



المستوى الثانية ثانوي شعبة رياضيات

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

2سا

التمرين الأول:الجزء الأول:حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2}$ • نعتبر العبارة : $A(x) = 2\cos^2(x) + 5\sin(x)\cos(x) - 3\sin^2(x)$

1- بين أن $\frac{1}{2}[5\cos(2x) - 1] = 2\cos^2(x) - 3\sin^2(x)$

2- استنتج أن $A(x) = \frac{1}{2}[5\cos(2x) + 5\sin(2x) - 1]$

3- بين أن $A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

4- استنتج حلا للمعادلة $2A(x) + 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ في المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

الجزء الثاني:1- أنشئ النقط A, B, C, D و E حيث:أ- المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين حيث $AB = 5cm$ و $\frac{\pi}{2}$ قياس للزاوية $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ب- المثلث ADB متقايس الأضلاع حيث $\frac{\pi}{3}$ قياس للزاوية $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$ ج- $BE = BA$ و $-\frac{2\pi}{3}$ قياس للزاوية $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE})$ 2- بين أن النقط B, D و E على استقامية ثم عين القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE})$ التمرين الثاني:(I 1) ليكن α عدد حقيقي معطى، نعتبر f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

أثبت أن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

(2) استنتج: $\lim_{x \rightarrow y} \frac{yx^{2025} - xy^{2025}}{y - x}$

(II) أدرس النهايتين التاليتين: (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$

التمرين الثالث:

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1- أدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

3- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) (الوحدة 4 cm)

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2- تحقق أن $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ ثم احسب نهاية الدالة f عند -1 . ماذا تستنتج ؟

3- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ حيث f' هي مشتقة الدالة f

4- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

5- عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

6- جد حصرا للعدد $f(\alpha)$ ، ثم أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

7- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m^2 + 1$ حلا وحيدا سالبا

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

الجزء الأول:

حلول المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2}$ هي $S = \left\{-\frac{\pi}{24} + k\pi; \frac{7\pi}{24} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

• نعتبر العبارة : $A(x) = 2\cos^2(x) + 5\sin(x)\cos(x) - 3\sin^2(x)$

$$1- \text{ لدينا } \frac{1}{2}[5\cos(2x) - 1] = \frac{1}{2}[5\cos^2x - 5\sin^2x - \sin^2x - \cos^2x]$$

$$= \frac{1}{2}[4\cos^2x - 6\sin^2x]$$

$$= 2\cos^2x - 3\sin^2x$$

$$2- \text{ لدينا } A(x) = 2\cos^2(x) + 5\sin(x)\cos(x) - 3\sin^2(x) \text{ ومنه:}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}[5\cos(2x) - 1] + \frac{5}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}[5\cos(2x) + 5\sin(2x) - 1]$$

$$3- \text{ نبين أن } A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{باستعمال دساتير الجمع : } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(2x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

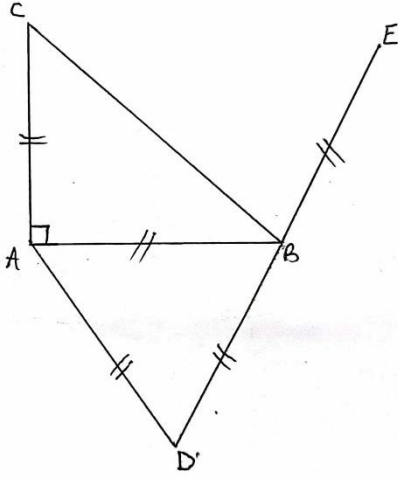
$$\text{و بالتعويض نجد : } A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$4- \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2A(x) + 1 \text{ تكافئ } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ حلولها في المجال } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ هي :}$$

$$S = \left\{\frac{7\pi}{24}\right\}$$

الجزء الثاني:

$$1- \text{ إنشاء النقط } A, B, C, D \text{ و } E :$$



2- إثبات استقامية النقط B ، D و E :

حسب علاقة شال: $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE})$

ومنه $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{2\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$

ومنه $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}) = -\pi$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ مرتبطين خطيا ومنه النقط B ، D و E على استقامية

تعيين القيس الرئيسي لقيس الزاوية $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE})$:

حسب علاقة شال لدينا $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = -\pi$

ومنه $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{5\pi}{12}$

التمرين الثاني :

(I) 1) ليكن α عدد حقيقي معطى، نعتبر f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إثبات أن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(\alpha) - x f(\alpha) + \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha(f(x) - f(\alpha)) - f(\alpha)(x - \alpha)}{x - \alpha}$

$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \alpha \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \frac{x - \alpha}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

(2) استنتاج: $\lim_{x \rightarrow y} \frac{yx^{2025} - xy^{2025}}{y - x}$

بوضع $f(x) = x^{2025}$ نجد $\lim_{x \rightarrow y} \frac{yx^{2025} - xy^{2025}}{y - x} = -2024y^{2025}$

(II) دراسة النهايتين التاليتين: (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27} = -\frac{1}{28}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27} = 0$ (إزالة ح ع ت باستعمال المرافق)

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

1- دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1) : x \in \mathbb{R} \text{ من أجل كل}$$

الدالة g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; 1]$

2- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ فهي رتيبة تماما على المجال $[1; 2]$ ولدينا $g(1) \times g(2) < 0$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

3- استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

على المجال $]-\infty; \alpha[$ لدينا $g(x) < 0$

على المجال $]\alpha; +\infty[$ لدينا $g(x) > 0$

$$\text{و } g(\alpha) = 0$$

الجزء الثاني:

1- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = 0$

2- بالنشر والتبسيط نجد $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي

$$\text{معادلته } x = -1$$

3- من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

4- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $(x^3 + 1)^2 > 0$ ومنه:

f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; -1]$ و $]-1; \alpha]$
جدول تغيرات الدالة f

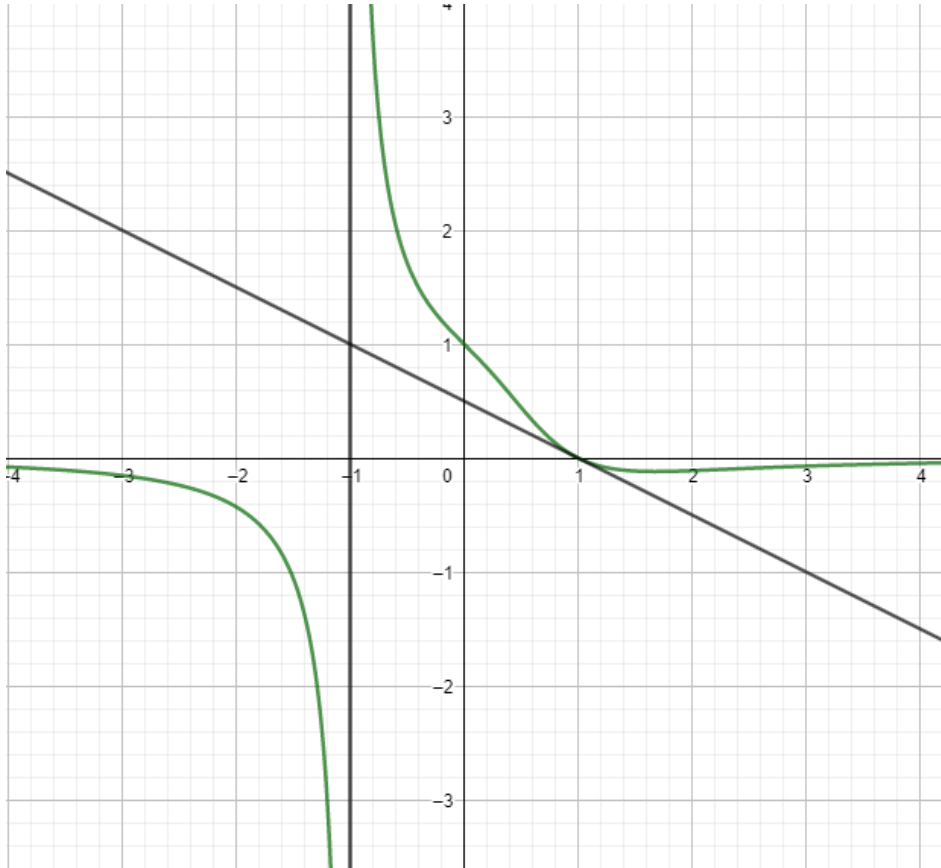
(5) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند الفاصلة 1:

$$(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(6) $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha^3+1}$ علما أن $1 < \alpha < 2$ نجد $-1 < f(\alpha) < 0$

نضع $f(\alpha) \approx -0,25$

إنشاء المنحنى (C_f) والمماس (Δ) بوحدة طول 4cm:



7- من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = m^2 + 1$ تقبل حلا وحيدا سالبا