

الفرض المحروس رقم – 01 – للفصل الأول في مادة الرياضيات

المدة: ساعة ونصف

القسم: 02 علمي

التمرين الأول:

نعتبر كثير الحدود P المعروف من أجل كل عدد حقيقي x كما يلي : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

1. أحسب $P(-2)$ ، ماذا تستنتج ؟
2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $P(x) = (x+2)Q(x)$. حيث $Q(x)$ كثير حدود يُطلب تعيينه.
ب) استنتج تحليلاً لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى.
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x) \geq 0$.

التمرين الثاني:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 3x + 1$ وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right) \geq 0$ ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة f .
3. أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين : $\left[-\infty; \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
4. إشرح كيف يمكن استنتاج $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f انطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع" $(k(x) = x^2)$ ، ثم أرسم $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_k)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
5. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{3}{2}$ محور تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
6. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = |f(x)|$.
I أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .
II استنتج اتجاه تغير الدالة g .
III باستعمال الفرع "I" حدد كيف يتم رسم $(\mathcal{C}_g)$ ثم أرسمه .
7. نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(|x|)$.
• أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب : $h(x) = f(x)$.
• أثبت أن الدالة h دالة زوجية .
• أرسم $(\mathcal{C}_h)$ منحنى الدالة h باستعمال $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f .

بالتوفيق

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول مادة الرياضيات

(ب) استنتاج تحليل لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى:

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

لدينا $P(x) = (x+2)Q(x)$
نحل المعادلة $Q(x) = 0$

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0$$

إذن :

$$Q(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

ومنه

$$P(x) = 2(x+2)(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

(1 pt)

(1.5 pt)

3 حل المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$Q(x)$	+	+	0	-	-
$P(x)$	-	0	+	0	+

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$

التمرين (1)

لدينا : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1 حساب $P(-2)$:

$$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6$$

$$= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0 \quad (0.5 \text{ pt})$$

(0.5 pt)

ومنه $P(-2) = 0$

2

1) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x) = (x+2)Q(x)$
بما أن $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذر له فإنه يكتب على

(0.5 pt)

الشكل : $P(x) = (x+2)Q(x)$

تعيين $Q(x)$:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 : x+2 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \\ -5x^2 - 13x \\ \underline{5x^2 + 10x} \\ -3x - 6 \\ \underline{3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

(1 pt)

ومنه : $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

التمرين (2)

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 1$$

1 نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} &= x^2 + \frac{9}{4} - 3x - \frac{5}{4} \quad (1 \text{ pt}) \\ &= x^2 - 3x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

2 نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) - f(\frac{3}{2}) \geq 0$, لدينا : $f(\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0 &\Rightarrow \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}}_{f(x)} \geq 0 \\ f(x) - \left(-\frac{5}{4}\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

(1 pt)

$$f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right) \geq 0 \quad \text{ومنه}$$

(0.5 pt)

$f(x) \geq f(\frac{3}{2})$ معناه أن $f(\frac{3}{2})$ قيمة حدية صغرى للدالة f

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f : $x \xrightarrow{U} x - \frac{3}{2} \xrightarrow{V} (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$ تفكك الدالة f إلى دالتين U و V بحيث : $f = V \circ U$

• لما $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$ فإن :

$$\begin{cases} U(x) = x - \frac{3}{2} & D_U =]-\infty; \frac{3}{2}] \\ V(x) = x^2 - \frac{5}{4} & D_V =]-\infty; 0] \end{cases}$$

U متزايدة تماماً على $]-\infty; \frac{3}{2}]$ ، V متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$

(1 pt)

ومنه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$

• لما $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$ فإن :

$$\begin{cases} U(x) = x - \frac{3}{2} & D_U = [\frac{3}{2}; +\infty[\\ V(x) = x^2 - \frac{5}{4} & D_V = [0; +\infty[\end{cases}$$

U متزايدة تماماً على $[\frac{3}{2}; +\infty[$ ، V متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$

(1 pt)

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\frac{3}{2}; +\infty[$

(0.5 pt)

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			

4 يمكن رسم $(\mathcal{C}_f)$ انطلاقاً من $(\mathcal{C}_K)$ بواسطة انسحاب شعاعه :

(1 pt)

$$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}$$

5 نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{3}{2}$ هو محور تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$:

$$Y = X^2 \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} + X \\ y = -\frac{5}{4} + Y \end{cases} \quad \text{إذن : } Y - \frac{5}{4} = \left(\frac{3}{2} + X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

(1 pt)

دالة زوجية تقبل محور تناظر

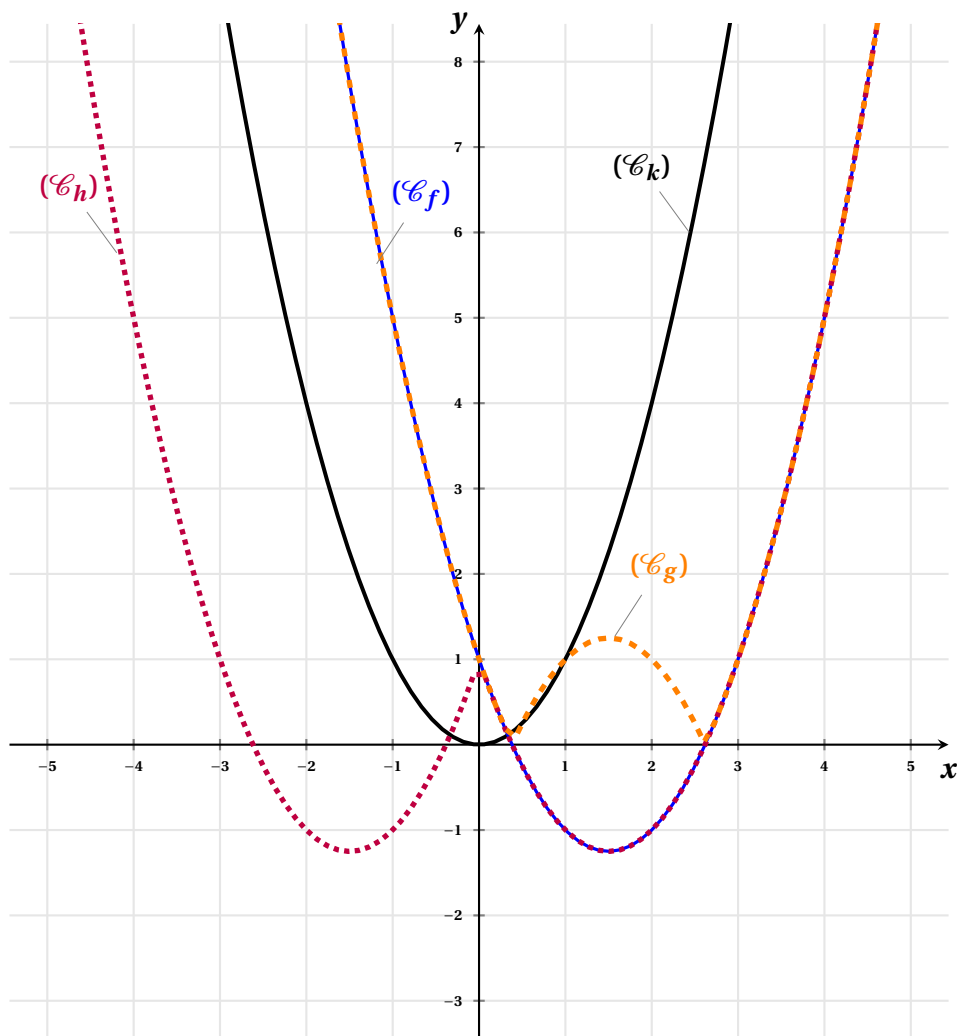
6

• كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

لدينا : $g(x) = |f(x)|$ ومنه

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

(1 pt)



• استنتاج اتجاه تغير الدالة g : لما $f(x) \geq 0$ يكون للدالتين f و g نفس اتجاه التغير ، أما إذا كان $f(x) \leq 0$ فإن الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير (1 pt)

• يتم رسم $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقاً من $(\mathcal{C}_f)$ كما يلي : (1 pt)

• لما $f(x) \geq 0$ فإن $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_f)$ متطابقان.
• لما $f(x) \leq 0$ نرسم نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل فتحصل على $(\mathcal{C}_g)$

• اثبات أنه من أجل كل $x \geq 0$: $h(x) = f(x)$: بما أن $x \geq 0$ فإن $|x| = x$ أي $h(x) = f(|x|)$ (1 pt)

$$h(x) = f(x)$$

• اثبات أن الدالة h زوجية :

• متناظر ، نثبت أن $h(-x) = h(x)$ (0.5 pt)

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

• يتم رسم $(\mathcal{C}_h)$ باستعمال $(\mathcal{C}_f)$ كالآتي :

• إذا كان $x \geq 0$ فإن $(\mathcal{C}_h)$ و $(\mathcal{C}_f)$ متطابقان.
• إذا كان $x \leq 0$ نرسم نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الترتيب . (1 pt)

• التمثيل البياني للدوال السابقة : (2 pt)

