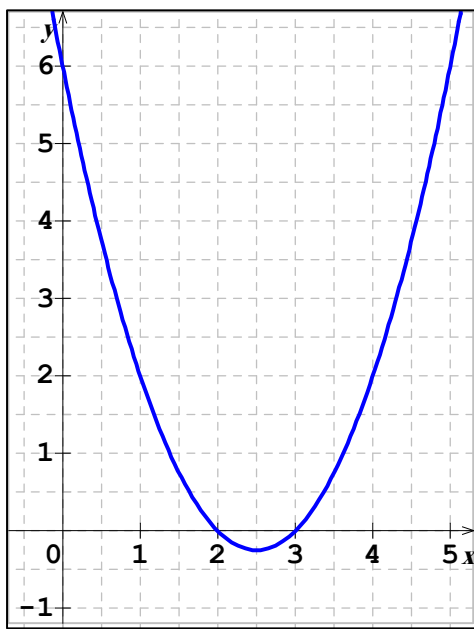
التمرين 01: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ ، $x^2 + x - 2 \leq 0$ ، $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$

التمرين 02: لتكن $P(x) = 2x^2 + 7x + 5$

● حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

● حلل إلى جداء $P(x)$

● حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) < 0$



التمرين 03: حل بيانيا المتراجحة $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ حيث بيانها مثلناه في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما يلي :

● **قاعدة الجداء المعلوم:** يكون الجداء معلوم إذا كان و فقط إذا كان أحدهما معلوم

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ أو } B(x) = 0$$

$$(A(x))^n = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \quad \text{نتيجة:}$$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $3 - 7x - (1 - x) = 2(x + 1)$ **2.** $(2x + 3)^2 = (x - 5)^2$ **3.** $(2x + 3)^5 = 0$

● **متراجحة جداء:** $A(x) \times B(x) > 0 \Leftrightarrow A(x) \text{ و } B(x) \text{ من الإشارة}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $(3x^2 - 6)(4 - x) = 0$ **2.** $(5 - x)(2x - 1) - (5 - x)^2 \leq 0$

● **المعادلات الناطقة:** $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$ نسمي الشرط $B(x) \neq 0$ بحيز الصحة

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\frac{(x^2 - 1)^2}{x + 1} = 0$ **2.** $\frac{2}{x} = \frac{3}{x + 5}$

● **متراجحة حاصل قسمة:** $\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \times B(x) < 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$ نسمي الشرط $B(x) \neq 0$ بحيز الصحة

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\frac{x - 3}{x + 2} < 0$ **2.** $\frac{5 - 3x}{x} + \frac{3x}{x + 1} \geq 0$ **3.** $\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

● **المعادلات الصماء:** $\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = (B(x))^2 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\sqrt{x + 1} = 2x - 3$ **2.** $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 0$

● **المتراجحات الصماء:**

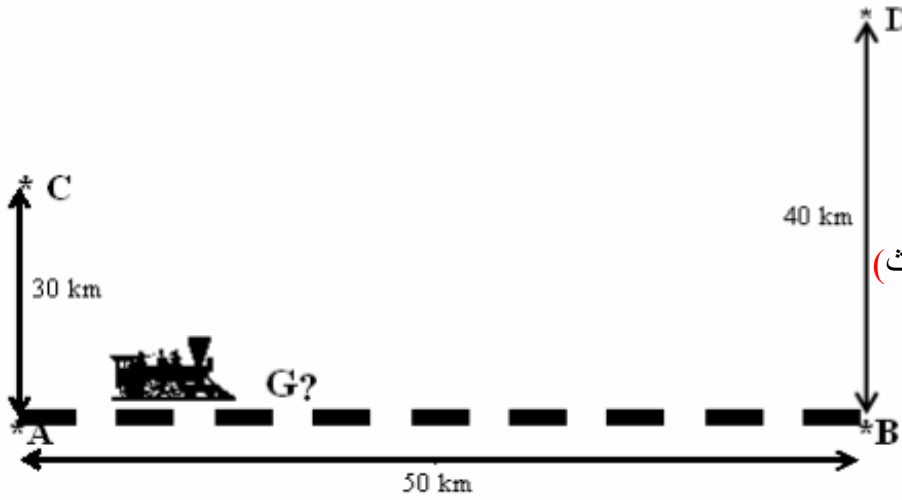
مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية **1.** $x - \sqrt{2x + 3} < 0$ **2.** $\sqrt{4x^2 - 1} - 5x < 0$

التمرين 01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. ما طبيعة البيان (C_f) و عين إحداثيات ذروته "رأسه"
2. بين أن البيان (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في نقطتين A و B يطلب إحداثياتهما
3. ماهي مجموعة قيم (C_f) التي من أجلها البيان يقع فوق حامل محور الفواصل

التمرين 02:

نريد إنشاء محطة قطار في نقطة G
تقع على الطريق المستقيم $[AB]$
وتبعد بنفس المسافة عن مدينتين C و D
عين وضعية النقطة G على $[AB]$
مساعدة: (نضع $AG = x$ و نستعمل مبرهنة فيثاغورث)

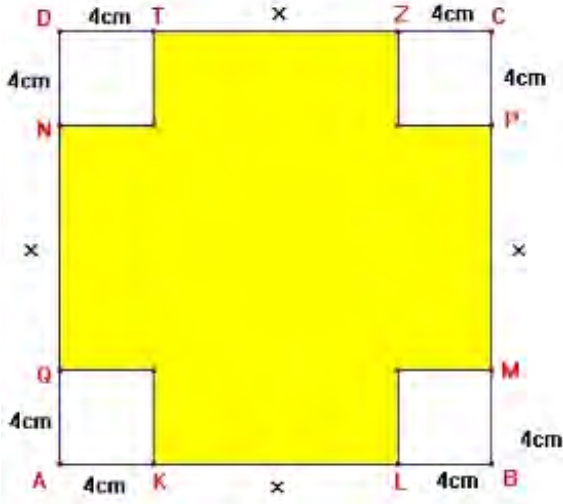


التمرين 03:

1. أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2 + 16x - 1380 = (x - 30)(x + 46)$

ب) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $x^2 + 16x - 1380 > 0$

2. نريد صنع علبة بدون غطاء من ورقة كرتون مربعة الشكل بحيث قطعنا من كل زاوية مربع طول ضلعه 4 cm كما هو مبين في الشكل عين قيمة x إذا علمت أن المساحة الملونة أكبر تماما من 1380 cm^2



التمرين 04: في الشكل المقابل $ABCD$ مربع و M و N نقطتان من $[AB]$ و $[AD]$ بحيث $AM = AN = x$

نسوي $S(x)$ مساحة المثلث MNC

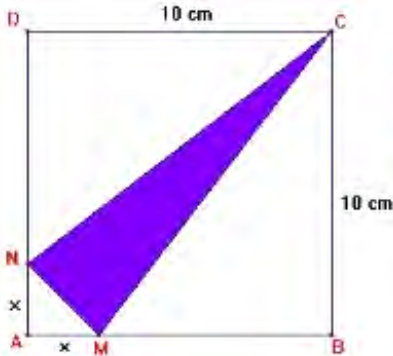
1. عبر عن $S(x)$ بدلالة x

2. أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $-x^2 + 20x - 100 < 0$

ب) استنتج أن مساحة المثلث MNC هي أقل تماما من نصف مساحة $ABCD$

3. أ) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2 - 20x + 36 = (x - 2)(x - 18)$

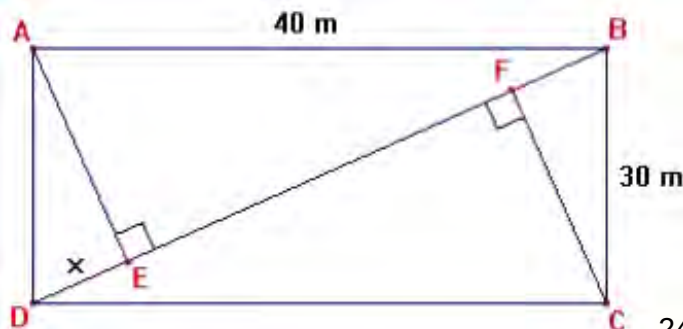
ب) استنتج قيم x بحيث $S(x) > 18$

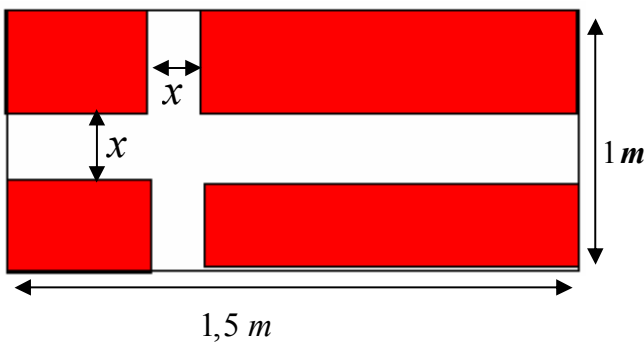


التمرين 05: قطعة أرض $ABCD$ مستطيلة الشكل موزعة كما هو مبين في الشكل

أحسب EF

مساعدة: (نضع $DE = FB = x$)





التمرين 06: علم الدانمارك على شكل مستطيل أبعاده 1 m و $1,5\text{ m}$ عين قيمة x حتى تكون المساحة البيضاء تساوي المساحة الحمراء

التمرين 07: المسافة بين مدينتين A و B تساوي 42 km تنطلق دراجة هوائية من A نحو B بسرعة ثابتة 18 km/h وفي نفس الوقت ينطلق شخص ماشيا في الاتجاه المعاكس من B نحو A بسرعة ثابتة 6 km/h ماهو الزمن اللازم حتى يلتقيان

التمرين 08: m عدد حقيقي نعتبر الدوال f_m المعرفة كمايلي : $f_m(x) = mx + 5m + 3$

و دالة h معرفة بـ: $h(x) = \frac{-x-2}{x+3}$ و نسمي : (D_m) و (C_h) التمثيلات البيانية لهما على الترتيب

1. عين حسب قيم العدد الحقيقي m عدد نقط تقاطع (D_m) و (C_h)
2. برهن أن جميع المستقيمات (D_m) تتقاطع في نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثيتها
3. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{ cm}$

أرسم (C_h) ، (D_{-4}) ، (D_{-1}) و (D_0) في نفس المعلم

التمرين 09: **الجزء ①:** 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $4t^2 - 9t + 2 = 0$

2. استنتج حلول المعادلة : $4(x-2)^2 - 9|x-2| + 2 = 0$

الجزء ②: عين أبعاد مستطيل علما بأن محيطه يساوي 7 cm و مساحته تساوي 3 cm^2

التمرين 10: 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $x^2 + 5x + 6 = 0$

2. نعتبر كثير الحدود P المعرفة بـ: $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

(أ) تحقق من أن 1 هو جذر لكثير الحدود P

(ب) حل $P(x)$

(ج) حل في $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ ثم $P(x) < 0$

3. (أ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x^2 + 11x + 6 \leq 0$

(ب) تحقق من أن: لكل عدد حقيقي x : $P(x+1) - P(x) = 3x^2 + 11x + 6$

(ج) استنتج أن لكل $x \in \left[-3; -\frac{2}{3}\right]$ لدينا : $P(x+1) \leq P(x)$

التمرين 11: 1. نعتبر كثير الحدود P المعرفة بـ: $P(x) = x^4 - 5x^3 + 20x - 16$

(أ) تحقق من أن العددين 1 و 2 هما جذرين لكثير الحدود P

(ب) حل $P(x)$

(ج) حل في $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$

2. لتكن f و g دالتان ناطقتان معرفتان كمايلي:

$$g(x) = \frac{1}{x+1} \text{ و } f(x) = \frac{x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 20x^2 + 4x - 15}{x+1}$$

(أ) عين مجموعة تعريف للدالتين f و g

(ب) تحقق أن: $f(x) = P(x) + g(x)$

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x) < g(x)$

- 3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = -10$ ثم المتراجحة $f(x) < 0$
- 5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x\sqrt{x} - 8x + 17\sqrt{x} - 10 = 0$
- نعتبر كثير الحدود حيث: $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$
- 1) احسب $f(3)$ ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$.
- 2) عين قيم x في كل حالة: $f(x) = 0$ ، $f(x) < 0$ ، $f(x) > 0$.
- 07) 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^2 + x - 1 = 0$.
- 2) دالة كثيرة حدود للمتغير الحقيقي x حيث
- $$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$
- أ) احسب $P(0)$ و $P(-2)$ و $P(\sqrt{3})$ استنتج جذرا لـ $P(x)$
- ب) بين انه يوجد كثير حدود $Q(x)$ حيث:
- $$P(x) = (x+2)Q(x)$$
- ثم استنتج تحليلا لـ $P(x)$
- ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \leq x - 2$
- 08) a و b عدنان حقيقيان و $f(x)$ كثير حدود حيث:
- $$f(x) = x^3 + ax + b$$
- 1) عين a و b بحيث يكون 2 جذرا لـ $f(x)$ و $f(0) = -2$
- 2) نفرض أن: $a = -3$ و $b = -2$
- أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يوجد كثير حدود $g(x)$ حيث:
- $$f(x) = (x-2).g(x)$$
- ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين: $f(x) = 0$ ، $f(x) = -2$
- 2) نفرض أن: $a = -3$ و $b = -2$
- أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يوجد كثير حدود $g(x)$ حيث:
- $$f(x) = (x-2).g(x)$$
- ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين: $f(x) = 0$ ، $f(x) = -2$
- 09) 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2 - 5x + 6 = 0$
- 2) دالة كثيرة حدود للمتغير الحقيقي x حيث
- $$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
- أ) احسب $P(0)$ ، $P(1)$ و $P(10)$ ثم استنتج جذرا لـ $P(x)$
- ب) استنتج تحليلا لكثير حدود $P(x)$.
- استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد 504
- ج) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 0$
- استنتج حلول المتراجحة $(x-1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$
- 3) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ب: $f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 4}$
- أ) أثبت أن: $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)}$
- ب) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $f(x) \leq 0$

- 00) في كل حالة أكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي،
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)$ و حل $f(x)$ الى جداء عاملين.
0. $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
2. $f(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$
3. $f(x) = -x^2 + x - 2$
4. $f(x) = 5x^2 - 10x$
- 02) 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:
- $$x^2 - 7x - 8 = 0, x^2 + x + 1 = 0, x^2 + 5x - 6 = 0$$
- 2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:
- $$(x^2 + 3x - 4)^2 = (x^2 + 8x + 4)^2, x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$$
- $$x + 4\sqrt{x} - 5 = 0, 2x^2 + 3|x - 2| - 5 = 0, x|x| + 3x - 4 = 0$$
- 03) 1) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:
- $$x^2 + 3x < 0, -4x^2 - x + 18 \geq 0, 2x^2 + x - 3 \leq 0$$
- $$x^2 - 2x + 1 > 0, x^3 - x^2 - x + 1 < 0$$
- 2) حل في $\mathbb{R}$ جملة المتراجحتين ذات المجهول الحقيقي x
- $$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \dots (1) \\ (x+2)(x-3) \leq 0 \dots (2) \end{cases}$$
- 04) 1) انشر العبارة: $(\sqrt{3} + 2)^2$
- 2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $-2x^2 - (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3} = 0$
- 3) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث:
- $$-2x^2 - (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3} = -2(x-a)(x-b)$$
- 4) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-2x^2 - (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3} \geq 0$
- 05) ليكن كثير الحدود حيث: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- 1- أ) احسب $f(3)$ ، ماذا تستنتج؟
- ب) عين الأعداد الحقيقية α, β, δ بحيث: من أجل كل عدد حقيقي x :
- $$f(x) = (x-3)(\alpha x^2 + \beta x + \delta)$$
- ج) استنتج حلول المعادلة: $f(x) = 0$
- د) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $f(x) < 0$
- 2) عين كثير الحدود $g(x)$ من الدرجة الثالثة والذي يقبل الجذرين 2 و -3 ويحقق: $g(-1) = g(3) = 24$
- 06) ليكن كثير الحدود حيث $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- 1) بين أن العدد 2 هو جذرا لكثير الحدود $f(x)$
- 2) استنتج تحليل $f(x)$ الى جداء عاملين.

00 نعتبر المعادلة (E) ذات الوسيط الحقيقي m التالية:

$$(E) \quad (m+1)x^2 + 2mx + m - 2 = 0 \dots$$

أوجد قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

0. العدد (-2) حلا للمعادلة (E)

2. المعادلة (E) تملك حل وحيد مضاعف

3. المعادلة (E) لا تملك حلول

4. المعادلة (E) تملك حلان متميزان

5. المعادلة (E) تملك حلان مختلفان في الإشارة

6. المعادلة (E) تملك حلان موجبان

7- المعادلة (E) تملك حلان سالبان

00 لتكن المعادلة (1) $mx^2 + 5x + \frac{6}{m} \dots$ و $m \neq 0$

0. تحقق أن (1) تقبل حلين x_1 و x_2 لا يطلب حسابهما

2. بين أن x_1 و x_2 من نفس الإشارة.

3. ناقش حسب قيم m إشارة الحلين x_1 و x_2

4. جد قيمة m علما أن $x_2 + x_1 = 5$ ، استنتج $x_2 \times x_1$

02 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

واشارة حلول المعادلتين التاليتين:

$$(1) \quad x^2 - (2m+3)x + m^2 - 2 = 0 \dots$$

$$(2) \quad x^2 + 3mx + 2m^2 + 1 = 0 \dots$$

03 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية

$$(1) \quad \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = -x, \quad \frac{5x^2 - 11x + 2}{3x^2 - 7x + 2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{-4x^2 + x + 5}{1-x^2} \leq 0, \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \geq 0$$

04 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية

$$(1) \quad \sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3, \quad \sqrt{1-x} = x+1$$

$$(2) \quad 2\sqrt{1+x^2} - x \leq 0, \quad 2x - \sqrt{x^2+1} \geq 0$$

05 تعطى المعادلة (1) $2x^2 - 3x - 5 = 0 \dots$

دون حساب الحلين x_1 و x_2

(1) بين أن المعادلة (1) تقبل حلين x_1 ، x_2 مختلفين في الإشارة

$$(2) \quad \text{احسب } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, x_1^4 + x_2^4, (x_1 - x_2)^2, x_1^2 + x_2^2$$

06 (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0, \quad x^4 + 4x^2 - 12 = 0, \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0, \quad -x^4 - x^2 + 6 \geq 0, \quad x^4 - 1 \leq 0$$

07 مثلث قائم في A حيث:

$$BC = 10, AC = y, AB = x$$

عين x ، y حتى يكون محيط المثلث ABC يساوي 24cm

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 61 \end{cases}$$

08 x و y عدنان طبيعيا حيث:

(1) أنشر العبارة $(x-y)^3$ ، ثم استنتج الجداء xy .

(2) جد قيمة $x^2 + y^2$ دون حساب x و y . استنتج قيمتي x و y

09 ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x حيث:

$$f_m(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + m + 2$$

(1) احسب $f_0(2)$ ، $f_2(0)$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $f_2(x) = f_m(0)$

(2) عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة: $f_m(x) = 0$

(أ) حلين متساويين.

(ب) حلين x' و x'' يحققان: $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 1$.

$$\begin{cases} a + b = 17 \\ a \times b = 60 \end{cases}$$

20 1) عين لاعددين a و b حيث:

2) هلي وجدم سقظي ال من ابعده 60cm^2 ومحيطه 34cm

20 $f_m(x)$ كثير حدود

$$f_m(x) = (2m+1)x^2 + 2x + m + 1$$

عين قيم m الوسيط الحقيقي m في كل حالة

(1) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه

(2) (-2) حلا للمعادلة $f_m(x) = 0$ استنتج الحل الآخر

(3) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما مقلوب للآخر

(4) المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلين متناظران.

22 ABCD مستطيل طوله 10cm وعرضه 6cm

ننشئ مربعا AMNP بحيث تكون M على [AB]

و p على [AD] نضع: $AM = x$

(1) أحسب $a(x)$ مساحة شبه المنحرف MNCB بدلالة x .

(2) عين قيمة x التي من أجلها المساحة $a(x)$ اعظمية

ثم احسب $a(x)$ في هذه الحالة.

(3) هل توجد قيم للعدد x تكون من أجلها

مساحتا MNCB و NCDP متساويتين؟

(4) هل توجد قيم للعدد x تكون من أجلها $a(x)$ أصغر

من مساحة المربع AMNP؟

بـ أعمال موجهة

● مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) مع $(a \neq 0)$
 نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين x' و x'' حيث: $x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

إذا وضعنا $S = x' + x''$ و $P = x' \times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و P جداءهما بين أن: $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$

تطبيق 1: حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر: نعتبر المعادلة التالية: $2x^2 + \alpha x - 3 = 0$ حيث α عدد حقيقي .
 عين α حتى يكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تطبيق 2: تعيين عددين علم مجموعهما و جداءهما:

مبرهنة: يكون مجموع عددين هو S و جداءهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x : $x^2 - Sx + P = 0$

تمرين تطبيقي: عين بعدي مستطيل مساحته 77 cm^2 ومحيطه 36 cm . هل يوجد مستطيلا مساحته 30 cm^2 و محيطه 20 cm ؟

تطبيق 3: تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية:

مبرهنة: نعتبر المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) مع $(a \neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.

2. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.

3. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

تمرين تطبيقي 01: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

● المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع:

1. المعادلات مضاعفة التربيع:

تعريف: نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

حل المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$ يؤول إلى حل الجملة: $\begin{cases} t = x^2 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$ يسمى المجهول t مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $at^2 + bt + c = 0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية: (1) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ (2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (3) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

2. المتراجحات مضاعفة التربيع:

تعريف: نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$$ax^4 + bx^2 + c \geq 0; \leq 0, \quad ax^4 + bx^2 + c > 0; < 0 \quad \text{حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية ثابتة مع } a \neq 0$$

يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة $ax^4 + bx^2 + c$

دراسة مثال: نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$ (*)

1. نضع: $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$ تحقق أن 3 و 4 هما حلا للمعادلة ذات المجهول t : $t^2 - 7t + 12 = 0$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 4)$

3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$

4. استنتج حلول المتراجحة (*)

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x التالية: $-x^4 + 4x^2 + 5 \leq 0$

باب الفروض المحروسة والمنزلية

الفرص المحروس رقم ① الثلاثي الأول

التمرين 01: نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x) = (3 - 2x)(2 + x) - 2 \quad \text{و} \quad f(x) = (5x + 2)(x + 2) + x$$

1. بين أن: $f(x) - g(x) = 7x(x + 2)$
2. أدرس إشارة $f(x) - g(x)$ وذلك حسب قيم العدد الحقيقي x
3. استنتج الأوضاع النسبية بين البيانيين (C_f) و (C_g) للدالتين f و g على الترتيب

التمرين 02: أدرس اتجاه تغير الدوال التالية مع تحديد الخواص المستعملة:

1. $f(x) = -2x + 3 - x^2$ على المجال $[0; +\infty[$
2. $g(x) = \sqrt{x^3}$ على المجال $[0; +\infty[$
3. $h(x) = (u \circ v)(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$ مع $u(x) = 2x + 5$ و $v(x) = x^2 + 3$

التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $t \in [-3; 3]$ بالتمثيل البياني التالي:
بدون تبرير حدد مجموعة تعريف و ارسـم التمثيلات البيانية
للدوال التالية في نفس المعلم السابق وبألوان مختلفة

- $f_1(t) = -f(t)$
- $f_2(t) = |f(t)|$
- $f_3(t) = f(t) + 1$
- $f_4(t) = f(t + 1)$

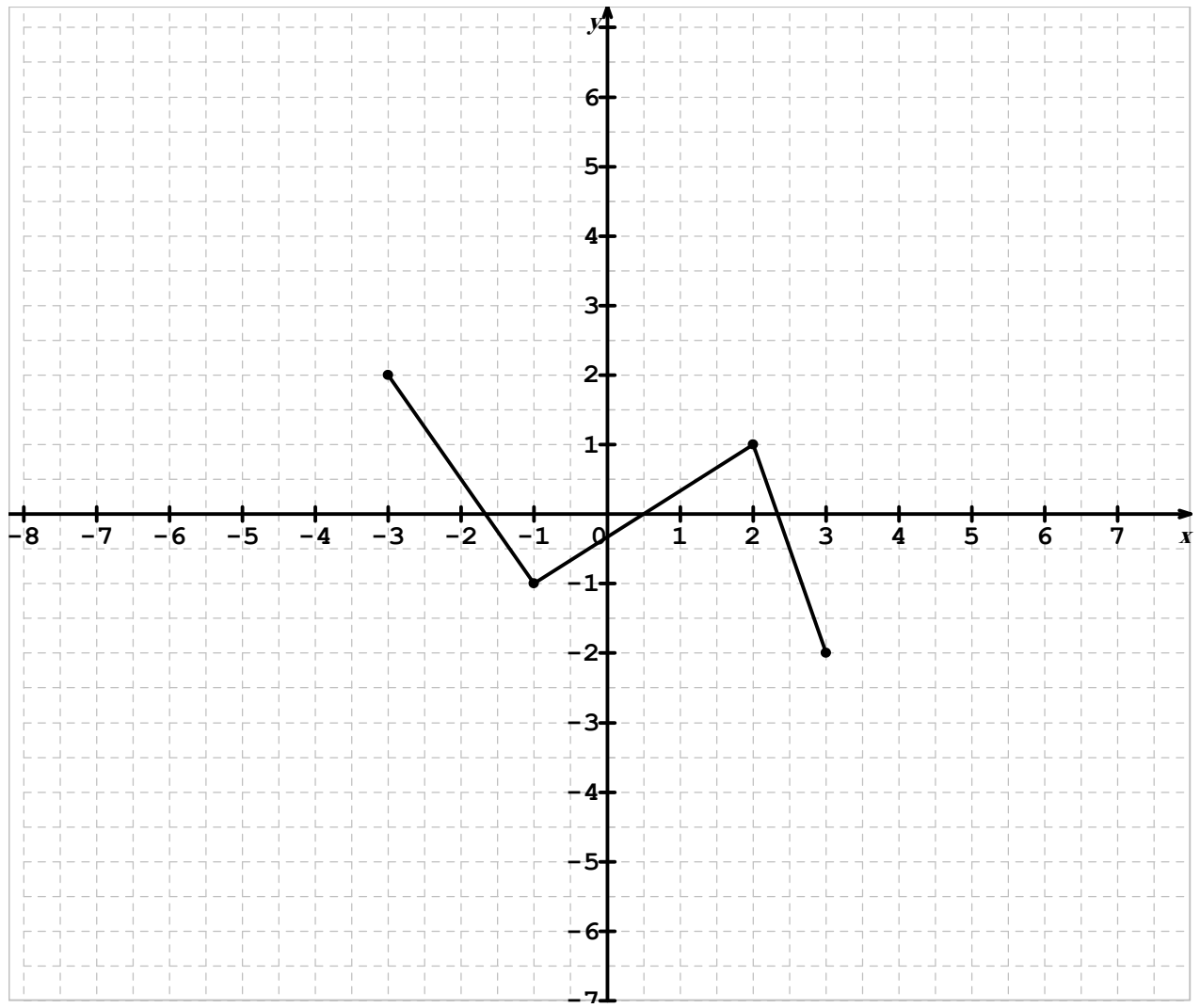
التمرين 04: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = x^2 - 4x + \frac{11}{4}$$

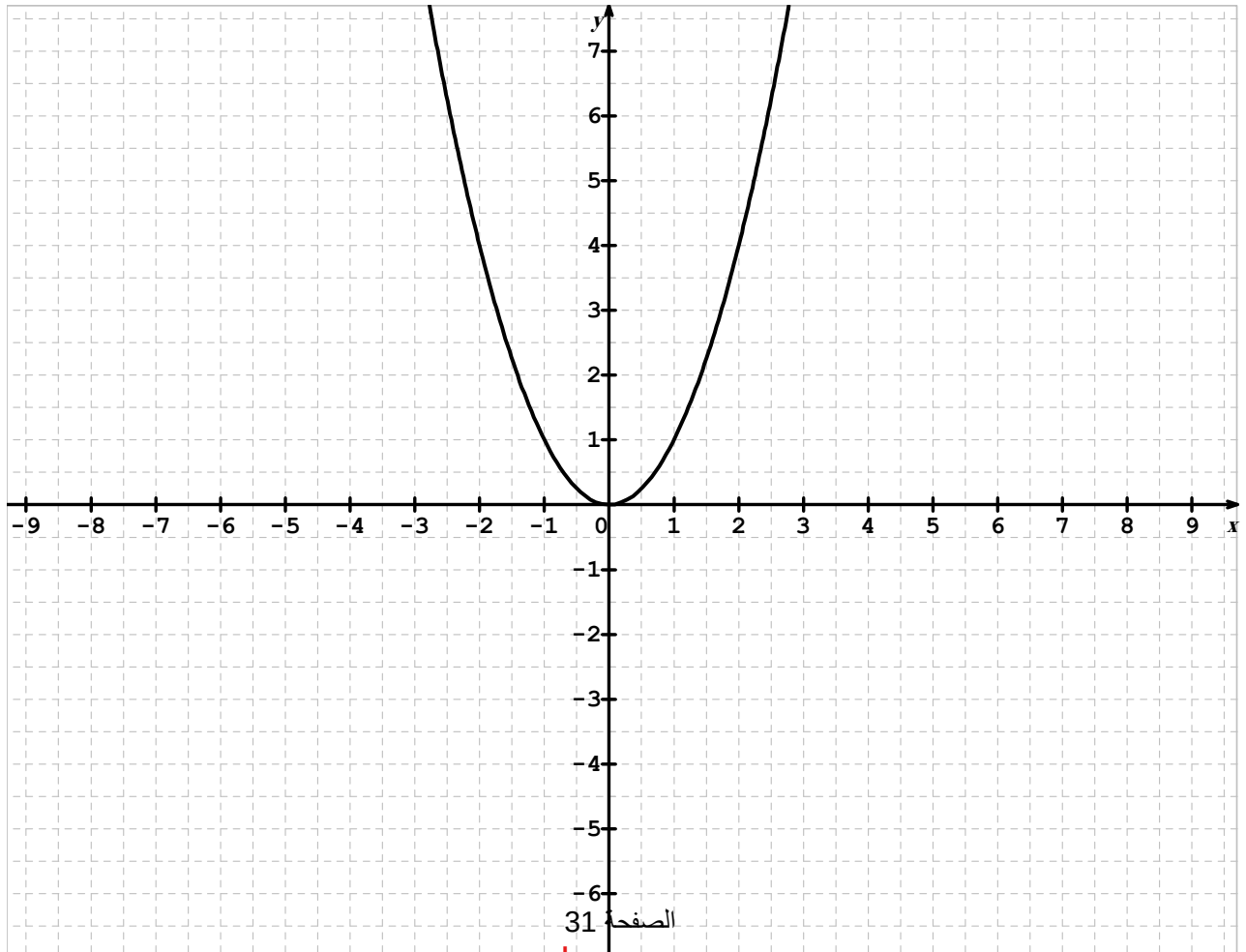
1. بين أن: $f(x) = (x - 2)^2 - \frac{5}{4}$
2. اشرح كيف نرسم البيان (C_f) باستعمال بيان الدالة مربع ثم ارسـمها في الورقة المرفقة
3. برهن أن (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة (C_f) كمحور تناظر له
4. بين أن العدد $-\frac{5}{4}$ هو قيمة حدية صغرى للدالة f
5. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$

يراعى تنظيم الإجابة و وضوحها
الألة الحاسبة مسموح بها

👉👉 بيان التمرين الثالث 👈👈



👉👉 بيان التمرين الرابع 👈👈



الفرص المحروس رقم ③ الثلاثي الأول

التمرين 01: 1. يعطى جدول إشارة كثير الحدود P المعروف بـ: $P(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$

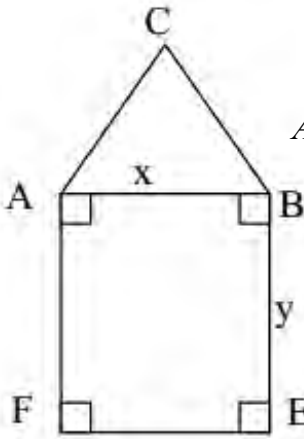
• ماهي إشارة العوامل a ، b و c (مع الشرح)

• نضع $a = -2$ عين قيم b و c

2. بواسطة سلك مهمل السمك طوله 6 cm نصنع مثلث متقايس الأضلاع ABC

و مستطيل $ABEF$ خارج المثلث ABC "أنظر الشكل"

نضع: $AB = x$ و $BE = y$



• (أ) تحقق أن: $y = 3 - 2x$ ثم بين أن: $0 < x < \frac{3}{2}$

• (ب) عبر عن $A(x)$ مساحة المستطيل $ABEF$ بدلالة x

• (ت) عين x حتى يكون $A(x) \geq 1$

• (أ) تحقق من أن: $A(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

• (ب) عين x حتى تكون المساحة $A(x)$ أعظمية

• (ت) عين في هذه الحالة مساحة المثلث ABC

التمرين 02: 1. نعتبر المعادلة: $(E) \rightarrow -4x^2 + 3x + 1 = 0$

(أ) تحقق من أن المعادلة (E) لها حلان متمايزان x' و x'' لا يطلب حسابهم

• (ب) بدون حساب x' و x'' أحسب: $A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ ، $B = x'^2 + x''^2$ ، $B = x'^3 + x''^3$

2. نعتبر المعادلة: $(E_m) \rightarrow (m^2 + 1)x^2 - 2mx - 2 = 0$ حيث $m \in \mathbb{R}$

(أ) بين لماذا المعادلة (E_m) تقبل حلين متمايزين مهما يكون $m \in \mathbb{R}$

• (ب) عين m حتى يكون أحد حلول المعادلة (E_m) يساوي (-1) ثم عين الحل الآخر

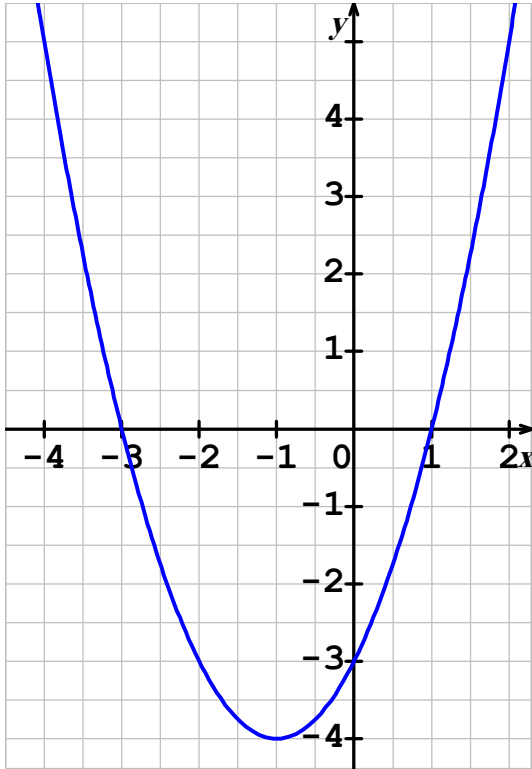
• (ج) نضع الآن $m = 2$ و بدون حساب x' و x'' أحسب: $D = \frac{x' + 1}{x'' - 1} + \frac{x'' + 1}{x' - 1}$

يراعى تنظيم الإجابة و وضوحها

الألة الحاسبة مسموح بها

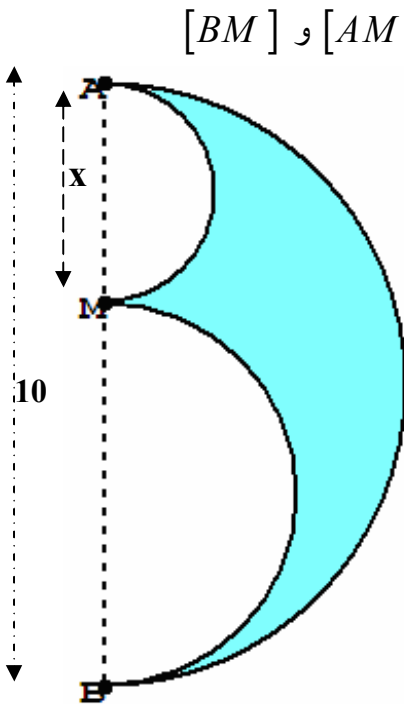
الفرض المحروس رقم ② الثاني الأول

التمرين 01: التمثيل البياني المقابل هو لدالة f كثير حدود من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$



1. أ) عين بيانيا $f(1)$ ، $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$
 ب) استنتج أن f ليس لها شفعية
 ت) استنتج المعاملات a ، b و c بحيث $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. حل بيانيا في $\mathbb{R}$ $f(x) = -3$ و $f(x) < -3$
3. أعطي القيمة الحدية الصغرى للدالة f
4. بين أن المستقيم $(\Delta): x = -1$ محور تناظر للبيان
5. أرسم المستقيم $(D): y = 2x + 1$ ثم حل بيانيا $f(x) = 2x + 1$

التمرين 02: نريد صنع قطعة حديدية بالشكل التالي:



نقطع نصف قرص قطره $[AB]$ ثم نقطع نصفين قطريهما على الترتيب $[AM]$ و $[BM]$ بحيث $M \in [AB]$ نضع $AB = 10 \text{ cm}$ و $AM = x \text{ cm}$ أنظر الشكل

1. ماهي مجموعة قيم x
 2. بين $A(x)$ مساحة القطعة (الجزء الملون) هي:
- $$A(x) = \frac{\pi}{4}(-x^2 + 10x)$$
3. ماهي قيم x إن وجدت حتى يكون :
 - $A(x) = 0$
 - $A(x) = 3\pi$
 - $A(x) = 7\pi$
 4. عين قيمة x التي من أجلها تكون المساحة $A(x)$ أعظمية وعين هذه القيمة

يراعى تنظيم الإجابة و وضوحها
 الآلة الحاسبة مسموح بها

الباب الثالث

الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية

- حساب مشتقات الدوال $x \mapsto f(ax+b)$ ، $\frac{f}{g}$ ، $\frac{1}{g}$ ، $f \times g$ ، $f + g$

من بداية الأسبوع الثالث من أكتوبر إلى نهاية الأسبوع الثاني من نوفمبر

المدة: 3 أسابيع
المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 21 ساعة و تقني رياضي 18 ساعة

نشاط 01: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$

أنشر $(a+b)^3$

أحسب $f(1+h)$ ثم بين أن $f(1+h) = f(1) + ah + h \times g(h)$

حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه و g عبارة جبرية بدلالة h

استنتج قيمة تقريبية لـ: $f(1.002)$ ثم إستنتج أحسن تقريب للعدد $f(1+h)$ لما h تقترب من الصفر بالقدر الكافي

استنتج $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ثم إلى ماذا تقترب هذه النسبة لما h تقترب من الصفر بالقدر الكافي

نضع $x = 1 + h$ عبر عن $f(1+h)$ ثم $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ بدلالة x

الحل:

$$1. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2. f(1+h) = (1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 = 1 + 3h + h(3h + h^2)$$

ومنه $a = 3$ و $g(h) = 3h + h^2$

$$3. \begin{aligned} f(1.002) &= f(1+0.002) \\ &= 1 + 3(0.002) + 0.002[3(0.002) + (0.002)^2] \\ &\simeq 1 + 0.006 = 3.006 \end{aligned}$$

بمأن: $\lim_{h \rightarrow 0} hg(h) = 0$ فإن أحسن تقريب لـ: $f(1+h) \simeq 1 + 3h$

و بما أنه دالة تألفيه بدلالة h يسمى تقريب تألفي

$$4. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \text{ ومنه } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 + 3h + h^2$$

يسمى هذا العدد 3 بالعدد المشتق و رمزه $f'(1) = 3$ ومنه إذن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$

5. لدينا $x = 1+h$ ومنه $h = x - 1$ إذن $f(1+h) = f(x) = 1 + 3(x-1) + (x-1)(x^2 + x - 1)$

ومنه $f(x) \simeq 1 + 3(x-1)$

أي أن معادلة المماس هي أحسن تقريب تألفي في جوار 1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{ ومنه } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

1. نهاية محدودة عند a :

مثال تمهيدى: لتكن الدالة $f: x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ أحسب $f(2)$ ثم أكمل الجدول التالي:

x	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999
$f(x)$						

ماهو تخمينك لما x تقترب من العدد 2 إلى ماذا تقترب $f(x)$

نلاحظ أن كلما اقترب x من العدد 2 فإن $f(x)$ يقترب من $f(2) = 3$ وهذا ما نسميه نهاية محدودة لدالة عند قيمة محددة

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2) \text{ : نكتب}$$

2. نسبة تزايد دالة: لتكن الدالة f و (C_f) بيانها ولتكن A و B نقطتان متميزتان من (C_f)

ذات الفاصلتين a و b على الترتيب نسبة تزايد (نسبة تغير) دالة بين العددين a و b

هو معامل توجيه المستقيم (AB)

لدينا: $A(a; f(a))$ و $B(b; f(b))$

ومنه: نسبة تزايد دالة بين العددين a و b هو:

$$\theta_{a,b} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta_f}{\Delta_x}$$

أي فرق الصورتين على فرق السابقتين

ملاحظات:

1. نسبة تزايد دالة بين a و b هو نفسه بين b و a

2. إذا كانت الدالة متزايدة على المجال $[a; b]$ فإن: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$

3. إذا كانت الدالة متناقصة على المجال $[a; b]$ فإن: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$

4. العكس ليس صحيح

مثال مضاد: لتكن $f: x \rightarrow f(x) = x^2$ على المجال $[-1; 2]$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{4 - 1}{3} = 1 > 0 \quad [-1; 2] \text{ المجال على دالة تزايد}$$

ولكن f دالة مربع متناقصة على $[-1; 0]$ و متزايدة على $[0; 2]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ : نضع } b = a + h \text{ ومنه: } h = b - a \text{ وتصبح النسبة كما يلي:}$$

3. **جوار عدد حقيقي:** نسمي جوار عدد حقيقي a كل مجال مفتوح أو مغلق يشمل a

أمثلة: 1. إليك المجال $[-1; 5]$ لاحظ أن العدد 3 ينتمي إلى المجال إذن له جوار وكذلك العدد 5 له جوار اليسار فقط

2. إليك المجموعة $I = [-1; 5] \cup \{7\}$ لاحظ أن العدد 7 ينتمي إلى المجموعة I ولكن لا يوجد له جوار

4. العدد المشتق:

تعريف: دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a عدد حقيقي تكون f قابلة للإشتقاق عند عدد a إذا وفقط حققت الشروط الثلاث التالية :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

☞ a عنصر من I ☞ a له جوار (غير معزول) ☞

مثال 01: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{3}{x-2}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 2

الجواب: f غير قابلة للإشتقاق عند 2 لأنها غير معرفة عند 2

مثال 02: (مضاد)

- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2(x^2 - 1) \geq 0$ ونسمي مجموعة حلولها D
- نعتبر الدالة f المعرفة على D بـ: $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 0

الجواب:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
الجداء	+	0	-	0	+

$$D =]-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty[$$

لاحظ أنها تعدم

وبالتالي 0 معزول ليس له جوار إذن f غير قابلة للإشتقاق عند 0

مثال 03: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & / x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$
 هل f قابلة للإشتقاق عند 0

الجواب: $D_f = \mathbb{R}$ الشرط الأول والثاني محققان

و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x} - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 2x}{x^2} \right) = +\infty \notin \mathbb{R}$ إذن f غير قابلة للإشتقاق عند 0

مثال 04: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x|$ هل f قابلة للإشتقاق عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|x|}{x} \right)$$

$D_f = \mathbb{R}$ الشرط الأول والثاني محققان و

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 = f'_+(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x}{x} \right) = -1 = f'_-(0)$ ومنه إذن f غير قابلة للإشتقاق عند 0 لأن: $f'_-(0) \neq f'_+(0)$

مثال 05: لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 4

الجواب: $D_f = \mathbb{R}$ الشرط الأول والثاني محققان

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) = \frac{1}{4} = f'(4) \in \mathbb{R}$$

ومنه: f قابلة للإشتقاق عند 4

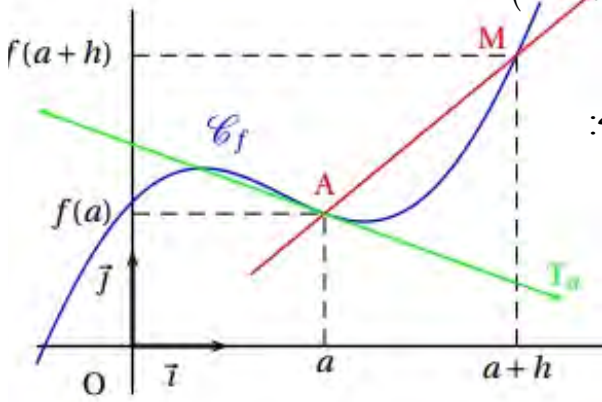
التفسير البياني للعدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

إذا قبلت f' الاشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$

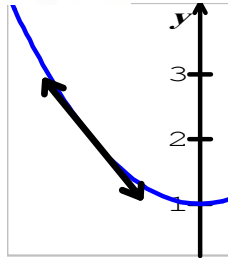
مماسا (T_a) لا يوازي حامل محور الترتيب معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته:

$$(T_a): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

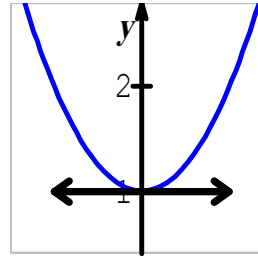


ملاحظة 01: لما يكون المعلم متعامد و متجانس نسميه ميل المماس

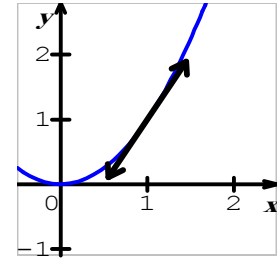
ملاحظة 02: لاحظ المماس وإشارة المشتقة



$$f'(x_0) < 0$$



$$f'(x_0) = 0$$

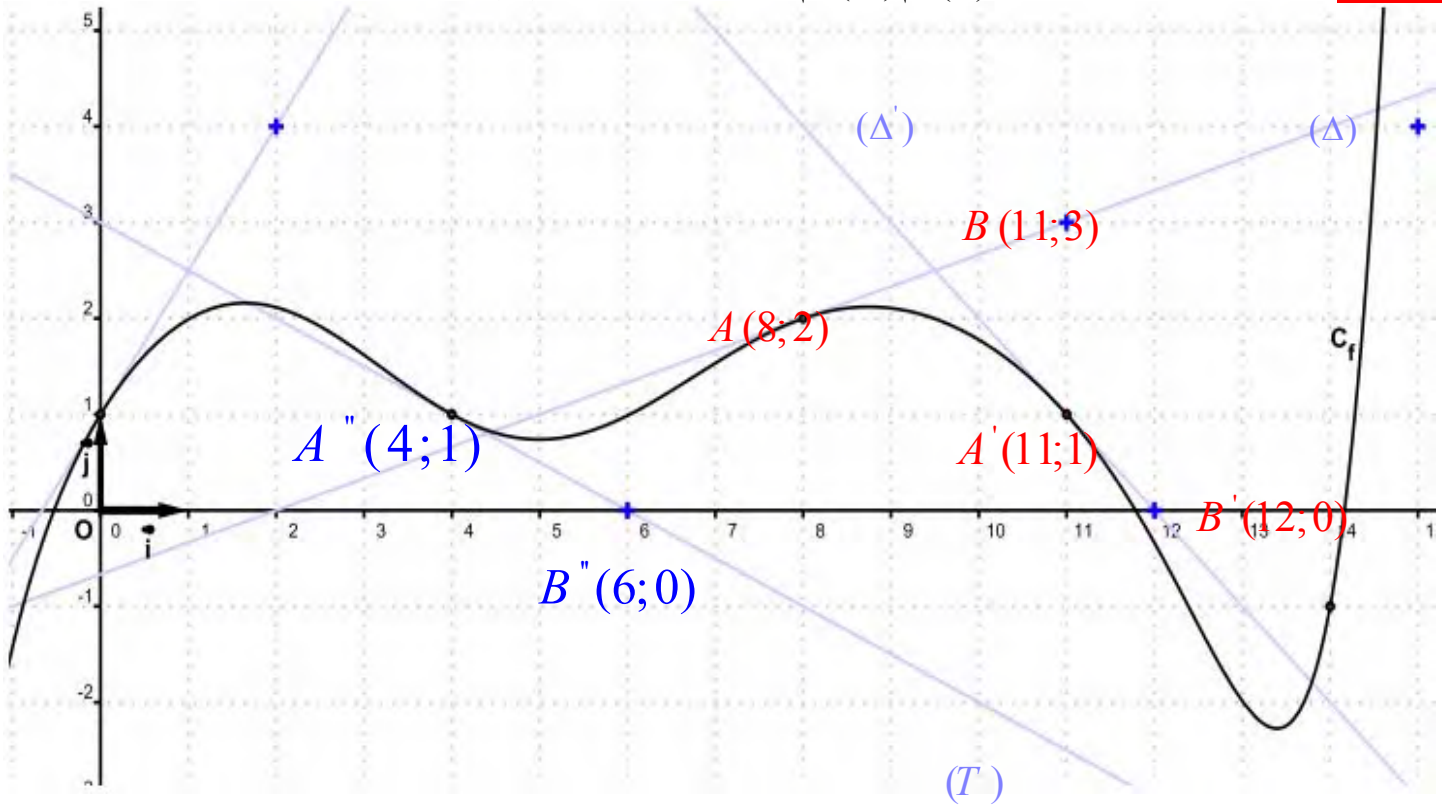


$$f'(x_0) > 0$$

$$f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

ملاحظة 03: لتعيين $f'(x_0)$ بياننا نعين من المماس إحداثيات نقطتان ومنه

مثال 01: عين معامل توجيه المماسات (Δ) ثم (Δ') ثم عين معادلة المماس (T)



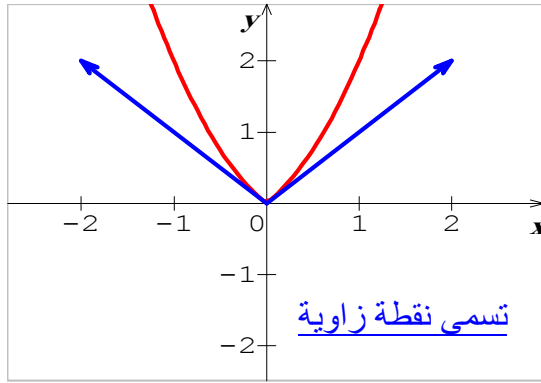
الحل: (Δ) هو مماس عند النقطة $A(8; 2)$ و هو يمر كذلك من النقطة $B(11; 3)$ إذن: $f'(8) = \frac{11-8}{3-2} = 3$

(Δ') هو مماس عند النقطة $A'(11; 1)$ و هو يمر كذلك من النقطة $B'(12; 0)$ إذن: $f'(11) = \frac{12-11}{0-1} = -1$

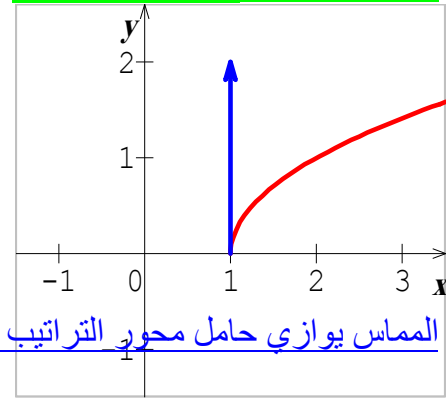
معادلة المماس (T) : هو مماس عند $A''(4; 1)$ وهو يمر كذلك من النقطة $B''(6; 0)$ إذن: $f'(4) = \frac{6-4}{0-1} = -2$

ومنه $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$
ويوجد عدة طرق لإيجاد المعادلة $y = -2(x - 4) + 1 = -2x + 9$

المثال 04: $f'_{<}(x_0) \neq f'_{>}(x_0)$ ارجع إلى المثال 04



المثال 03: $f'(x_0) \notin \mathbb{R}$ ارجع إلى المثال 03



الدالة المشتقة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I

و تسمى الدالة $f': x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

مثال: دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2$. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعيّن دالتها المشتقة f' .

الجواب: لدينا $f(x) = -x^2 + 2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن a عدد حقيقي. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و $a+h$ مع $h \neq 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[-(a+h)^2 + 2] - (-a^2 + 2)}{h} = \frac{-2ah - h^2}{h} = -2a - h$$

ومنه: $-2a - h$

وبالتالي: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2a - h) = -2a$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا: $f'(x) = 2x$

مشتقات دوال مألوفة:

مبرهنة 1: الدالة التآلفية $f: x \mapsto ax + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = a$

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا: $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0+h) + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a$$

ومنه صحة المبرهنة.

ملاحظة: * إذا كان $a = 1$ و $b = 0$ نستنتج أن الدالة $f: x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = 1$

* إذا كان $a = 0$ نستنتج أن الدالة $f: x \mapsto b$ (الدالة الثابتة) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = 0$

مبرهنة 2: الدالة $f: x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = nx^{n-1}$

مبرهنة 3: الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

مبرهنة 4: الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مبرهنة 5: (تقبل بدون برهان) الدالة $f: x \mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = \cos x$

مبرهنة 6: (تقبل بدون برهان) الدالة $f: x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -\sin x$

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

تطبيق: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية : $f(x) = 4\sqrt{2}$ ، $f(x) = 7x$ ، $f(x) = -3 - 5x$

$$f(x) = 2\sin(x) , f(x) = 5\sqrt{x} , f(x) = \frac{1}{x^8} , f(x) = \frac{1}{x^3} , f(x) = x^3 , f(x) = x^4$$

المشتقات والعمليات على الدوال: f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	الدالة المشتقة
$f + g$	$f' + g'$
kf	kf'
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
f^n	$nf^{n-1}f'$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$ ($f(x) \neq 0$)
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$ ($g(x) \neq 0$)
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ ($f(x) > 0$)
$f(ax + b)$	$a \times f'(ax + b)$

تطبيق: أحسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى D_f .

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ ، $f(x) = 5\left(x^3 + 3x + \frac{1}{x}\right)$ ، $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^3 + 3x - 4 + \cos x$

2. $D_f =]0; +\infty[$ ، $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = (x^2 + 1)^2$

3. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 + x + 3}$ ، $D_f =]2; +\infty[$ ، $f(x) = x + \sqrt{3x - 6}$

ويوجد تطبيقات في الكتاب المدرسي الصفحة 40

تمرين: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في M^3 $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1

2. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي 6 ثم معادلة المماس عنئذ

3. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي $(d): y = -2x + 7$

4. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها يعامد $(d'): y = -3x + 1$

الجواب: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي: $f'(x) = 2x - 4$

1. معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1 هي: $(\Delta): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -6x + 2$

2. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي 6 معناه: $6 \Leftrightarrow 2x - 4 = 6$ ومنه: $x = 5$

و النقطة هي: $A(5; 8)$ ومعادلة المماس هي: $(\Delta'): y = f'(5)(x - 5) + f(5) = 6x - 22$

3. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي $(d): y = -2x + 7$ معناه لهما **نفس معامل التوجيه** ومنه

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow 2x - 4 = -2 \text{ ومنه } x = 1 \text{ والنقطة هي: } B(1; 0)$$

4. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها يعامد $(d'): y = -3x + 1$ معناه " **جداء معاملي التوجيه يساوي -1** "

$$\text{ومنه: } -1 \Leftrightarrow -3(2x - 4) = -1 \Leftrightarrow -3 \times f'(x) = -1 \text{ ومنه: } x = \frac{13}{6} \text{ والنقطة: } C\left(\frac{13}{6}; f\left(\frac{13}{6}\right)\right)$$

التقريب التآلفي: [إرجع إلى النشاط](#) f دالة معرفة على مجال مفتوح I .

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x_0 + h$ ينتمي إلى I

لدينا: $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ **تسمى الكتابة التفاضلية**

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$

يسمى $f(x_0) + hf'(x_0)$ **التقريب التآلفي** لـ $f(x_0 + h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f .

نضع $x = x_0 + h \Leftrightarrow h = x - x_0$ و منه: $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وهي معادلة المماس عند x_0

إذن المماس هو أحسن تقريب تآلفي لـ $f(x_0 + h)$

مثال 01: أعطي و بدون آلة حاسبة قيمة تقريبية للعدد: $\sqrt{25,006}$

الجواب: 1. **باستعمال معادلة المماس:** نضع $f(x) = \sqrt{x}$ و $x_0 = 25$ لأننا في جوا العدد 25

ومنه: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ومعادلة المماس هي: $(\Delta): y = f'(25)(x - 25) + f(25) = 0,1x + 2,5$

$$f(25,006) = \sqrt{25,006} \approx 0,1(25,006) + 2,5 \approx \boxed{5,0006}$$

2. **باستعمال العلاقة** $f(x_0) + hf'(x_0)$: لدينا: $25,006 = 25 + 0,006$

ومنه: $x_0 = 25$ و $h = 0,006$ وعليه:

$$f(25,006) = f(25 + 0,006) \approx f(25) + 0,006f'(25)$$

$$\approx 5 + 0,006(0,1) \approx \boxed{5,0006}$$

يمكن التحقق بالآلة الحاسبة:

$$\sqrt{(25.006)} \\ 5.000599964$$

التمرين 01: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[-3; 3]$ وتحقق الشروط التالية:

- f متناقصة على المجال $[-3; 0]$
- $f(0) = -2$ و $f'(0) = 0$
- f دالة زوجية
- $f(3) = 9$

التمرين 02: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[0; 9]$ وتحقق الشروط التالية:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 3$ و $f'(1) = 2$
- $f(3) = 6$ و $f'(3) = 1$
- $f(5) = 7$ و $f'(5) = 0$
- $f(6) = 6$ و $f'(6) = -4$

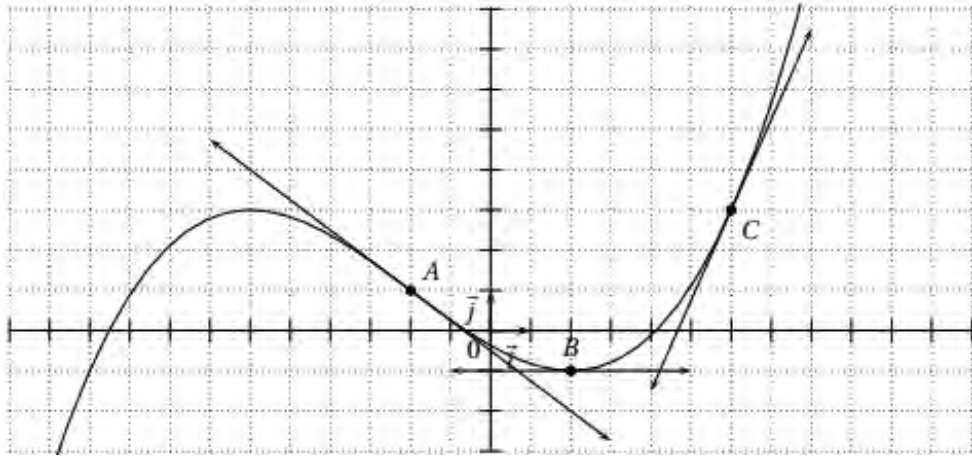
التمرين 03: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[-4; 0] \cup [0; 4]$ وتحقق الشروط التالية:

- f دالة فردية
- $f(0, 5) = 2$ و $f(0, 25) = 4$
- $f(1) = 1$ و $f'(1) = -1$
- (C_f) يقبل المنصف الأول $y = x$ كمحور تناظر له

التمرين 04: ليكن (C_f) التمثيل بياني لدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و الممثل كمايلي:

حدد بيانيا مايلي:

- $f(-2)$ و $f(6)$
- $f'(-2)$ ، $f'(2)$ و $f'(6)$
- عين معادلة للبيان (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -2
- باستعما التقريب التآلفي أعطي قيمة تقريبية لـ: $f(-1, 9)$



التمرين 05: 1. عين التقريب التآلفي للدوال التالية في جوار 0 : $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$

2. أحسب ذهنيا ما يلي: $\frac{1}{1,1}$ ، $\frac{1}{1,02}$ ، $\frac{1}{0,99}$ ، $\sqrt{1,1}$ ، $\sqrt{1,02}$ ، $\sqrt{0,99}$

الباب الرابع

تطبيقات الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

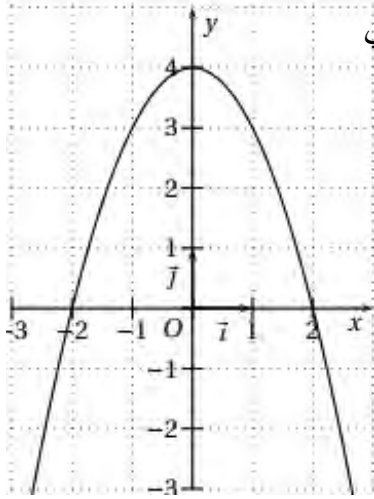
- تعيين اتجاه تغير دالة.
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة و دوال صماء.

من بداية الأسبوع الثاني من نوفمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من نوفمبر

المدة: 2 أسابيع
المدة الزمنية :

10 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 14 ساعة و تقني رياضي 12 ساعة

تطبيقات الاشتقاقية



نشاط 01: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 4$ و (C_f) تمثيلها البياني

1. بقراءة بيانية ضع جدول تغيرات الدالة f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها
3. هل هناك رابط بين اتجاه تغير الدالة f وإشارة مشتقتها الأولى f'
4. استنتج قاعدة تربط بين اتجاه تغير الدالة f وإشارة مشتقتها الأولى f'
5. تحقق من هذه القاعدة باستعمال الدوال المرجعية المعروفة

الدرس * Cours:

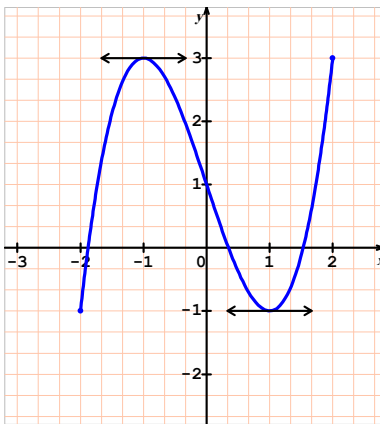
تطبيقات الاشتقاقية

1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

- مبرهنة:** f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.
- * إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ، فإن الدالة f متزايدة تماماً (متزايدة) على I .
 - * إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ، فإن الدالة f متناقصة تماماً (متناقصة) على I .
 - * إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ ، فإن الدالة f ثابتة على I .

2. القيم الحدية المحلية:

- تعريف:** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.



- مثال:** لتكن f الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ بـ $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- وليكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني. $f(-1) = 3$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f و $f(1) = -1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f في المجال $[0; 2]$.
- و $f(-1) = 3$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f في المجال $[-2; 0]$

- مبرهنة:** f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

3. حصر دالة:

نتائج

- لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال $[a, b]$ و f' دالتها المشتقة .
إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a, b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a, b]$
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ **تحافظ على الترتيب**
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a, b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a, b]$
 $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ **لا تحافظ على الترتيب**

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[-3, 1]$ كما يلي : $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' هي : $f' : x \mapsto 2x + 2$.
الدالة f' سالبة تماما على $[-3, -1]$ و $f'(-1) = 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3, -1]$.
الدالة f' موجبة تماما على $[-1, 1]$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1, 1]$.

جدول التغيرات:

x	-3	-1	1
$f(x)$	0	-4	0

من أجل كل: $-3 \leq x \leq -1$ فإن: $f(-1) \leq f(x) \leq f(-3)$ أي $-4 \leq f(x) \leq 0$ لأن الدالة متناقصة
من أجل كل $-1 \leq x \leq 1$ فإن: $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ أي $-4 \leq f(x) \leq 0$ لأن الدالة متزايدة

4. عنصر حاد من الأعلى - عنصر حاد من الأسفل :

تعريف:

- لتكن دالة f معرفة على مجال D_f .
يسمى عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأعلى (**Majorant**) للدالة f على المجال D_f
إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x) \leq k$.
- يسمى عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأسفل (**Minorant**) للدالة f على المجال D_f
إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x) \geq k$.

بالنسبة للمثال السابق الدالة f المعرفة على $[-3, 1]$ كما يلي : $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$.
0 عنصر حاد من الأعلى و -4 عنصر حاد من الأسفل.

- **ملاحظة:** القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأعلى وهو أصغر العناصر الحادة من الأعلى.
- القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأسفل وهو أكبر العناصر الحادة من الأسفل.

التمرين 01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 3$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. بين أن تقبل قيمة حدية

التمرين 02: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. بين أن تقبل قيمة حدية

التمرين 03: لتكن f دالة معرفة على $[0, 2]$ كما يلي : $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. أنشئ المماسات عند 0 ، 1 و 2 ثم أنشئ القيم الحدية و البيان (C_f)

التمرين 04: لتكن f دالة معرفة على $[-1, 3]$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) و حامل محور الفواصل
4. عين القيم الحدية و أنشئ البيان (C_f)

التمرين 05: لتكن f دالة معرفة على $[0, 5]$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f و لتكن I نقطة من (C_f) فاصلتها 2
 - عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة I
 - نعتبر دالة h معرفة كما يلي : $h(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$ بين أن h متزايدة تماما على $[0, 5]$
 - أدرس الوضع النسبي للبيان (C_f) بالنسبة إلى (T)
4. أنشئ البيان (C_f)

التمرين 06: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في $M(0; \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0
4. أدرس الوضع النسبي للبيان (C_f) بالنسبة إلى (T)
5. أنشئ المماس (T) والبيان (C_f)

التمرين 07: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في $M(0; \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين إحداثيات A نقطة تقاطع البيان (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أعطي معادلة مختصرة للمماس (T_A) للبيان (C_f) عند النقطة A
4. عين إحداثيات B نقطة تقاطع البيان (C_f) مع حامل محور الترتيب ثم أعطي معادلة مختصرة للمماس (T_B) للبيان (C_f) عند النقطة B

التمرين 08: لتكن f دالة معرفة على $[-4; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. بين أن f دالة فردية ماذا تستنتج بيانيا
2. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
3. ضع جدول تغيراتها وعين القيم الحدية المحلية
4. أنشئ البيان (C_f) في المجال $[-4; 4]$

التمرين 09: لتكن (P) القطع المكافئ المعروف كما يلي: $y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ حيث: $(O; \vec{i}, \vec{j})$

عين المعاملات a ، b و c علما بأن: (P) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة A فاصلتها 3 و يقطع حامل محور الترتيب في نقطة B فاصلتها 2 و يقبل عند B مماس معادلته $y = 2x + 2$

التمرين 10: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

1. عين المجموعة التي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عليها
2. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
3. ضع جدول تغيراتها
4. عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2
5. عين نقط من (C_f) المماس عندها يوازي حامل محور الفواصل
6. هل يوجد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي المنصف الأول $y = x$
7. عين نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي -3
8. أ) عين تقريب تألفي للدالة f في جوار 2
ب) استنتج قيمة مقربة لمايلي: $f(2,003)$ ، $f(1,996)$
9. برهن أن النقطة $\Omega(1; -1)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

مسائل الإستمثال

مسألة 01: نعتبر مستطيل محيطه $P = 4 \text{ cm}$

1. عين أبعاده (الطول L و العرض l) علما بأن مساحته S تساوي $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$
2. نريد الآن تعيين الأبعاد حتى تكون المساحة أعظمية

- عبر عن المساحة S بدلالة العرض l
- نعتبر دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x(2 - x)$ أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها و ضع جدول

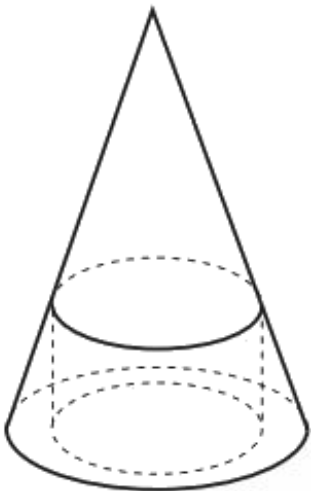
تغيراتها ثم أنشئ بيانها (C_f) في المجال $[0; 2]$

- استنتج أبعاده المستطيل الذي محيطه $P = 4 \text{ cm}$ و المساحة أعظمية S

مسألة 02: أسطوانة دائرية نصف قطرها $x \text{ cm}$ موجودة داخل مخروط دوراني نصف قطره 10 cm و ارتفاعه 30 cm

نفرض أن حجم الأسطوانة معطى بالدالة التالية $V(x) = 30\pi x^2(1 - \frac{x}{10})$ و $0 \leq x \leq 10$

أوجد قيمة x حتى يكون الحجم أعظمي

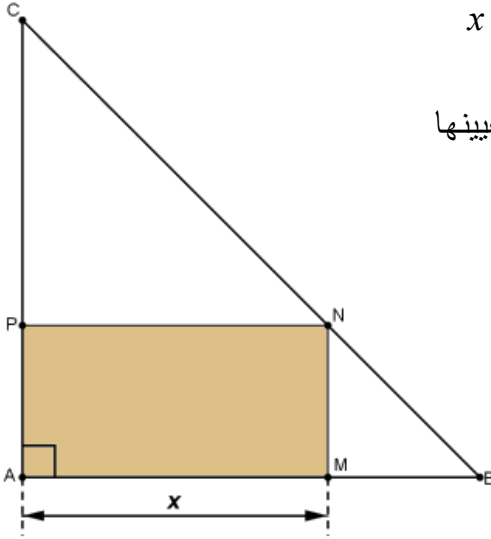


مسألة 03: نعتبر مستطيل مساحته $S = 16 \text{ cm}^2$ نسعي نعتبر مستطيل محيطه x أحد أضلاعه

1. عبر عن المحيط نعتبر مستطيل محيطه $P(x)$ بدلالة نعتبر مستطيل محيطه x

2. أدرس اتجاه تغير الدالة P ثم ضع جدول تغيرها على المجال $]0; +\infty[$

3. استنتج أن المحيط $P(x)$ يقبل قيمة حدية صغرى عند قيمة للعدد x يطلب تعيينها



مسألة 04: ABC مثلث قائم و متساوي الساقين بحيث $AB = AC = 6 \text{ cm}$

M نقطة متحركة على القطعة $[AB]$ بحيث: $AM = x$ و $(x \in [0; 6])$

لتكن $N \in [BC]$ و $P \in [AC]$ بحيث يكون الرباعي $AMNP$ مستطيل

نقبل أن المثلثان CPN و BMN قائمان و متساويا الساقين "أنظر الشكل"

1. لتكن f ترفق بكل عدد x مساحة المستطيل $AMNP$

• بين أن $f(x) = x(6 - x)$

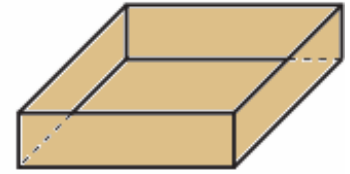
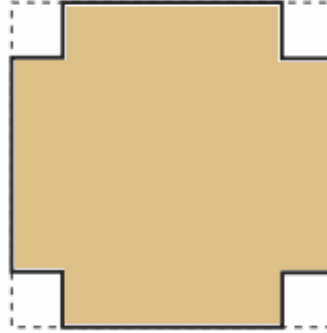
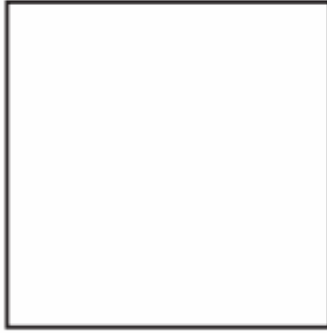
• تحقق أن: $f(x) = -(x - 3)^2 + 9$

2. ضع جدول تغيرات للدالة f

3. استنتج أن مساحة $AMNP$ تكون أعظمية من أجل وضعية للنقطة M يطلب تحديدها و إعطاء قيمة هذه المساحة

مسألة 05: لتكن لدينا ورقة مربعة الشكل طول ضلعها 6 cm نقطع من زواياها مربعات طول الضلع يساوي $x \text{ cm}$

للحصول على تصميم لعبة بدون غطاء نسعي دالة ترفق بكل قيمة للعدد x العدد $V(x)$ حجم العبة "أنظر الشكل"



1. ماهو المجال I الذي تتغير x

2. بين أن لكل x من المجال I لدينا $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة V ثم ضع جدول تغيرها على المجال I

4. استنتج أن الحجم $V(x)$ يقبل قيمة حدية عظمى عند قيمة للعدد x يطلب تعيينها

مسألة 06: تنتقل سيارة من مدينة A نحو مدينة B تفصلهما مسافة d_1 بسرعة متوسطة 80 km/h

ثم من المدينة B نحو مدينة C تفصلهما مسافة d_2 بسرعة متوسطة $x \text{ km/h}$

نسعي $V(x)$ السرعة المتوسطة خلال رحلة هذه السيارة من A نحو C نعرف V على المجال $[0; 130]$

1. ماهو اتجاه تغير الدالة V على المجال $[0; 130]$

2. علما بأن المسافة d_2 أكبر مرتان من المسافة d_1 عبر بدلالة x السرعة المتوسطة $V(x)$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة V عن طريق حساب $V'(x)$ المشتقة الأولى على المجال $[0; 130]$

4. ضع جدول تغيرات الدالة V ثم استنتج السرعة المتوسطة الأعظمية و قيمة $x \text{ km/h}$ المقابلة لذلك

الباب الخامس

النهايات و السلوك التقاربي

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0 .
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيماً معلوماً هو مستقيم مقارب. البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية (المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

من بداية الأسبوع الأول من ديسمبر إلى نهاية الأسبوع الأول من يناير

المدة: 3 أسابيع

المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 21 ساعة و تقني رياضي 18 ساعة

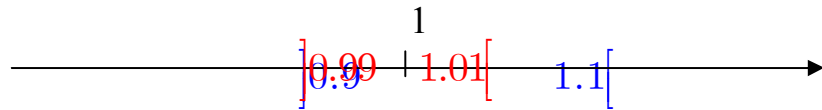
النهايات و السلوك التتاربي

نشاط 01: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية و أرسم الحلول على محور عددي :

1. $|x| < 1$ 2. $|x - 1| < 0.1$ 3. $|x - 1| < 0.01$

2. ماذا تلاحظ

الحل: 1. $-1 < x < 1$ 2. $0.9 < x < 1.1$ 3. $0.99 < x < 1.01$



2. الملاحظة: هذه المجالات مركزية و كلما صغر طولها كانت x تقترب من 1 يعني أنها **ستنتهي** عند 1

نشاط 02: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم الموالي:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$								

3. ماذا تلاحظ ؟

4. بين أنه حتى يكون $f(x) \geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $[3 - 10^{-4}; 3[\cup]3; 3 + 10^{-4}]$

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يكون $f(x) \geq A$ لما $x \in [3 - \frac{1}{\sqrt{A}}; 3[\cup]3; 3 + \frac{1}{\sqrt{A}}]$

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

الحل: 1.

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{-2x+6}{(x-3)^4}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

الملاحظة: لما x يقترب من 3 بالقدر الكافي فإن $f(x)$ يكبر

مما يعني أن: لما $x \rightarrow 3$ فإن $f(x) \rightarrow +\infty$

$$f(x) \geq 10^8 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)^2} \geq 10^8 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow |x-3| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow -10^{-4} \leq x-3 \leq 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 10^{-4} \leq x-3 \leq 3 + 10^{-4} \Leftrightarrow x \in [3 - 10^{-4}; 3[\cup]3; 3 + 10^{-4}]$$

$$f(x) \geq A \Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)^2} \geq A \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow |x-3| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{A}} \leq x-3 \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{1}{\sqrt{A}} \leq x-3 \leq 3 + \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow x \in \left[3 - \frac{1}{\sqrt{A}}; 3[\cup]3; 3 + \frac{1}{\sqrt{A}}\right]$$

وهو برهان الملاحظة

تعريف 1: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً ε ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً α بحيث: إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون $0 \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

ملاحظة: $0 < |x - x_0| < \alpha$ تعني $x \in]x_0 - \alpha; x_0[\cup]x_0; x_0 + \alpha[$ تعني $0 \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ $f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

تعريف 2: نقول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً ε ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $0 \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

تعريف 3: نقول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تعريف 4: نقول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً B بحيث: إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) > A$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

تعريف 5: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً A يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً α بحيث: إذا كان $0 < x - x_0 < \alpha$ يكون $f(x) > A$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

تعريف 6: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً A يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماماً α بحيث: إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) > A$ ونكتب: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$

ملاحظة: يمكنك الحصول على بقية التعاريف بإتباع نفس المبدأ السابق .

عمليات على النهايات

1. المبرهنات الأولية على النهايات: f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.
نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

لم **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

لم **نهاية جداء دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

حالات عدم تعيين: $0 \times \pm \infty, +\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

**** هذه العمليات ليس لها نتائج بل يجب التخلص منها وذلك برفع الحالة ****

طرق رفع حالات عدم تعيين:

حالة $+\infty - \infty$ ثم $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ وكثيرات الحدود:

(أكبر حد) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n)$ 1.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_n x^n} \right)$ 2.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3) = -\infty$ مثال 01:

البسط درجته أكبر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 4x + 5}{2x^2 + x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{2} \right) = +\infty$

لهما نفس الدرجة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 4x + 5}{2x^3 + x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3}{2x^3} \right) = \frac{3}{2}$

المقام درجته أكبر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 4x + 5}{2x^4 + x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3}{2x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2x} \right) = 0^+$

حالة $\frac{0}{0}$: (*) حالة كثير حدود على كثير حدود يجب تحليل البسط والمقام ثم الإختزال

وهنا x يؤول إلى عدد

مثال 01: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^3 - 4x + 1}{2x^2 + x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)(2x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2 + 3x - 1}{2x+3} \right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-3}{x} \right) = -2$

حالة الجذور يجب الضرب في المرافق مرة أو مرتان (*) وهنا x يؤول إلى عدد

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x + 5} - 3}{\sqrt{x - 3} - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x + 5} - 3}{\sqrt{x - 3} - 1} \times \frac{\sqrt{x + 5} + 3}{\sqrt{x + 5} + 3} \times \frac{\sqrt{x - 3} + 1}{\sqrt{x - 3} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x + 5 - 9}{x - 3 - 1} \times \frac{\sqrt{x - 3} + 1}{\sqrt{x + 5} + 3} \right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ونلاحظ ضربنا في مرافق البسط و مرافق المقام

• النهاية من اليمين و النهاية من اليسار

تمرين: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$

• أحسب النهاية عند أطراف مجموعة التعريف

الحل: $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} \right) = 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty \left(\begin{array}{l} N = 7 \\ D = 0^- \end{array} \right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty \left(\begin{array}{l} N = 7 \\ D = 0^+ \end{array} \right)$$

جدول إشارة المقام ضروري

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+

ملاحظة: N تعني البسط و D تعني المقام

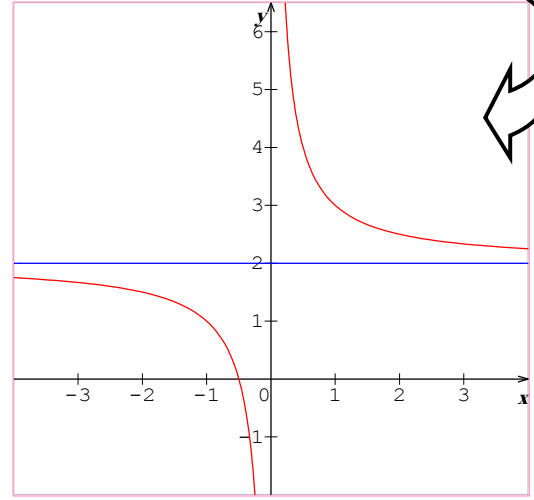
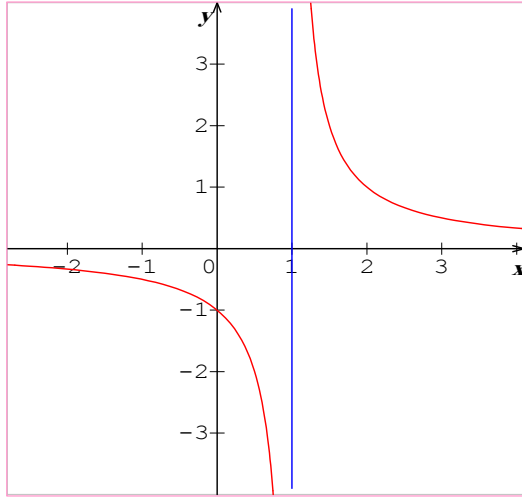
يمكن التدريب على حساب النهايات في التطبيقات و السلاسل

السلوك التقاربي لبيان الدالة

التفسير البياني لـ: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ (يعني (C_f) بيان f يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=a$ كمقارب له)

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ (يعني (C_f) بيان f يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=b$ كمقارب له)



إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فهناك إمكانية وجود خط مقارب مائل

المستقيم المقارب المائل

1. مثال تمهيدي

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

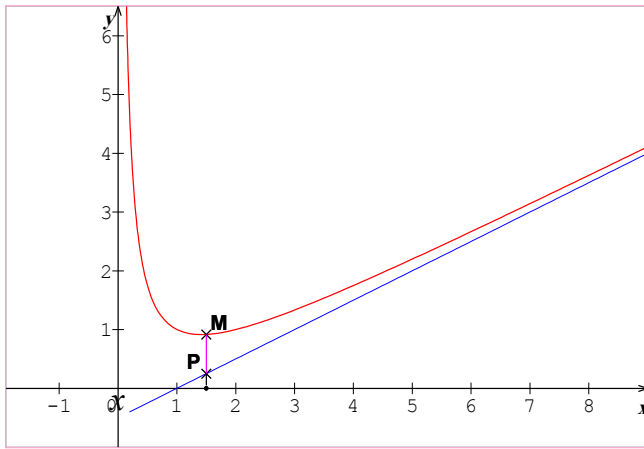
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$$

باستعمال راسم منحنيات تحصلنا على (C_f) التمثيل البياني

للدالة f كما قمنا بتمثيل المستقيم $(\Delta): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و لتكن P

نقطة (Δ) لتي فاصلتها x . (أنظر الشكل المقابل)



لدينا بالنسبة لهذه الوضعية $MP = f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$ و منه $MP = \frac{1}{x}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن MP يؤول إلى 0 لما يؤول x إلى $+\infty$. نلاحظ أن المنحني (C_f) يقترب من المستقيم (Δ) لما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المستقيم مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$

نقول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

يعني أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x) = ax + b + g(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإنه من الواضح أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{لأن} \quad f(x) - (ax + b) = g(x) \quad \text{بالتالي فالمستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة: } y = ax + b$$

مستقيم مقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$. (نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 3 - \frac{3}{x-2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x-2} = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x-2} = 0^- \quad \text{و بما أن} \quad f(x) - (x + 3) = -\frac{3}{x-2}$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

البحث عن المستقيم المقارب المائل

نعتبر في معلم (O, I, J) للمستوي المنحني (C_f) الممثل لدالة f .

و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ ($a \neq 0$) نفرض أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نفرض أن (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ومنه حسب التعريف $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ نضع: $g(x) = f(x) - (ax + b)$ و منه $f(x) = g(x) + ax + b$

حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0: $\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) + ax + b}{x} = \frac{1}{x} \times g(x) + a + \frac{b}{x}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ لدينا من جهة ثانية

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن $f(x) - ax = g(x) + b$

الخلاصة 1: إذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ ($a \neq 0$) مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{فإن}$$

1. نفرض أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ من الواضح أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ و منه

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

الخلاصة 2: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ملاحظة: ننجز برهانا مماثلا لما يؤول x إلى $-\infty$

نتيجة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \quad \text{(على الترتيب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2. عين معادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .

الحل: • لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و بنفس الطريقة نثبت أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty \begin{pmatrix} N = -1 \\ D = 0^+ \end{pmatrix}$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty \begin{pmatrix} N = -1 \\ D = 0^- \end{pmatrix}$

$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty \begin{pmatrix} N = 1 \\ D = 0^- \end{pmatrix}$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty \begin{pmatrix} N = 1 \\ D = 0^+ \end{pmatrix}$

• من نتائج حساب النهايات نستنتج أن المستقيمين الموازيين لمحور الترتيب و اللذين معادلتاهما:

$x = -1$ و $x = 1$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f) .

• لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و منه إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل

لدينا من جهة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 3$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

لدينا إذن:

و بالتالي المستقيم $(\Delta): y = x + 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$. (نفس النتيجة عند $-\infty$)

مخطط دراسة حالة

1. مجموعة التعريف

- تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
- دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة) قصد تقليص مجموعة الدراسة و تحديد مراكز أو محاور تناظر المنحني الممثل للدالة.

2. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة

3. دراسة اتجاه تغير الدالة

- حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
- دراسة إشارة المشتقة و استنتاج اتجاه تغير الدالة.
- تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.

4. تشكيل جدول تغيرات الدالة

5. تحديد المستقيمات المقاربة

6. التمثيل البياني للدالة

- رسم المستقيمات المقاربة.
- تمثيل بعض النقاط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها و نذكر بصفة خاصة النقاط الحدية و نقاط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات.
- رسم المماسات عند القيم الحدية و أخرى مطلوبة في النص.
- استغلال عناصر تناظر المنحني إن وجدت.

1. دراسة الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

مسألة 01: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ و (C_f) تمثيلها البياني في $\mathbb{M}^3(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f =]-\infty; +\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; +\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات
6. عين إحداثيات I نقطة الإنعطاف
7. بين أن I مركز تناظر للبيان (C_f)
8. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 02: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ و (C_f) تمثيلها البياني في $\mathbb{M}^3(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f =]-\infty; +\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; +\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات
6. عين معالة المماس (T) عند النقطة $I(-1; -2)$
7. أدرس الوضع النسبي بين المماس (T) و البيان (C_f)
8. استنتج أن $I(-1; -2)$ نقطة الإنعطاف
9. بين أن $I(-1; -2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

2. دراسة الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة:

مسألة 03: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في $\mathbb{M}^3(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أن البيان (C_f) يقبل حامل محور الترتيب كمحور تناظر له
2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $f(0)$
3. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; +\infty[$
4. ضع جدول تغيرات الدالة f
5. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$
6. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 04: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^4 - 4x$ و (C_f) تمثيلها البياني في $\mathbb{M}^3(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f =]-\infty; +\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; +\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. حل في $]-\infty; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات
6. عين معالة المماس (T) عند المبدأ O
7. أدرس الوضع النسبي بين المماس (T) و البيان (C_f)
8. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -4x + m$

مسألة 05: f دالة عددية معرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ ثم أعطي تفسيراً هندسياً لهذه النهايات
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات
5. بين أن I نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)
6. أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)

مسألة 06: f دالة عددية معرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ / $c \neq 0$

و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و a, b, c, d أعداد حقيقية

1. عين الأعداد a, b, c, d علماً بأن البيان (C_f) يقبل المستقيمان $(\Delta): x=1$ و $(\Delta'): y=-2$ كمقاربات له والبيان (C_f) يشمل النقطة $A(0; -4)$

2. نعتبر الآن أن: $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$

- أحسب النهايات عند أطراف $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
- ضع جدول تغيرات الدالة f
- عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامل محوري الإحداثيات
- بين أن I نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)
- أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)

3. نعتبر الدالة g معرفة كمايلي: $g(x) = \frac{2|x|-4}{1-|x|}$ و (C_g) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- عين مجموعة تعريفها D_g
- بين أن الدالة g زوجية
- بين كيف نرسم (C_g) باستعمال البيان (C_f)
- أرسم البيان (C_g) في نفس المعلم السابق

مسألة 07: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. بين أن لكل $x \in \mathbb{R} - \{3\}$: $f(x) = x \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}}$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى البيان

2. بين أنه يوجد ثلاث أعداد حقيقية a, b, c بحيث لكل $x \neq 3$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

3. استنتج أن البيان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تحديد معادلة له
4. أدرس وضعية البيان (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

5. أحسب $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ ثم أعطي تفسيراً لهذه النهايات

6. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات f
7. عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 2

8. أوجد نقط من البيان (C_f) المماس عندها ميله يساوي $\frac{5}{4}$

9. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات

10. أرسم الخطوط المقاربة و المماس (T) و البيان (C_f)

11. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

12. بين أن نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)

13. نعتبر الدالة g معرفة كمايلي: $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{|x - 3|}$ و (C_g) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

● أكتب $g(x)$ بدون قيمة مطلقة ثم استنتج $g(x)$ بدلالة $f(x)$

● بين كيف نرسم (C_g) باستعمال البيان (C_f)

● أرسم البيان (C_g) في نفس المعلم السابق

مسألة 08: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ بـ: $f(x) = \frac{1 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب النهايات عند أطراف D_f ثم أعطي تفسيرا لهذه النهايات

2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على D_f ثم ضع جدول تغيرات f

3. أعطي جدول إشارة $f(x)$ ثم استنتج وضعية البيان (C_f) مع حامل محور الفواصل

4. أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)

5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 09: f دالة عددية معرفة على $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}; \vec{j})$ في الرسم المقابل

البيان (C_f) يقبل مما أفقي عند النقطة $A(1; 2)$ و (Δ) مستقيم مقارب له

1. عين معادلة مختصرة للمستقيم (Δ)

2. عين الأعداد a, b, c باستعمال المعطيات السابقة

3. ضع جدول تغيرات الدالة f

4. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m

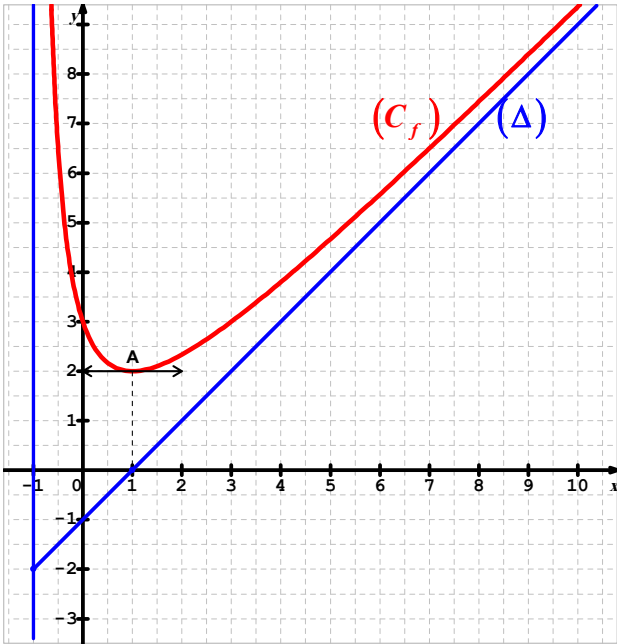
عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

5. أرسم في معلم آخر بيان (C') نظير (C_f) بالنسبة إلى $I(-1; -2)$

6. ليكن (C_g) بيان دالة g معرفة على $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 3$

● أدرس الوضع النسبي بين البيانيين (C_f) و (C_g)

● أرسم في نفس المعلم السابق البيان (C_g)



←←← مسائل الإستمثال →→→

مسألة 01: تتطلق سيارة من مدينة A نحو مدينة B قاطعة مسافة d_1 بين المدينتين بسرعة متوسطة 80 km/h

ثم تقطع مسافة d_2 نحو مدينة C بسرعة متوسطة $x \text{ km/h}$

لتكن $V(x)$ السرعة المتوسطة للسيارة على كامل الرحلة $A \rightarrow B \rightarrow C$

نعرف هذه الدالة V على المجال $[0;130]$

1. ماهو اتجاه تغير الدالة V على المجال $[0;130]$

2. إذا علمت أن $d_2 = 2d_1$ عبر عن $V(x)$ بدلالة x

3. أحسب $V'(x)$ ثم ضع جدول تغيراتها على المجال $[0;130]$

4. بين أن الدالة V تقبل قيمة حدية صغرى

5. مثل هذه الدالة في $\mathbb{R}^3$ ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

مسألة 02: نعتبر مستطيل مساحته 16 cm^2 نسمي x طول إحدى أضلاعه

1. عبر عن محيطه $P(x)$ بدلالة x

2. أدرس تغيرات الدالة P في المجال $[0;+\infty[$

3. بين أن الدالة P تقبل قيمة حدية صغرى من أجل قيمة محددة للعدد x

4. ليكن (C_P) تمثيلها البياني في $\mathbb{R}^3$ ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

• بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$: (Δ) هو مقارب للمنحني (C_P)

• أدرس وضعية (C_P) بالنسبة إلى (Δ)

• أرسم المستقيم (Δ) والبيان (C_g)

5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$

مسألة 03: في $\mathbb{R}^3$ ($O; \vec{i}; \vec{j}$) نعتبر النقطة $A(1;2)$ وليكن x عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ($x > 1$)

ولتكن النقطة $M(x;0)$ ، المستقيم (AM) يقطع حامل محور الترتيب في نقطة N

1. بين أن ترتيبية النقطة N تساوي $\frac{2x}{x-1}$

2. نعرف الآن دالة f كمايلي: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

• عين مجموعة تعريفها D_f

• أدرس تغيرات الدالة f على D_f

• استنتج أن الدالة f محدودة من الأسفل بالعدد 2

3. نعرف الآن دالة g ترفق بكل عدد x إلى $g(x)$ هي مساحة المثلث OMN

• عين مجموعة تعريفها D_g

• عين عبارة $g(x)$

• أدرس تغيرات الدالة g على D_g

• استنتج أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى ثم ضع رسم لهذه الحالة

يقبل (C_f) مماسا افقيا عند النقطة $A(0;3,5)$

(2) تحقق ان: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) جدا نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات

(5) ادرس وضعية (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y=1$.

(6) بين أن: $f(-2-x) + f(x) = 2$ ثم فسر النتيجة هندسيا

(7) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) .

12 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax^3 + bx + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية. (C) هو المنحني الممثل لـ f

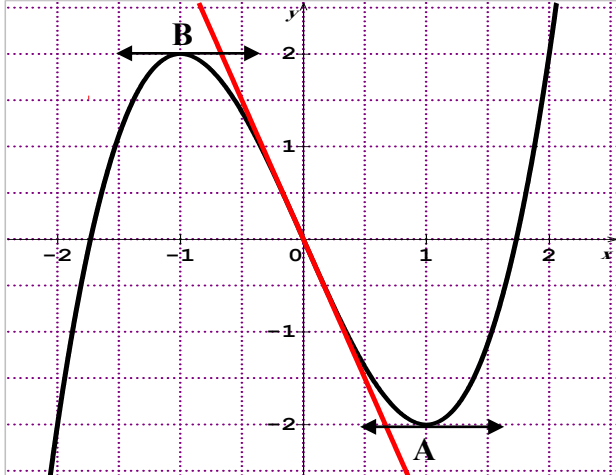
عين الأعداد a, b, c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة

$A(1;-3)$ ويقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا

للمستقيم D الذي معادلته $y = -6x$

12 (C_g) المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية g

معرفة على المجال $[-2, +2]$ ب: $D = g(x) = ax^3 + bx + c$



(1) بقراءة بيانية عين مايلي:

أ، $g(-1)$ ، $g(1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$ ، $g'(1)$ ، $g''(0)$

ب) أكتب معادلة المماس لـ (C_g) عند النقط O و A و B

ج) شكل جدول تغيرات g

(2) باستعمال نتائج 1-أ) بين أن: $a=1$ ، $b=-3$ و $c=0$

01 الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$

(1) أحسب $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) بين أن (C_f) يقبل مماسين ميل كل منهما يساوي 3

ثم اكتب معادلتها هاذين المماسين.

(3) هل يوجد مماس لـ (C_f) توازي حامل محور الفواصل

10 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a في كل حالة

(1) $a = -2$ ، $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ (2) $a = 2$ ، $f(x) = x^2 - 1$

(3) $a = 1$ ، $f(x) = x|x-1|$ (4) $a = 3$ ، $f(x) = \sqrt{x-1}$

18 أحسب $f'(x)$ في كل حالة ثم ادرس اشارته

(1) $f(x) = -x^3 + 3x + 4$ (2) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

(3) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ (4) $f(x) = (x+1)(x^2-1)$

(5) $f(x) = \sqrt{3x-6}$ (6) $f(x) = \sin x$ على المجال $[0; \pi]$

13 أكتب معادلة لمماس المنحني (C_f) عند النقطة ω

ذات الفاصلة x_0 في كل حالة:

(1) $x_0 = -1$ ، $f(x) = x^3 - x^2$ (2) $x_0 = 0$ ، $f(x) = x^2 + 3x - 4$

(3) $x_0 = 2$ ، $f(x) = \sqrt{2x-3}$ (4) $x_0 = 1$ ، $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

10 الدالة المعرفة على $[1;5]$ ب: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

واليك (C_f) هو التمثيل البياني لها.

(1) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$ وفسر النتيجة هندسيا.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) باستعمال منحني دالة "الجذر التربيعي" أنشئ (C_f)

10 دالة معرفة على $[-1;3]$ ب: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

(1) حسب $f'(x)$ وادرس اشارته ثم استنتج اتجاه تغير f

(2) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(3) جد معادلة المماس (T) لـ (C_f) في نقطة ذات الفاصلة 1

(4) أرسم المماس (T) والمنحني (C_f) .

(5) اعط حصرا للعدد $f(x)$ من أجل $1 \leq x \leq 3$

10 دالة معرفة على $[-2;2]$ ب: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

(1) ادرس شفعية الدالة f . ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\mathcal{C}_f$ ؟

(2) ادرس اتجاه تغير f على $[0;2]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) جد فواصل نقط تقاطع $\mathcal{C}_f$ مع محوري الإحداثيات.

(4) عين معادلة المماس (Δ) لـ $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

(5) أنشئ بعناية المماس (Δ) والمنحني $\mathcal{C}_f$

10 دالة معرفة على $[-8;8]$ ب: $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$

(1) عين العدد الحقيقيين a و b بحيث المنحني (C_f)

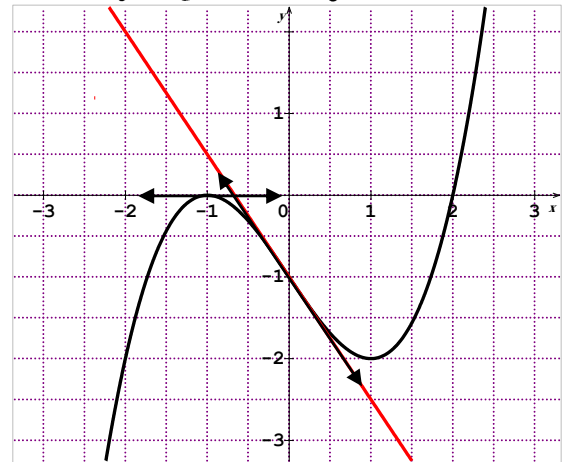
00 دالة معرفة على المجال $I = [-3, +3]$ بمجدول تغيراتها

x	-3	-2	-1	0	1	2	+3
$f'(x)$			0	-	-	0	
$f(x)$				0			

- أكمل الجدول السابق
- حل في I المعادلة $f(x) = 0$ استنتج إشارة $f(x)$ على I
- g دالة معرفة على I بـ: $g(x) = [f(x)]^2$
 - بين أن $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$
 - أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال I
 - عين القيم الحدية المحلية لـ g ثم جد حصرا للدالة g

- 08** دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + x^2 + \alpha x$
- عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون معامل توجيه المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة -1 هو -4
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f من أجل $\alpha = 5$
 - عين قيم α التي من أجلها تكون f متزايدة على $\mathbb{R}$.
- 03** 1) احسب نسبة التزايد عند العدد 1 للدالة f

- حيث $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ، ثم استنتج العدد الحقيقي $f'(1)$
- احسب $g'(1)$ علما أن نسبة تزايد الدالة g عند 1 هي: $\frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \frac{3h+2}{(h+1)^2}$
 - الشكل (1) هو منحنى دالة k بقراءة بيانية أوجد: $k(-1)$ ، $k'(-1)$ ثم $k(0)$ ، $k'(0)$
 - استنتج معادلتى المماسين لـ (C_k) عند النقطتين اللتين فاصلتهما $x = -1$ و $x = 0$ على الترتيب.



ج) أرسم المماس عند $A(-2; -2)$ علما أن $k'(-2) = \frac{9}{2}$

00 دالة معرفة على المجال $[-1; 3]$ بالعلاقة :

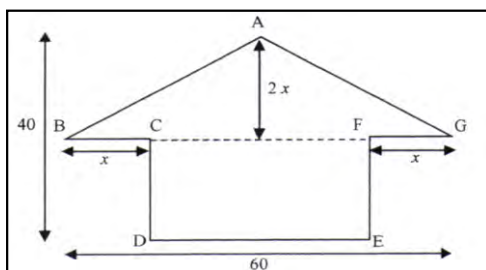
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f على المجال $[-1; 3]$
- أحسب $f'(0)$ ، $f(2)$ ، $f'(2)$ و $f(0)$
- أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- أكتب معادلة المماس المنحني (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1
- أرسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f)
- أدرس بيانيا الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) أعط تفسيرا هندسيا للنقطة $\omega(1; 0)$.

00 دالة معرفة على $[-2; 2] \cup [2; 8]$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$

- و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، و (D) مستقيم معادلته $y = x + 2$.
- الأعداد a ، b و c بحيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
 - عين وضعية (C_f) بالنسبة (D)
 - بين أن: $f'(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$

- ب) عين $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه f وشكل جدول تغيراتها
- 00** تريد إحدى المؤسسات صنع "رمز" لها له الشكل والأبعاد أدناه. وحدة الأطوال هي السنتيمتر cm. وقصد التقليل من التكاليف، نبحث عن قيمة x التي من أجلها مساحة الشكل أدناه أصغرا يمكن



- عبر بدلالة x عن كل من: *الطول CD والطول CF . *مساحة المستطيل $CDEF$ ومساحة المثلث ABG .
- بين أن مساحة الشكل هي: $f(x) = 4x^2 - 140x + 2400$
- أدرس اتجاه تغير f على $[0; 20]$ ثم شكل جدول تغيراتها
- أرسم التمثيل البياني للدالة f .
- استنتج مما سبق قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغرا ما يمكن. حدد هذه المساحة

الباب السادس

المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة

- وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- حساب نهاية متتالية عددية.

من بداية الأسبوع الأول من ديسمبر إلى نهاية الأسبوع الأول من يناير

المدة: 3 أسابيع
المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي 21 ساعة و تقني رياضي 18 ساعة

المتتاليات العددية

نشاط 01: النشاط رقم 05 الصفحة

A. تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي: مرتب شهري بـ 10000 DA في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـ 10% نسبي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى. نرسم بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

1. أحسب $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$.

2. عين علاقة بين u_n و u_{n+1} .

B. تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي: مرتب شهري بـ 10000 DA في الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ 1200 DA بعد كل سنة نسبي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى.

نرسم بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

1. أحسب $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$.

2. عين علاقة بين v_n و v_{n+1} .

3. يريد موظف أن يتعاقد مع إحدى الشركتين لمدة 7 سنوات. أي العقدين أكثر فائدة ؟

الجواب: A.

$$u_1 = 10000 \text{ DA}$$

$$u_2 = u_1 + 0,1u_1 = 1,1u_1 = 11000 \text{ DA}$$

$$u_3 = u_2 + 0,1u_2 = 1,1u_2 = (1,1)^2 u_1 = 12100 \text{ DA}$$

$$u_4 = u_3 + 0,1u_3 = 1,1u_3 = (1,1)^3 u_1 = 13310 \text{ DA}$$

$$u_5 = u_4 + 0,1u_4 = 1,1u_4 = (1,1)^4 u_1 = 14641 \text{ DA}$$

$$u_6 = u_5 + 0,1u_5 = 1,1u_5 = (1,1)^5 u_1 = 16105 \text{ DA}$$

$$u_7 = u_6 + 0,1u_6 = 1,1u_6 = (1,1)^6 u_1 = 17715,61 \text{ DA}$$

$$u_{n+1} = u_n + 0,1u_n = 1,1u_n = (1,1)^n u_1 \quad \text{ومنه:}$$

$$v_1 = 10000 \text{ DA}$$

$$v_2 = v_1 + 1200 = 11200 \text{ DA}$$

$$v_3 = v_2 + 1200 = 12400 \text{ DA}$$

$$v_4 = v_3 + 1200 = 13600 \text{ DA}$$

$$v_5 = v_4 + 1200 = 14800 \text{ DA}$$

$$v_6 = v_5 + 1200 = 16000 \text{ DA}$$

$$v_7 = v_6 + 1200 = 17200 \text{ DA}$$

$$v_{n+1} = v_n + 1200 \quad \text{ومنه:}$$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 94871,61 \text{ DA} \quad \text{لنجمع حدود كل متتالية:}$$

$$S' = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 95200 \text{ DA}$$

نلاحظ أن: $S' > S$ ومنه العقد الثاني أفضل من العقد الأول

التفسير الرياضي للظاهرة: العقد A يتناول متتالية هندسية أساسها 1,1 وحدها الأول u_1

العقد B يتناول متتالية حسابية أساسها 1200 وحدها الأول v_1

1. المتتاليات العددية.

$$(u_n): I \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

تعريف: متتالية عددية حقيقية (u_n) هي دالة معرفة كمايلي:

$$n \rightarrow u_n$$

ترميز: (u_n) هو رمز المتتالية ، n هو رمز الدليل ، u_n هو رمز الحد العام

نكتب مثلا : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ أو $(u_n)_{n \geq 1}$

$$(u_n): I \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u_n$$

إختصار الكتابة : بدلا من الكتابة

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث : $u_n = -5n^2 + 2$ معرفة على $\mathbb{N}$.

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ،

6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد $(b \in \mathbb{N}) u_b$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b - a + 1$.

2. طرق توليد متتالية عددية. (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

• **توليد متتالية عددية بالحد العام:**

مثال: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2 + 3$ معرفة بحددها العام. ويمكن حساب أي حد من الحدود .

$$u_2 = -1 , u_1 = 2 , u_0 = 3$$

الدالة المرفقة : يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f ونكتب $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto -x^2 + 3$.

• **توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:** **مثال:** نعتبر المتتالية (u_n) :

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$$

لدينا $u_0 = 5$ و منه $u_1 = 3u_0 + 4 = 19$ ، $u_2 = 3u_1 + 4 = 61$ ، نسمي العلاقة $u_{n+1} = 3u_n + 4$ بعلاقة تراجعية

3. التمثيل البياني لمتتالية عددية:

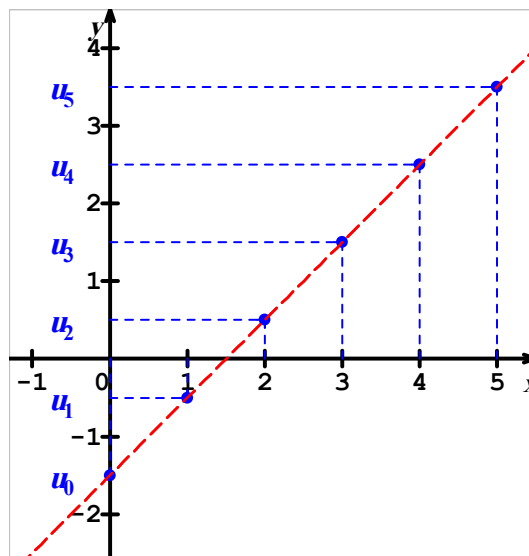
في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ التمثيل البياني لمتتالية (u_n) هو مجموعة النقاط $M_n(n; u_n)$

وبالتالي بما أنها معرفة على $\mathbb{N}$ فإن النقطة $M_{1,5}(1,5; u_{1,5})$ غير موجودة ومنه التمثيل عبارة عن غيمة نقط **nuages de points**

(أ) **حالة متتالية معرفة بحددها العام:** **مثال:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = n - 1,5$ ومنه:

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5

النقط: $M_5(5; 3,5)$ ، $M_4(4; 2,5)$ ، $M_2(2; 0,5)$ ، $M_1(1; -0,5)$ ، $M_0(0; -1,5)$



(ب) حالة متتالية معرفة علاقة ترجعية: مثال: $(u_n): \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

الخطوات:

1. نعتبر الدالة المرفقة إلى هذه المتتالية و معرفة كمايلي : $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{3x + 4}$

2. نرسم التمثيل البياني (C_f) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3. نرسم النصف الأول $(\Delta): y = x$

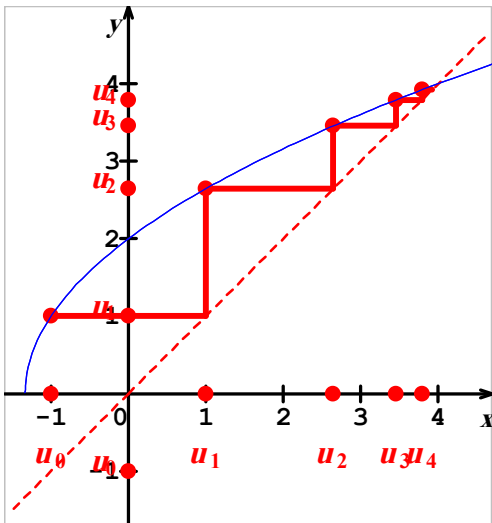
4. نعلم الحد الأول u_0 على حامل محور الفواصل

5. نستعمل البيان (C_f) لإنشاء $u_1 = f(u_0)$ على محور الترتيب

6. ننقل u_1 على محور الفواصل باستعمال المنصف الأول

7. نستعمل البيان (C_f) لإنشاء $u_2 = f(u_1)$ على محور الترتيب

8. ننقل u_2 على محور الفواصل باستعمال المنصف الأول وهكذا



4. اتجاه تغير متتالية عددية:

1. متتالية متزايدة: تكون متتالية (u_n) متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0

إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

2. متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0

إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

3. متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$.

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

4. متتالية رتيبة: المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ هي متتالية متزايدة على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة I من $\mathbb{N}$

5. طرق دراسة اتجاه تغير متتالية عددية:

(أ) دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = \frac{1}{n}$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى

2. أعطي تخميناً حول اتجاه تغيرها

3. برهن على صحة تخمينك

الجواب: $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}$ التخمين: يبدو أن المتتالية متناقصة تماماً

لنحسب الفرق: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ ومنه المتتالية متناقصة تماماً

(ب) المقارنة بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و العدد 1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ذات الحدود الموجبة تماماً

● إذا كان لكل $n \geq n_0$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة

● إذا كان لكل $n \geq n_0$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = \frac{2^n}{n}$ أدرس اتجاه تغيرها

الجواب: نلاحظ أن $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $\frac{2^n}{n} > 0$ إذن جميع الحدود موجبة تماما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

لنحسب :

لدينا $n \in \mathbb{N}^*$ ومنه $n \geq 1$ وبإضافة n على الطرفين ينتج : $2n \geq n+1$
و بقسمة الطرفين على $(n+1)$ ينتج لدينا : $\frac{2n}{n+1} \geq 1$ ومنه : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وعليه المتتالية متزايدة ابتداء من الحد الأول

(ج) استعمال اتجاه تغير الدالة المرفقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بدستور $f(n)$ يمكن الإعتماد على المبرهنة التالية

مبرهنة: لتكن متتالية (u_n) معرفة بالعلاقة $f(n)$ حيث f هي دالة معرفة على الأقل على $[a; +\infty[$ (أو $]a; +\infty[$) حيث $a \in \mathbb{R}^+$ و n_0 هو العدد الطبيعي الأول الأكبر من a
إذا كانت الدالة f رتيبة على $[a; +\infty[$ (أو $]a; +\infty[$) إذا المتتالية (u_n) رتيبة ابتداء من الرتبة n_0
ولها نفس اتجاه تغير الدالة f

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = \frac{1}{n}$ أدرس اتجاه تغيرها

الجواب: لتكن f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$ وهي الدالة مقلوب و هي متناقصة تماما على $[1; +\infty[$

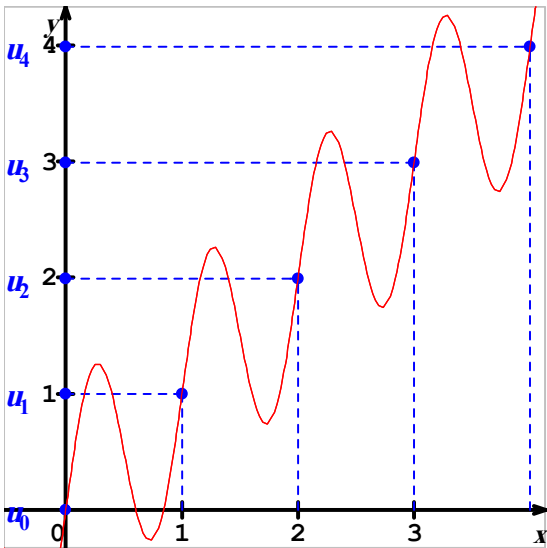
ومنه: المتتالية متناقصة تماما

ملاحظة هامة : عكس المبرهنة خاطئ

مثال مضاد: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = n + \sin(2\pi n)$

أدرس اتجاه تغيرها ثم ادرس اتجاه تغير الدالة المرفقة

الجواب: لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $\sin(2\pi n) = 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1 > 0$ وعليه المتتالية متزايدة تماما



ولكن الدالة $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ المعرفة على $[0; +\infty[$
لنرسم بيانها و نرى اتجاه تغيرها ونمثل في نفس الوقت المتتالية
نلاحظ أن الدالة ليست رتيبة بينما المتتالية متزايدة تماما

التمرين 01: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = 2n^2 + n - 3$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. عين الحد السابع
3. هل العدد 2015 حدا من حودها
4. أحسب u_{3n-1} ، $u_n + 1$ ، u_{n+1} ، u_{n-1}
5. حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $u_n = 207$

التمرين 02: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول والعلاقة التراجعية كمايلي: $(u_n): \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$

1. أحسب الحدود الأربعة لأولى
2. عبر عن $u_{n+1} - u_n$ بدلالة u_n
3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي: $v_n = u_n + 4$
- أحسب الحدود الأربعة لأولى من حدود المتتالية (v_n)
- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

التمرين 03: أدرس اتجاه تغير المتتاليات التالية : $u_n = \frac{1}{n+2}$ / $n \in \mathbb{N}$ ، $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$ / $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = n + \frac{1}{n} \quad / n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad k_n = 3^n \quad / n \in \mathbb{N} \quad , \quad w_n = n - n^2 \quad / n \in \mathbb{N}$$

التمرين 04: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = \frac{2n}{n^2}$

1. أحسب الحدود الأربعة لأولى
2. نريد أن نبرهن أن المتتالية متزايدة ابتداء من الرتبة $n = 3$

$$\bullet \text{ حل المتراجحة } \frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$$

$$\bullet \text{ بين أن } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

• استنتج مايمكن استنتاجه

التمرين 05: نعتبر المتتاليات التالية: $(u_n): \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$ ، $(v_n): \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{v_n + 1} \right) \end{cases}$ ، $(w_n): \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n + 3}{w_n + 4} \end{cases}$

لكل متتالية:

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. أرسم التمثيل البياني "**حلزوني**" في معالم مختلفة
3. أعطي تخميناً حول اتجاه تغير كل متتالية و ماذا يحدث لو أخذ العدد n قيماً كبيرة

التمرين 06: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها العام : $u_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. أدرس اتجاه تغيرها
3. بين أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$
4. استنتج قيمة المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_3 + \dots + u_n$

① المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n: u_{n+1} - u_n = r \text{ أي } u_{n+1} = u_n + r$$

نتيجة: $r < 0$ المتتالية متناقصة تماماً $r > 0$ المتتالية متزايدة تماماً $r = 0$ المتتالية ثابتة

مثال 01: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -5n + 4$

1. برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب أساسها وحدها الأول

2. استنتج اتجاه تغيرها

3. هل العدد 2012 - حدا من حدودها

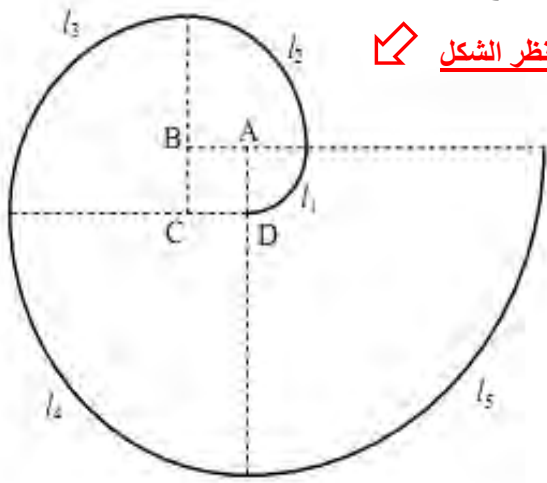
الجواب: 1. لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = [-5(n+1) + 4] - [-5n + 4] = -5$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $u_0 = 4$

2. $r < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$

3. $n = \frac{2016}{5} \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow -5n + 4 = -2012 \Leftrightarrow n = \frac{2016}{5}$ ليس حدا من حدودها

مثال 02: حلزونية الأقواس نعتبر المربع $ABCD$ طول ضلعه 1 و متتالية أرباع الدوائر



ذات المراكز $A, B, C, D, A, B, \dots$ وأنصاف أقطارها $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ **أنظر الشكل**

1. برهن أ، الأطوال $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ لأقواس الدوائر

هي متتالية حسابية يطلب أساسها

الجواب: **تذكير:** طول دائرة نصف قطرها r هو $2\pi r$

$$\text{إذن طول ربع دائرة نصف قطرها } n \text{ هو } l_n = \frac{1}{4} 2\pi n = \frac{\pi}{2} n$$

$$l_{n+1} - l_n = \frac{\pi}{2}(n+1) - \frac{\pi}{2}n = \frac{\pi}{2}$$

الأطوال $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ لأقواس الدوائر هي متتالية حسابية أساسها $r = \frac{\pi}{2}$

الحد العام لمتتالية حسابية:

$$1. \text{تبدأ } u_0: u_n = u_0 + nr \quad 2. \text{تبدأ } u_1: u_n = u_1 + (n-1)r \quad 3. \text{تبدأ } u_p: u_n = u_p + (n-p)r$$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

$$(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}) \times \frac{\text{عدد الحدود}}{2} = \text{المجموع} , 1 + (\text{الدليل الأول} - \text{الدليل الأخير}) = \text{عدد الحدود}$$

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$$

مثال 01: أحسب المجاميع التالية

$$S_2 = u_2 + \dots + u_{45}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S = u_p + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

الجواب:

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{31}{2} [u_0 + u_{30}]$$

$$S_2 = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{45} = \frac{44}{2} [u_2 + u_{45}]$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2} [u_0 + u_n]$$

$$S = u_p + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2} [u_p + u_n]$$

تمرين 01: نعتبر المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ذات الأساس 3 و علما بأن $u_{11} = 21$

1. أوجد حدها الأول

2. أكتب عبارة u_n بدلالة n

3. أحسب المجاميع التالية :

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ بدلالة } n$$

الجواب:

$$1. u_0 = u_{11} + (0 - 11)r \Leftrightarrow u_0 = 21 - 11 \times 3 = -12$$

$$2. u_n = u_0 + nr = -12 + 3n$$

$$3. S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{31}{2} [u_0 + u_{30}] = \frac{31}{2} [-12 + 78] = 1023$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2} [u_0 + u_n] = \frac{n+1}{2} [-12 + 3n]$$

تمرين 02: نعتبر المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ والمعرفة بـ: $u_{11} = 27$ و $u_{17} = 39$

1. عين أساسها و حدها الأول

2. أكتب عبارة u_n بدلالة n

3. أحسب المجموع بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

الجواب:

$$1. \begin{cases} u_{17} = 39 \\ u_{11} = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 17r = 39 \\ u_0 + 11r = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r = 12 \\ u_0 = 27 - 11r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

$$2. u_n = u_0 + nr = 5 + 2n$$

$$3. S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2} [u_0 + u_n] = \frac{n+1}{2} [10 + 2n] = (n+1)(5+n)$$

الوسط الحسابي: كل ثلاث حدود متتابعة a, b, c من متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$

لأن: $a + c = (b - r) + (b + r) = 2b$

مثال: عين ثلاث حدود متتابعة a, b, c من متتالية حسابية علما بأن مجموعهم 12 و جدواهم 28

$$\begin{cases} b = 4 \\ 16 - r^2 = 7 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b = 4 \\ (4-r)4(4-r) = 28 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b - r + b + b + r = 12 \\ (b-r)b(b-r) = 28 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a + b + c = 12 \\ a \times b \times c = 28 \end{cases}$$

الجواب:

$$\text{إذن } r = 3 \text{ أو } r = -3 \text{ وبالتالي: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = 7 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا

كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ أو $u_{n+1} = qu_n$ بفرض الحدود غير معدومة

نتيجة: $0 < q < 1$ المتتالية متناقصة تماما $q > 1$ المتتالية متزايدة تماما $q = 1$ المتتالية ثابتة

ملاحظة: لما $q < 0$ المتتالية ليست رتيبة **مثال:** متتالية هندسية $q = -2$ $1 ; -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; \dots$

الحد العام لمتتالية هندسية:

1. **تبدأ بـ u_0 :** $u_n = u_0 q^n$ 2. **تبدأ بـ u_1 :** $u_n = u_1 q^{(n-1)}$ 3. **تبدأ بـ u_p :** $u_n = u_p q^{(n-p)}$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

(عند الحدود) **الأساس (1-)** $\times$ **الحد الأول = المجموع** ، **1+ (الدليل الأول - الدليل الأخير) = عدد الحدود**
مع $q \neq 1$ و إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$.

مثال: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ مع $q \neq 1$

تمرين 01: 1. $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ هو حد عام لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ لأن $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3}$

2. $u_n = (-5)^{n+1}$ هو حد عام لمتتالية هندسية أساسها $q = -5$ لأن $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-5)^{n+2}}{(-5)^{n+1}} = -5$

تمرين 02: نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ذات الأساس 2 و علما بأن $u_9 = 64$

1. أوجد حدها الأول

2. أكتب عبارة u_n بدلالة n

3. أحسب المجاميع التالية : $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n

الجواب: 1. $u_0 = u_9 q^{0-9} = 64 \times 2^{-9} = \frac{64}{2^9} = \frac{64}{8 \times 68} = \frac{1}{8}$

2. $u_n = \frac{2^n}{8} = 2^{n-3}$

3. $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{1}{8} \left[\frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} \right] = \frac{1}{8} [2^{30} - 1]$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{8} \left[\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right] = \frac{1}{8} [2^{n+1} - 1]$

الوسط الهندسي: كل ثلاث حدود متتابعة a, b, c من متتالية هندسية فإن: $a \times c = b^2$ لأن: $a \times c = \left(\frac{b}{q}\right) \times (b \times q) = b^2$

ملاحظة هامة:

كل حد عام من الشكل $u_n = an + b$ مع $a \neq 0$ هو حد عام لمتتالية حسابية أساسها $r = a$

كل حد عام من الشكل $u_n = ab^n$ مع $b \neq 0$ هو حد عام لمتتالية حسابية أساسها $q = b$

للم تقارب متتالية عددية:
نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.
المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)
في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
تعريف: (u_n) متتالية عددية .

القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مفتوح $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ و α عدد حقيقي
⊗ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
⊗ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة

نتيجة:

حالة متتالية حسابية:

1. إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
2. إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
في كلتا الحالتين تكون المتتالية (u_n) متباعدة

حالة متتالية هندسية:

⊗ إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
⊗ إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
⊗ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
⊗ إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)

مثال 01: 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}$ إذن: المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$ هي متتالية متقاربة

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n+5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}n \right) = +\infty$ إذن: المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{3n^2+1}{2n+5}$ هي متتالية متباعدة

مثال 02: (u_n) و (v_n) متتاليتان عديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$ ، $v_n = u_n + 3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .
- عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (s_n) و (t_n) .
- مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى من المتتالية (u_n) .

الجواب: 1. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها

$$q = \frac{1}{3} \text{ و حدها الأول } v_0 = 5 \text{ ومنه حدها العام يكتب على الشكل: } v_n = v_0 q^n = 5 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

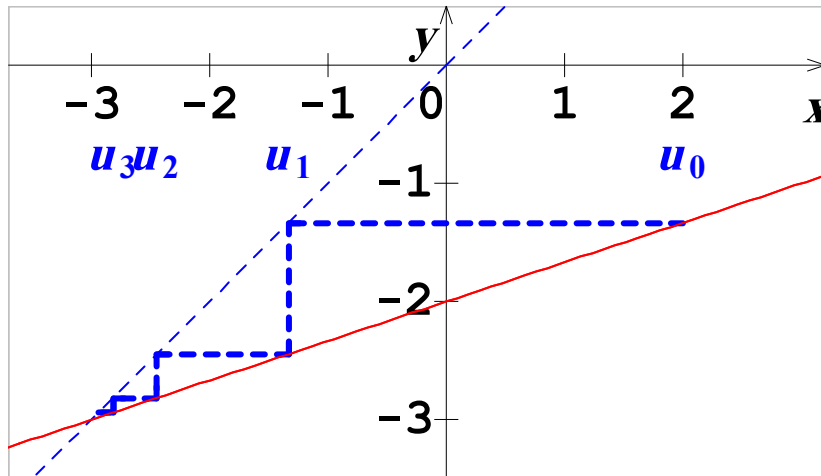
$$s_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{\text{متتالية هندسية}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$$

حساب المجاميع:

$$t_n = \frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) - 3(n+1) \text{ و منه } u_n = v_n - 3 \text{ إذن } t_n = s_n - 3(n+1) \text{ لدينا } v_n = u_n + 3$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \text{ متتالية متقاربة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) - 3(n+1) \right] = -\infty \text{ وكذلك } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) = \frac{15}{2}$$



التمرين 01:

① u_1 هو الحد الأول ، u_n هو الحد العام ، r هو أساس المتتالية و S_n هو مجموع n حدا أولى من متتالية حسابية أحسب:

1. u_n و S_n علما أن : $u_1 = 7$ و $n = 120$ و $r = 5$

2. u_1 و S_n علما أن : $u_n = 326$ و $n = 72$ و $r = 2$

3. r و S_n علما أن : $u_1 = 397$ و $u_n = 64$ و $n = 1000$

4. u_n و n علما أن : $u_1 = 50$ و $r = -4$ و $S_n = 330$

5. r و n علما أن : $u_1 = -3$ و $u_n = 6$ و $S_n = 28,5$

6. u_n و u_1 علما أن : $S_n = 270$ و $n = 54$ و $r = 4$

② u_1 هو الحد الأول ، u_n هو الحد العام ، q هو أساس المتتالية و S_n هو مجموع n حدا أولى من متتالية هندسية أحسب:

1. u_n و S_n علما أن : $u_1 = 2$ و $n = 5$ و $q = 3$

2. q و S_n علما أن : $u_1 = 162$ و $u_n = 32$ و $n = 5$

3. u_1 و S_n علما أن : $u_n = 54$ و $q = 3$ و $n = 4$

4. u_n و u_1 علما أن : $n = 7$ و $q = 0,5$ و $S_n = 571,5$

5. q و n علما أن : $u_1 = 48$ و $u_n = 243$ و $S_n = 633$

التمرين 02:

① نعتبر المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي $u_n = 3n - 5$ و $v_n = -7n + 2$

1. أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2. بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) حسابيتين يطلب تعيين أساسيهما و حديهما الأولين

3. أحسب بدلالة n المجاميع التالية: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي:

$$(v_n): \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + 3. / n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3

2. مثل الحدود السابقة في معلم متعامد و متجانس

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 4$ برهن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول

4. عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$ ماذا تستنتج

5. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

6. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S'_n$

التمرين 03: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{15} = 65$ و $u_{24} = 101$

1. عين أساسها و حدها الأول

2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

4. عين n إن وجدت حتى يكون $S_n = 102$

التمرين 04: (v_n) متتالية هندسية أساسها موجب معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_3 = 24$ و $u_5 = 96$

1. عين أساسها و حدها الأول

2. عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

① لتكن a, b, c, d و e خمسة حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r حيث:

$$\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$$

1. عبر عن a, b, d و e بدلالة c و r

2. عين الحدود a, b, c, d و e

- ② 1. عين الحدود المتتابعة v_0, v_1, v_2, v_3 من متتالية حسابية علما بأن مجموعهم 16 و جداولهم 105
2. عين الحدود المتتابعة v_1, v_2, v_3 من متتالية هندسية علما بأن مجموعهم 777 و جداولهم 343000

التمرين 06: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q > 1$ معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$$

1. عين u_1, u_2, u_3

2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 07: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي:

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = \frac{10}{3} \\ 9u_n + 3u_{n-1} = 4 / n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب الحدود u_1, u_2, u_3

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + \frac{1}{3}$ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول

3. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$ ماذا تستنتج

4. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

5. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S'_n$

التمرين 08: ليكن a, b عدنان حقيقيان بحيث:

1. $(a; a + 4b; 5a + 2b)$ حدود متتابعة من متتالية حسابية

2. $(b + 3; a + 1; 6a + b)$ حدود متتابعة من متتالية هندسية

عين العددين a, b

التمرين 09: ① (u_n) متتالية حسابية متزايدة بحيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 63 \end{cases}$$

1. عين أساسها r و حدها الأول u_0

2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $v_n = 2^{u_n}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها q و حدها الأول v_0

2. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

3. أحسب بدلالة n الجداء $P = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

التمرين 10: نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي:

$$(v_n): \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 5. / n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب الحدود v_3, v_2, v_1
 2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \alpha v_n - 10$ حيث α عدد حقيقي
 - عين قيمة α تكون (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
 - عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ماذا تستنتج
 - أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n
- التمرين 11:** نعتبر المتتاليتان (v_n) و (u_n) المعرفة كمايلي:
- $$v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2} \text{ و } u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$$

- نضع : $d_n = u_n - v_n$ و $w_n = u_n + v_n$
1. برهن أن: (d_n) متتالية حسابية يطلب أساسها و حدها الأول
 2. برهن أن: (w_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
 3. استنتج $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- التمرين 12:** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي:
- $$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} / n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب الحدين u_2, u_1
2. هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية؟
3. مثل الحدود السابقة في معلم متعامد و متجانس وماهو تخمينك حول اتجاه تغيرها
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$ بحيث $u_n \neq 0$

- أحسب الحدود v_2, v_1, v_0
 - عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج أن (v_n) متتالية حسابية يطلب أساسها
 - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ماذا تستنتج
 - أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
- التمرين 13:** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي:
- $$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 / n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

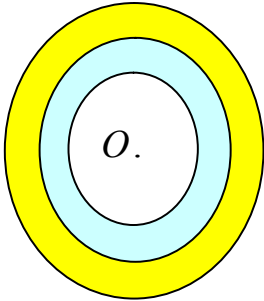
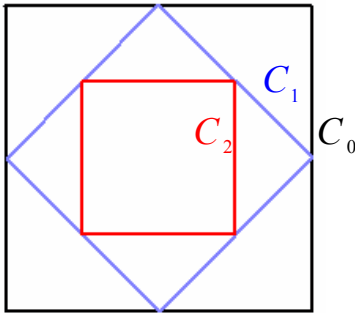
1. أحسب الحدين u_2, u_1
2. نعتبر المتتالية (v_n) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2n + 6$
- أحسب الحدود v_2, v_1, v_0
- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها
- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ماذا تستنتج
- أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

التمرين 14:

- عند اختراق شعاع الضوء من مصباح لقطعة زجاج ملونة يفقد 23% من تواتره
1. نسمي I_0 تواتر الشعاع قبل دخول الزجاج و I_1 تواتر الشعاع عند الخروج من الزجاج عبر عن I_1 بدلالة I_0
 2. نفرض n قطعة زجاج متقايسة و I_n تواتر الشعاع عند الخروج من الزجاج رقم n
 - عبر عن I_n بدلالة I_{n-1}
 - ما طبيعة المتتالية (I_n) ثم أعطي عبارة I_n بدلالة I_0 و n
 - ماهو اتجاه تغير المتتالية (I_n)
 3. ماهو التواتر الأولي للشعاع إذا علمت أنه اخترق أربعة قطع زجاج و تحصلنا على تواتر يساوي 15
 4. ماهو العدد الأدنى لقطع الزجاج حتى يكون التواتر الخارج أقل من ربع التواتر الداخل

التمرين 15: من مربع إلى مربع:

1. أحسب طول قطر مربع طول ضلعه a في البداية لدينا مربع C_0 طول ضلعه $u_0 = 1cm$
2. نوصل بين منتصفات أضلاعه لنحصل على مربع C_1 طول ضلعه هو u_1 أحسب u_1
3. نوصل بين منتصفات أضلاع C_1 لنحصل على مربع C_2 طول ضلعه هو u_2 أحسب u_2 **أنظر الشكل**
4. عبر عن u_3 بدلالة u_2 ثم عن u_6 بدلالة u_5
5. نعتبر المربعين C_n و C_{n+1} طول ضلعيهما u_n و u_{n+1} على الترتيب عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n
6. عبر عن u_6 بدلالة u_0 ثم استنتج u_n بدلالة u_0
7. أحسب مجموع 5 حدود أولى



التمرين 16:

- نعتبر الدوائر (c_1) ، (c_2) ، ذات نفس المركز O وأنصاف أقطارها 1 ، 2 ، n
- نسمي A_1 مساحة الحلقة المحصورة بين (c_1) و (c_2)
- نسمي A_2 مساحة الحلقة المحصورة بين (c_2) و (c_3)
- وهكذا نسمي A_n مساحة الحلقة المحصورة بين (c_n) و (c_{n+1})

نضع: $d_n = A_{n+1} - A_n$

1. أحسب: d_1 ، d_2 ، d_3
2. بين أن لكل $n \geq 1$ فإن: d_n مستقل عن n
3. استنتج طبيعة المتتالية $(A_n)_{n \geq 1}$ محددا عناصرها

التمرين 17:

1. أحسب المجاميع التالية: $S_0 = 1+2+3+...+100$

$$S_1 = 3+5+7+...+199$$

$$S_2 = -1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + 3 + \frac{16}{3} + ... + 99$$

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 7} + ... + \frac{1}{99 \times 101}$$

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \text{والممتتالية } (u_n) \text{ بحيث لكل عدد طبيعي } n$$

$$\bullet \text{ عين العدد الحقيقي } a \text{ بحيث: } u_n = \frac{a}{2n+1} - \frac{a}{2n+3}$$

$$\bullet \text{ استنتج قيمة المجموع } S$$



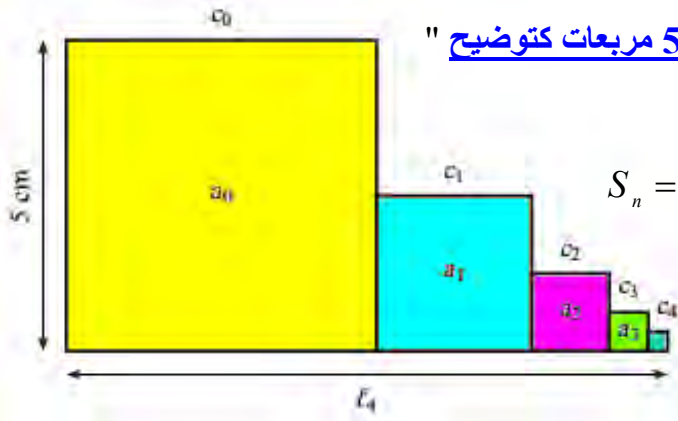
التمرين 18: قمنا بتنظيم مجموعة من الأنابيب على الشكل التالي:

1. ماهو عدد الأنابيب لو كان تنظيمهم في 5 طبقات ثم في 12 طبقة
2. نريد تنظيم 153 أنبوب كم طبقة نحصل عليها
3. لتنظيم 200 أنبوب كم طبقة نحصل عليها و ماهو عدد الأنابيب الباقية لدينا

👉👉👉 تطبيقات للتعمق 👉👉👉

التمرين 19: نريد حساب المجموع التالي: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$

1. باستعمال مجلد Excel أعطي قيمة S
2. نعتبر كثير الحدود P من الدرجة الثالثة حيث: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- عين المعاملات: d, c, b, a بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n+1) - P(n) = n^2$
- استنتج أن: $S = P(101) - P(0)$
- تحقق من نتيجة السؤال الأول



التمرين 20: لدينا n مربع مرسومة كما في الشكل التالي "رسمنا 5 مربعات كتوضيح"

- المربع الأول طول ضلعه $c_0 = 5 \text{ cm}$ ومساحته a_0
و كل مربع يلي طول ضلعه نصف طول ضلع الذي قبله
- نضع $S_n = a_0 + a_1 + a_3 + \dots + a_n$ و $L_n = c_0 + c_1 + c_3 + \dots + c_n$
1. أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتالتين (S_n) و (L_n)
 2. أ) عبر عن S_n و L_n بدلالة n
ب) هل يوجد عدد p بحيث $L_p \geq 10$

التمرين 21: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_n = 8 - \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{a}{2^n}$ مع $a \in \mathbb{R}$

1. بين أن $u_0 = a$
2. أعطي قيمة تقريبية للحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية من أجل $a = 2$ ، $a = 4$ ، ثم $a = 8$
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{8-a}{2^{n+1}}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) (و ذلك حسب قيم a)

قال عماد الأصفهاني:

رأيت انه لا يكتب إنسان كتابا في يومه إلا قال في غده لو غير هذا
لكان أحسن ولو زيد كذا لكان يستحسن ولو قدم هذا لكان أفضل
ولو ترك هذا لكان أجمل وهذا من أعظم العبر وهو دليل على استيلاء
النقص على جملة البشر..

وأخيراً بعد أن تقدمنا باليسير في هذا المجال الواسع
آملين أن ينال القبول ويلقى الاستحسان..
من إخواني الأساتذة و أخواتي الأستاذات
وصل اللهم وسلم على سيدنا وحبينا محمد وعلى آله وصحبه
وسلم....

أخوكم في الله الأستاذ : باي زواوي
أطلب منكم دعاءا في ظهر الغيب