

تمارين حول الدوال اللوغاريتمية - الجزء 2-

فهرس التمارين

- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية: 3
- التمرين 1: 3
- التمرين 2: 3
- التمرين 3: 3
- إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 4
- التمرين 4: 4
- التمرين 5: 4
- التمرين 6: 4
- التمرين 7: 4
- التمرين 8: 5
- تحديد نهاية دالة لوغاريتمية: 5
- التمرين 9: 5
- التمرين 10: 5
- التمرين 11: 5
- تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 6
- التمرين 12: 6
- التمرين 13: 6
- التمرين 14: 6
- تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية: 6
- التمرين 15: 6
- تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 7
- التمرين 16: 7
- التمرين 17: 7
- دراسة دالة لوغاريتمية: 7
- التمرين 18: 7
- التمرين 19: 7

7	التمرين 20:
8	التمرين 21:
8	التمرين 22:
8	دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لو غاريتمية:
8	التمرين 23:
8	التمرين 24:
8	التمرين 25:
9	التمرين 26:

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية:

التمرين 1:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$	2) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
3) $f(x) = \ln(e^x - 2)$	4) $f(x) = \ln(4 - 3x)$
5) $f(x) = \ln(\sqrt{x-1})$	6) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
7) $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4)$	8) $f(x) = \ln(-2x)$
9) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$	10) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

التمرين 2:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = \ln(5x^3 + 4x^2 - 2x - 1)$	2) $f(x) = \ln(8x + 5)$
3) $f(x) = \ln(8x^2 + x - 1)$	4) $f(x) = -\frac{1}{3}\ln(8x + 5) + 7\ln(x + 5)$
5) $f(x) = \ln(6x^3 - 3x^2 - 5x + 4)$	6) $f(x) = -4\ln(7x + 6)$
7) $f(x) = -\ln x + 3\ln(4x + 3)$	8) $f(x) = 8\ln(3 - 5x)$
9) $f(x) = \ln(1 + x^2)$	10) $f(x) = \ln(2x - x^2)$

التمرين 3:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = \ln(2x - 5)$	2) $f(x) = \ln(-3x + 1)$
3) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$	4) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
5) $f(x) = \ln(\ln x)$	6) $f(x) = \ln x^2$
7) $f(x) = (\ln x)^2$	8) $f(x) = \ln 1 - x^2 $
9) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$	

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 4:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = x^3 \ln x$	2) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$	3) $f(x) = 2\sqrt{\ln x}$
4) $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$	5) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2}$	6) $f(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$
7) $f(x) = (x+1)(\ln \sqrt{x+1})$	8) $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x}$	9) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

التمرين 5:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = -3x + 5 - \ln x$	2) $f(x) = (5x^2 - x + 2) \ln x$
3) $f(x) = 4 \ln(x+3) + 3x + 3$	4) $f(x) = 4x^2 + 2x + 2 \ln x$
5) $f(x) = 3 \ln x + 5x - 9$	6) $f(x) = (x^5 - 3x^2 + 1) \ln x$
7) $f(x) = 3 \ln x + 158x^3 - 24x + 5\sqrt{x}$	8) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x + 2}$

التمرين 6:

أوجد مشتقة الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

1) $f(x) = x + 2 \ln x$	2) $f(x) = 3 + x \ln x$
3) $f(x) = (x-1) \ln x$	4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
5) $f(x) = 2x(\ln x + 1)^2$	6) $f(x) = (3x+1)(\ln x)^3$

التمرين 7:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = 2x + 1 + \ln x$	2) $f(x) = x \ln x - x$
3) $f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1}$	4) $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$
5) $f(x) = e^x \ln x$	6) $f(x) = (-4x - 5) \ln x$

التمرين 8:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$	2) $f(x) = \frac{2\ln x}{\ln 3}$	3) $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$
4) $f(x) = x\ln x - x$	5) $f(x) = x^2 \ln x$	6) $f(x) = x\ln(2x-3)$
7) $f(x) = 2x(1-\ln x)$	8) $f(x) = \frac{x-\ln x}{x^2}$	9) $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية:

التمرين 9:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) - \ln(x+3)$	2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1)$
3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + 3e^{-x})$	4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2 + 3e^{-x})$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x - 1}{4e^x - 3}\right)$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + 3x + 2) - 2\ln(x-1)$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - e^{-x})$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4x + 1)$

التمرين 10:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$	2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$	4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2$

التمرين 11:

حدّد نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = \ln(1-3x)$	2) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$
3) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$	4) $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)$

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 12:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 4) \ln x$	2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x}{\ln x - 7}$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln x$
4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$	5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln x$	6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 3}{\ln x}$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \frac{1}{2} x^2 - 4$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1)(3 - \ln x)$	

التمرين 13:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$
4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 4 + \ln x)$	5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \ln x$	

التمرين 14:

حدّد نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = \frac{\ln(-x)}{3x + 2}$	2) $f(x) = 25x^2 \ln(-x)$
3) $f(x) = \frac{\ln(5x)}{7x - 3}$	4) $f(x) = (7x - 4)^2 \ln(-4x)$

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية:

التمرين 15:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = \ln(3x - 2)$	2) $f(x) = \ln(x^2 - 36)$	3) $f(x) = \ln\left(\frac{5x + 2}{x - 3}\right)$
-------------------------	---------------------------	--

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 16:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = 2x - \ln x$	2) $f(x) = x \ln x$	3) $f(x) = \frac{\ln x}{3x}$
4) $f(x) = \ln x - 4x^2 + 2$	5) $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - 2 \ln x$	6) $f(x) = x \ln x - 3x$

التمرين 17:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x - \ln x$	2) $f(x) = x \ln x - x + 3$	3) $f(x) = \frac{x+3}{\ln x}$
4) $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$	5) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$	6) $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$

دراسة دالة لوغاريتمية:

التمرين 18:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

- 1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.
- 2) أثبت أنه من أجل كل $x \in]-2; 2[$ ، $f(-x) = -f(x)$ ، ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة لـ (C_f) .

التمرين 19:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right)$.

- 1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.
- 2) أثبت أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f(x) < 0$.

التمرين 20:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln(ax+b)$ ، حيث: a و b عدنان حقيقيان.

- 1) حدّد العددين a و b اللذان يكون من أجلهما (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة $A(2;0)$ ، ويقبل عند هذه النقطة مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = x$.
- 2) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

التمرين 21:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

(2) أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$. ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة لـ (C_f) .

التمرين 22:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

(2) برهن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

(3) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y = x$ مماس لـ (C_f) عند $+\infty$.

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 23:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

(2) أدرس إشارة الدالة f من أجل $x \in]0; +\infty[$.

التمرين 24:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

(2) ما هي معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e ؟ أرسم T .

التمرين 25:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

(2) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0; +\infty[$. حدّد قيمة α بتقريب 10^{-3} .

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

- (1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.
- (2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مماس لـ (C_f) عند $+\infty$.
- (3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ Δ ، ثم أرسم Δ .
- (4) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم أثبت أن $\alpha \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$.

تم بحمد الله وتوفيقه

حلول تمارين درس الدوال اللوغاريتمية - الجزء 2

فهرس حلول التمارين

- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية: 3
- حل التمرين 1: 3
- حل التمرين 2: 3
- حل التمرين 3: 4
- إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 5
- حل التمرين 4: 5
- حل التمرين 5: 6
- حل التمرين 6: 7
- حل التمرين 7: 7
- حل التمرين 8: 7
- تحديد نهاية دالة لوغاريتمية: 8
- حل التمرين 9: 8
- حل التمرين 10: 9
- حل التمرين 11: 9
- تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 10
- حل التمرين 12: 10
- حل التمرين 13: 10
- حل التمرين 14: 11
- تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية: 12
- حل التمرين 15: 12
- تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 14
- حل التمرين 16: 14
- حل التمرين 17: 17
- دراسة دالة لوغاريتمية: 21
- حل التمرين 18: 21
- حل التمرين 19: 22
- حل التمرين 20: 23
- حل التمرين 21: 23
- حل التمرين 22: 24
- دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 25

25.....	حل التمرين 23:
26.....	حل التمرين 24:
28.....	حل التمرين 25:
29.....	حل التمرين 26:

$$1) \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(x^2 + 3) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

$$2) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}.$$

$$3) \forall x \in]\ln 2; +\infty[; f(x) = \ln(e^x - 2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}.$$

$$4) \forall x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[; f(x) = \ln(4 - 3x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{3}{4 - 3x}.$$

$$5) \forall x \in]1; +\infty[; f(x) = \ln(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{2x-2}.$$

$$6) \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = -\frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

$$7) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}; f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 4}.$$

$$8) \forall x \in]-\infty; 0[; f(x) = \ln(-2x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2}{-2x} = \frac{1}{x}.$$

$$9) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln(1 + \sqrt{x}) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)}.$$

$$10) \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$1) \forall x \in \left]-1; \frac{1-\sqrt{21}}{10}\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{10}; +\infty\right[; f(x) = \ln(5x^3 + 4x^2 - 2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{15x^2 + 8x - 2}{5x^3 + 4x^2 - 2x - 1}.$$

$$2) \forall x \in \left]-\frac{5}{8}; +\infty\right[; f(x) = \ln(8x + 5) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{8}{8x + 5}.$$

- 3) $\forall x \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{16} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{33}-1}{16}; +\infty \right[; f(x) = \ln(8x^2 + x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{16x+1}{8x^2+x-1}.$
- 4) $\forall x \in \left] -\frac{5}{8}; +\infty \right[; f(x) = -\frac{1}{3}\ln(8x+5) + 7\ln(x+5) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-8}{3(8x+5)} + \frac{7}{x+5}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-8(x+5) + 21(8x+5)}{3(8x+5)(x+5)} = \frac{160x+65}{3(8x+5)(x+5)}.$
- 5) $\forall x \in]-1; +\infty[; f(x) = \ln(6x^3 - 3x^2 - 5x + 4) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{18x^2 - 6x - 5}{6x^3 - 3x^2 - 5x + 4}.$
- 6) $\forall x \in \left] -\frac{6}{7}; +\infty \right[; f(x) = -4\ln(7x+6) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{28}{7x+6}.$
- 7) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = -\ln x + 3\ln(4x+3) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{12}{4x+3} = \frac{8x-3}{x(4x+3)}.$
- 8) $\forall x \in \left] -\infty; \frac{3}{5} \right[; f(x) = 8\ln(3-5x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{40}{3-5x}.$
- 9) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(1+x^2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$
- 10) $\forall x \in]0; 2[; f(x) = \ln(2x-x^2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(1-x)}{2x-x^2}.$

حل التمرين 3:

- 1) $\forall x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[; f(x) = \ln(2x-5) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-5}.$
- 2) $\forall x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[; f(x) = \ln(-3x+1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-3}{1-3x}.$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(x^2+x+1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$
- 4) $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}.$
- 5) $\forall x \in]1; +\infty[; f(x) = \ln(\ln x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}.$
- 6) $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = \ln x^2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$
- 7) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} (\ln x) = \frac{2 \ln x}{x}.$

$$8) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

$$\diamond \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; f(x) = \ln|1 - x^2| = \ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$\diamond \forall x \in]-1; 1[; f(x) = \ln|1 - x^2| = \ln(1 - x^2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}; f(x) = \ln|1 - x^2| \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$9) \forall x \in]3; +\infty[; f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{(x-3) - (x+2)}{(x-3)^2}}{\frac{x+2}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2} \times \frac{x-3}{x+2} = -\frac{5}{(x-3)(x+2)}.$$

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لو غاريتمية:

حل التمرين 4:

$$1) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x^3 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \ln x + \frac{1}{x} x^3 = 3x^2 \ln x + x^2.$$

$$2) \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; f(x) = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

$$3) \forall x \in]1; +\infty[; f(x) = 2\sqrt{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$4) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}.$$

$$5) \forall x \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[; f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+2}\right)x^2 - \ln(x+2) \times 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+2} - 2\ln(x+2)}{x^3} = \frac{x - 2(x+2)\ln(x+2)}{x^3(x+2)}.$$

$$6) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1) + (\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}.$$

$$7) \forall x \in]-1; +\infty[; f(x) = (x+1)(\ln \sqrt{x+1}) \Leftrightarrow f'(x) = 1(\ln \sqrt{x+1}) + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ \Leftrightarrow f'(x) = \ln \sqrt{x+1} + \frac{x+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{x+1}.$$

$$8) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{2x+2}{x^2+2x}\right) \ln x - \frac{1}{x} \ln(x^2 + 2x)}{(\ln x)^2} \\ \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)\ln x - (x+2)\ln(x^2 + 2x)}{(x^2 + 2x)(\ln x)^2}.$$

$$9) \forall x \in]e; +\infty[; f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = -\frac{2}{x(\ln x - 1)^2}.$$

حل التمرين :5

$$1) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = -3x + 5 - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = -3 - \frac{1}{x}.$$

$$2) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (5x^2 - x + 2)\ln x \Leftrightarrow f'(x) = (10x - 1)\ln x + \frac{5x^2 - x + 2}{x}.$$

$$3) \forall x \in]-3; +\infty[; f(x) = 4\ln(x+3) + 3x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{x+3} + 3.$$

$$4) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 4x^2 + 2x + 2\ln x \Leftrightarrow f'(x) = 8x + 2 + \frac{2}{x}.$$

$$5) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 3\ln x + 5x - 9 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{x} + 5.$$

$$6) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (x^5 - 3x^2 + 1)\ln x \Leftrightarrow f'(x) = (5x^4 - 6x)\ln x + \frac{x^5 - 3x^2 + 1}{x}.$$

$$7) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 3\ln x + 158x^3 - 24x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{x} + 474x^2 - 24 + \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

$$8) \forall x \in]0; e^{-2}[\cup]e^{-2}; +\infty[; f(x) = \frac{x+1}{\ln x + 2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 \times (\ln x + 2) - (x+1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x + 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln x + 2 - 1 - \frac{1}{x}}{(\ln x + 2)^2} = \frac{x(\ln x + 1) - 1}{x(\ln x + 2)^2} = \frac{x \ln x + x - 1}{x(\ln x + 2)^2}.$$

حل التمرين :6

- 1) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x + 2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{2}{x}$.
- 2) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 3 + x \ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x = \ln x + 1$
- 3) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (x-1) \ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$.
- 4) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
- 5) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 2x(\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2(\ln x + 1)^2 + 2x \times 2 \times \frac{1}{x}(\ln x + 1)$
 $\Leftrightarrow f'(x) = 2(\ln x + 1)^2 + 4(\ln x + 1) = 2(\ln x + 1)(\ln x + 1 + 2) = 2(\ln x + 1)(\ln x + 3)$.
- 6) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (3x+1)(\ln x)^3 \Leftrightarrow f'(x) = 3(\ln x)^3 + (3x+1) \times 3 \times \frac{1}{x}(\ln x)^2$
 $\Leftrightarrow f'(x) = 3(\ln x)^2 \left(\ln x + 3 + \frac{1}{x} \right)$.

حل التمرين :7

- 1) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 2x + 1 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
- 2) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x - x \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
- 3) $\forall x \in]-1; +\infty[; f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 \left(\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \times \ln(x+1) \right)}{(x+1)^2}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$.
- 4) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x^2 + (\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 2x + \frac{2 \ln x}{x}$.
- 5) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = e^x \ln x \Leftrightarrow f'(x) = e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$.
- 6) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (-4x-5) \ln x \Leftrightarrow f'(x) = -4 \ln x + (-4x-5) \times \frac{1}{x}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = -4 \ln x - \frac{4x+5}{x} = -4 \ln x - 4 - \frac{5}{x} = -4(\ln x + 1) - \frac{5}{x}$.

حل التمرين :8

- 1) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{4-x}{2x}$.

$$2) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln 3} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{\ln 3} \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x \ln 3}.$$

$$3) \forall x \in]0; 4[; f(x) = \ln(4-x) + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x} = \frac{4-2x}{x(4-x)} = \frac{2(2-x)}{x(4-x)}.$$

$$4) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x - x \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

$$5) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

$$6) \forall x \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[; f(x) = x \ln(2x-3) \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln(2x-3) + x \times \frac{2}{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \ln(2x-3) + \frac{2x}{2x-3} = \frac{(2x-3) \ln(2x-3) + 2x}{2x-3}.$$

$$7) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 2x(1 - \ln x) \Leftrightarrow f'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x \left(-\frac{1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2(1 - \ln x) - 2 = 2(1 - \ln x - 1) = -2 \ln x.$$

$$8) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x^2 - (x - \ln x)2x}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - x - 1}{x^3}.$$

$$9) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 4 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}.$$

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 9:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) - \ln(x+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \ln 1 = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 3e^{-x}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + 3e^{-x}) = +\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 3e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2 + 3e^{-x}) = \ln 2.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{4e^x - 3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(4 - 3e^{-x})}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{4 - 3e^{-x}}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x - 1}{4e^x - 3}\right) = \ln \frac{1}{4} = -\ln 4.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + 3x + 2) - 2\ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}\right) = \ln 2.$$

$$7) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - e^{-x}) = +\infty.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4x + 1) = +\infty.$$

حل التمرين 10:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^2) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1 + x^2}) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) = \ln 2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty.$$

حل التمرين 11:

$$1) f(x) = \ln(1 - 3x) \Leftrightarrow D_f =]-\infty; \frac{1}{3}[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - 3x) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} (1 - 3x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \ln(1 - 3x) = -\infty.$$

$$2) f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + e^x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) = \ln \frac{1}{2}.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + e^x}{2}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) = +\infty.$$

$$3) f(x) = \sqrt{x} \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $0 \times \infty$ ":

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \sqrt{x} \ln x = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2 = 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln x = +\infty.$$

$$4) f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right) \Leftrightarrow D_f =]-3; 5[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{5-x}{3+x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -3^+} \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{5-x}{3+x}\right) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right) = -\infty.$$

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 12:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-4) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-4) \ln x = -\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 7 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x}{\ln x - 7} = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x = -\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x = -\infty.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 3 = 3 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+3}{\ln x} = 0.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 - 4 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 4 = +\infty.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1)(3 - \ln x) = -\infty.$$

حل التمرين 13:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \ln x = -\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) = -\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-4) = -4 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-4 + \ln x) = -\infty.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $\infty - \infty$ ":

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty.$$

$$: "0 \times \infty" \text{ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad (6)$$

$$\text{نضع } X = \frac{1}{x} \text{ ومنه فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ تصبح } \lim_{X \xrightarrow{+} 0} \frac{1}{X} \ln(1+X) \text{ ومن خلال}$$

$$\text{الدرس لدينا } \lim_{X \xrightarrow{+} 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ ، ومنه فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$: "0 \times \infty" \text{ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad (7)$$

$$\text{نضع: } X = 2x \text{ ومنه فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \text{ تصبح } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+X)}{X} \text{ ، وبما أن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \text{ ، ومنه فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+X)}{X} = 2 \text{ فإن } \lim_{X \xrightarrow{+} 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \ln x = +\infty .$$

حل التمرين 14:

$$1) f(x) = \frac{\ln(-x)}{3x+2} \Leftrightarrow D_f =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}; 0[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x+2 = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{3x+2} = 0 .$$

$$\diamond \lim_{x \xrightarrow{-} -\frac{2}{3}} \ln(-x) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 ; \lim_{x \xrightarrow{-} -\frac{2}{3}} 3x+2 = 0^- \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{-} -\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2} = +\infty .$$

$$\diamond \lim_{x \xrightarrow{+} -\frac{2}{3}} \ln(-x) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 ; \lim_{x \xrightarrow{+} -\frac{2}{3}} 3x+2 = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{+} -\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2} = -\infty .$$

$$\diamond \lim_{x \xrightarrow{-} 0} \ln(-x) = -\infty ; \lim_{x \xrightarrow{-} 0} 3x+2 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{-} 0} \frac{\ln(-x)}{3x+2} = -\infty .$$

$$2) f(x) = 25x^2 \ln(-x) \Leftrightarrow D_f =]-\infty; 0[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} 25x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 25x^2 \ln(-x) = +\infty .$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} 25x^2 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(-x) = -\infty \text{ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل } "0 \times \infty" : \text{ نطبق طريقة "l'hôpital" لنزع حالة عدم التعيين.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} 25x^2 \ln(-x) = 25 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x^2}} \right) = 25 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\ln(-x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \right) = 25 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \right)$$

$$= 25 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 25x^2 \ln(-x) = 0 .$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(5x)}{7x-3} \Leftrightarrow D_f = \left]0; \frac{3}{7}\right[\cup \left]\frac{3}{7}; +\infty\right[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} (7x-3) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x)}{7x-3} = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^-} \ln(5x) = \ln\left(\frac{15}{7}\right) ; \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^-} (7x-3) = 0^- \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^-} \frac{\ln(5x)}{7x-3} = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^+} \ln(5x) = \ln\left(\frac{15}{7}\right) ; \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^+} (7x-3) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{7}^+} \frac{\ln(5x)}{7x-3} = +\infty.$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(5x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x-3) = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:
نقسم الكسر على أكبر حد في المقام، فنحصل على:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{7x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(5x)}{x}}{7 - \frac{3}{x}}$$

❖ نطبق طريقة "l'hôpital" على الكسر الأعلى لنزع حالة عدم التعيين:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(5x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \frac{3}{x} = 7 - 0 = 7.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{7 - \frac{3}{x}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{7x-3} = 0.$$

$$4) f(x) = (7x-4)^2 \ln(-4x) \Leftrightarrow D_f =]-\infty; 0[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x-4)^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-4x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x-4)^2 \ln(-4x) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^-} (7x-4)^2 = 16 ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-4x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (7x-4)^2 \ln(-4x) = -\infty.$$

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 15:

$$1) f(x) = \ln(3x-2) \Leftrightarrow D_f = \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[.$$

$$\diamond \forall x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[; f(x) = \ln(3x-2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{3x-2} > 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} (3x-2) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \ln(3x-2) = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x-2) = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		$+\infty$

$$2) f(x) = \ln(x^2 - 36) \Leftrightarrow D_f =]-\infty; -6[\cup]6; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in D_f; f(x) = \ln(x^2 - 36) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 36}.$$

$$\bullet \forall x \in D_f; x^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f; f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]6; +\infty[\\ \forall x \in D_f; f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -6[\end{cases}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 36) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 36) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -6^-} (x^2 - 36) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -6^-} \ln(x^2 - 36) = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 6^+} (x^2 - 36) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 6^+} \ln(x^2 - 36) = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 36) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 36) = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	
f	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$3) f(x) = \ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow D_f =]-\infty; -\frac{2}{5}[\cup]3; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in D_f; f(x) = \ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{5 \times (x-3) - (5x+2) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{5x+2}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{17}{(x-3)^2} \times \frac{x-3}{5x+2} = \frac{-17}{(x-3)(5x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f; f'(x) = \frac{-17}{(x-3)(5x+2)} < 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = \ln 5.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} (5x+2) = 0^+ ; \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} (x-3) = -\frac{17}{5} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} \ln \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 3} (5x+2) = 17 ; \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \ln \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x} \right) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{5x+2}{x-3} \right) = \ln 5.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
f	$\ln 5$			$\ln 5$

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لو غاريتمية:

حل التمرين 16:

$$1) f(x) = 2x - \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 2x - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\diamond f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 2x - \ln x = +\infty.$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $\infty - \infty$ ":

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$1+\ln 2$	$+\infty$

2) $f(x) = x \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[$.

❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \ln x + 1$.

• $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x \in]e^{-1}; +\infty[$.

❖ $f(e^{-1}) = (e^{-1}) \ln(e^{-1}) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

❖ من خلال الدرس نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

3) $f(x) = \frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[$.

❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x \left(\frac{1}{x} \right) - 3 \ln x}{(3x)^2} = \frac{3 - 3 \ln x}{9x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{1 - \ln x}{3x^2}$.

• $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e \Leftrightarrow x \in]0; e[$.

❖ $f(e) = \frac{\ln e}{3e} = \frac{1}{3e}$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x} = 0$.

❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{3x} = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{3e}$	0

4) $f(x) = \ln x - 4x^2 + 2 \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[$.

❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln x - 4x^2 + 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 8x$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{1-8x^2}{x}$.

• $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-8x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow 1-8x^2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2 = -\ln(2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} - \ln(2\sqrt{2})$.

❖ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} (-4x^2 + 2) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln x - 4x^2 + 2 = -\infty$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + 2 = -\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 4x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 4x + \frac{2}{x} \right)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 4x + \frac{2}{x} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 4x + \frac{2}{x} \right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 4x^2 + 2 = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	$\frac{3}{2} - \ln(2\sqrt{2})$	$-\infty$

5) $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - 2\ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[$.

❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = 1 - \frac{1}{x} - 2\ln x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{1-2x}{x^2}$.

• $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 + 2\ln 2 = 2\ln 2 - 1$.

❖ $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} -2\ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

• $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x} - 2\ln x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x} (1 + 2x \ln x)$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x \ln x) = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{x} (1 + 2x \ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{x} - 2 \ln x = -\infty.$$

- ❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \ln x\right) = -\infty.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$2\ln 2 - 1$	$-\infty$

6) $f(x) = x \ln x - 3x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$

- ❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x - 3x \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 3$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \ln x - 2.$$

- $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^2 \Leftrightarrow x \in]e^2; +\infty[.$

- ❖ $f(e^2) = (e^2) \ln(e^2) - 3(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2.$

- ❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} -3x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - 3x = 0.$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(1 - \frac{3}{\ln x}\right).$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{\ln x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(1 - \frac{3}{\ln x}\right) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - 3x = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-e^2$	$+\infty$

حل التمرين 17:

1) $f(x) = x - \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$

- ❖ $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{x-1}{x}.$

- $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[.$

- ❖ $f(1) = 1 - \ln 1 = 1.$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty .$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $\infty - \infty$ " :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) .$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty .$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$2) f(x) = x \ln x - x + 3 \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x - x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \ln x .$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[.$$

$$\diamond f(1) = 1 \times \ln 1 - 1 + 3 = 2 .$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 3 = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - x + 3 = 3 .$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $\infty - \infty$ " :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x - 1 + \frac{3}{x} \right) .$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - 1 + \frac{3}{x} \right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x - 1 + \frac{3}{x} \right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x + 3 = +\infty .$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	3	2	$+\infty$

$$3) f(x) = \frac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in D_f ; f(x) = \frac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Leftrightarrow \forall x \in D_f ; f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} .$$

$$\bullet \forall x \in D_f; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e \Leftrightarrow x \in]e; +\infty[.$$

$$\diamond f(e) = \frac{e+3}{\ln e} = e+3.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x+3 = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{\ln x} = 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 1^-} x+3 = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{\ln x} = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 1^+} x+3 = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{\ln x} = +\infty.$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+3 = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} + \frac{3}{\ln x} \right).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\ln x} = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
f	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $e+3$	$e+3$ ↗ $+\infty$	$+\infty$

$$4) f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 + \ln x = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$

$$5) f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1(1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]0; 1[.$$

$$\diamond f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) \times \frac{1}{x}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) \times \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = 0.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f		1	0

$$6) f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x \Leftrightarrow D_f =]0; +\infty[.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{x \ln 2 - 2}{x}.$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x \ln 2 - 2}{x} > 0 \Leftrightarrow x \ln 2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{2}{\ln 2}; +\infty \right[$$

$$\diamond f\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = \left(\frac{2}{\ln 2}\right) \ln 2 - 2 \ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = 2 - 2 \ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right).$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln 2) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-2 \ln x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln 2 - 2 \ln x = +\infty.$$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 2 = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل " $\infty - \infty$ ":

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 2 - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln 2 - \frac{2 \ln x}{x} \right).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln 2 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = \ln 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln 2 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 2 - 2 \ln x = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$\frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$2-2\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

دراسة دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 18:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow D_f =]-2; 2[.$

$$\forall x \in D_f; f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 \times (2-x) - (2+x)(-1)}{\frac{(2-x)^2}{2+x}} = \frac{4}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{2+x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f; f'(x) = \frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0.$$

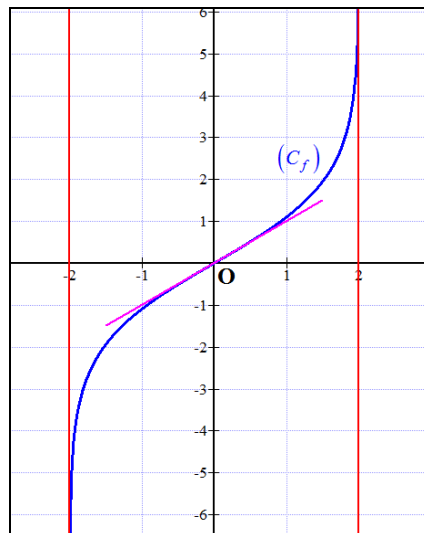
$$\forall \lim_{x \rightarrow -2^+} 2+x = 0^+ ; \lim_{x \rightarrow -2^+} 2-x = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{2+x}{2-x}\right) = 0^- \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -\infty$$

$$\forall \lim_{x \rightarrow 2^-} 2+x = 4 ; \lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2+x}{2-x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-2	2
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



$$2) x \in]-2; 2[\Leftrightarrow (-x) \in]-2; 2[.$$

$$\diamond \forall (-x) \in]-2; 2[; f(-x) = \ln\left(\frac{2+(-x)}{2-(-x)}\right) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\frac{2-x}{2+x}}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x).$$

❖ نستنتج أنه من أجل كل نقطة $M(x; f(x))$ من (C_f) ، فإن نظيرتها $M'(-x; -f(x))$ بالنسبة للنقطة O مبدأ المعلم، تنتمي أيضا لـ (C_f) .

ومنه فإن: (C_f) يقبل النقطة O مبدأ المعلم كمركز تناظر.

حل التمرين 19:

$$\text{الدالة } f \text{ معرفة بـ: } f(x) = \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right).$$

$$1) f(x) = \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}^*.$$

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{10x(5x^2+2) - 5x^2(10x)}{(5x^2+2)^2}}{\frac{5x^2}{5x^2+2}}$$

$$= \frac{20x}{(5x^2+2)^2} \times \frac{5x^2+2}{5x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = \frac{4}{x(5x^2+2)}.$$

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x(5x^2+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{5+\frac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty.$$

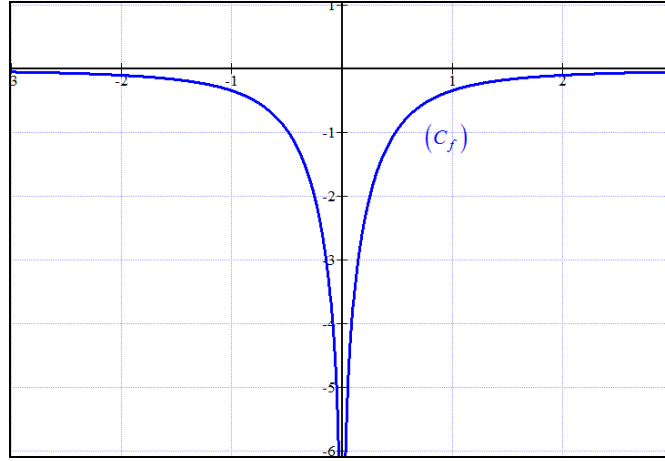
$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{5+\frac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	0	$-\infty$	0

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



$$2) \forall x \in \mathbb{R}^*; 0 < 5x^2 < 5x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{5x^2}{5x^2 + 2} < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5x^2}{5x^2 + 2}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) < 0.$$

حل التمرين 20:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln(ax+b)$ ، حيث: a و b عدنان حقيقيان.

❖ (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة $A(2;0)$ ، معناه:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow \ln(2a+b) = 0 \Leftrightarrow 2a+b=1 \quad (1)$$

❖ و (C_f) يقبل عند النقطة $A(2;0)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، معناه: $f'(2) = 1$.

• وبما أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$ ، يكون لدينا: $\frac{a}{2a+b} = 1$ (2).

❖ من (1) و (2) نستنتج أن: $a=1$ ، و $b=-1$. ومنه فإن: $f(x) = \ln(x-1)$.

حل التمرين 21:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln(1+e^x)$.

$$1) f(x) = \ln(1+e^x) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}.$$

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(1+e^x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0.$

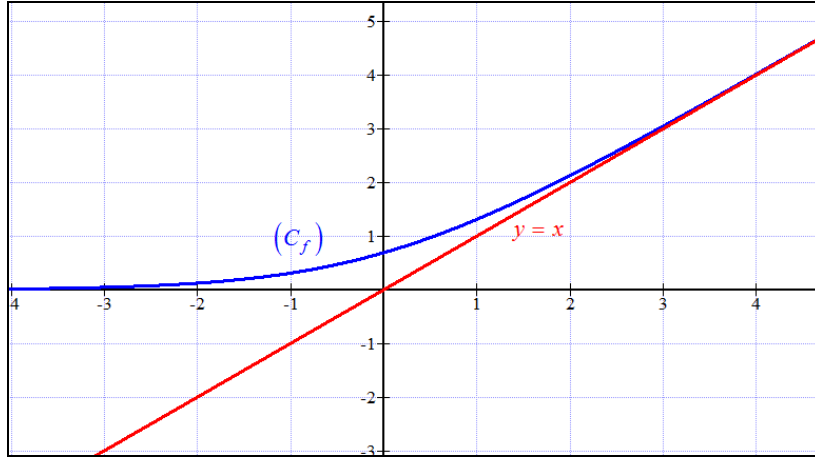
❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0.$

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم الذي معادلته $y = x$:



$$2) \forall x \in \mathbb{R}; f(x) - x = \ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln(1+e^{-x}).$$

$$\text{❖ } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0.$$

❖ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

حل التمرين 22:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

$$1) f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}.$$

$$\text{❖ } \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$\text{❖ } \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\text{❖ } f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0,8.$$

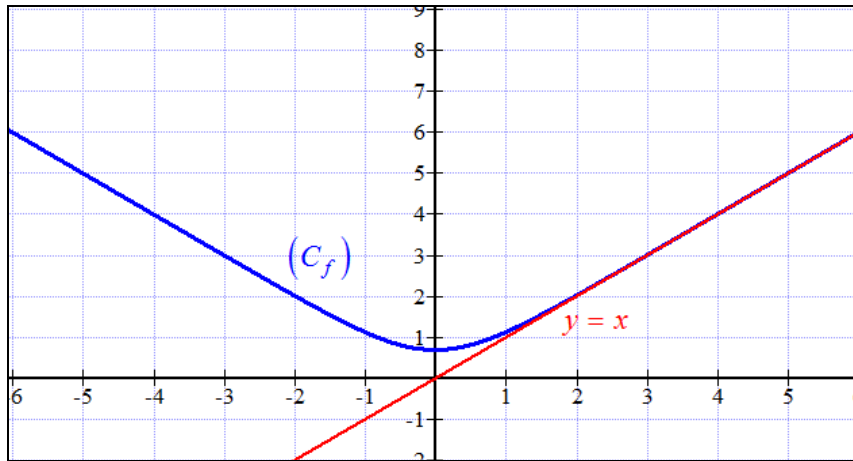
$$\text{❖ } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$\ln\left(\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم الذي معادلته $y = x$:



$$2) \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R}; f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x}).$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-2x}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln 1 = 0.$$

❖ ومنه فإن المستقيم D الذي معادلته $y = x$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 23:

الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2$.

$$1) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 6 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{1 - 6 \ln x}{x}.$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 6 \ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 - 6 \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x \in \left]0; e^{\frac{1}{6}}\right[.$$

$$\diamond f\left(e^{\frac{1}{6}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right) - 3\left(\ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)\right)^2 = \frac{1}{6} - 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

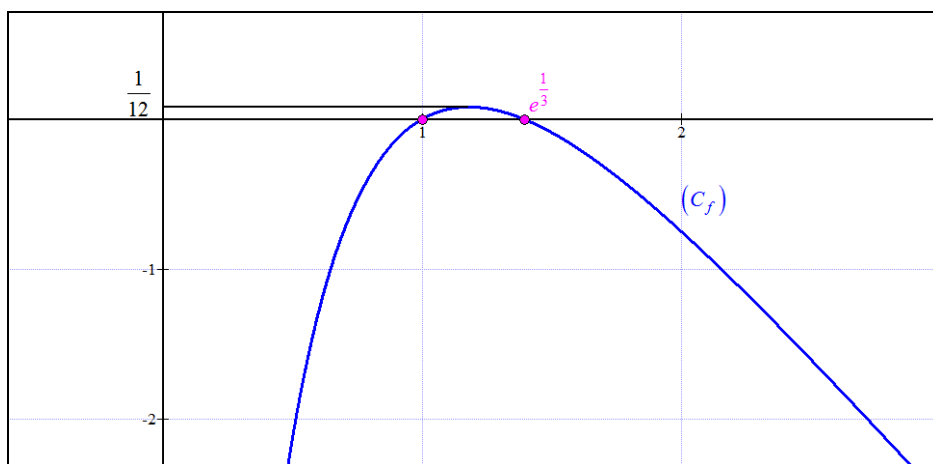
$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2 = \ln x(1 - 3 \ln x).$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - 3 \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (1 - 3 \ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 3 \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (1 - 3 \ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$\frac{1}{e^3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$-\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2 = \ln x(1 - 3 \ln x)$.

❖ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

❖ $1 - 3 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة الدالة f يكون كالتالي:

x	0	1	$e^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$1 - 3 \ln x$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	0	-

ومنه فإن:

❖ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]e^{\frac{1}{3}}; +\infty[$.

❖ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; e^{\frac{1}{3}}[$.

حل التمرين 24:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

1) $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \Leftrightarrow D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

$$\forall x \in D_f; f(x) = \frac{1}{x \ln x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f; f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}.$$

$$\forall x \in D_f; f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$$

$$\Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in]0; e^{-1}[.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x \ln x) = 0^- \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

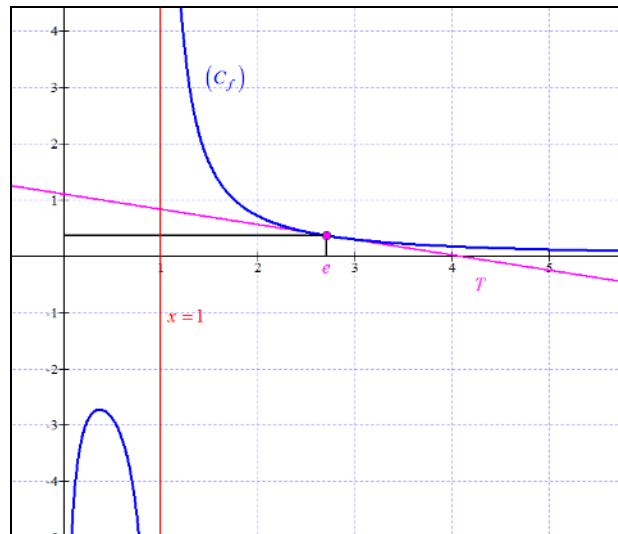
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	0

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمماس T :



(2) معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y = f'(e)(x - e) + f(e)$.

$$f(e) = \frac{1}{e \ln e} = \frac{1}{e}.$$

$$f'(e) = -\frac{\ln e + 1}{(e \ln e)^2} = -\frac{2}{e^2}.$$

$$\diamond y = \left(-\frac{2}{e^2}\right)(x-e) + \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}.$$

❖ ومنه فإن معادلة المماس $T \perp (C_f)$ عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$.

حل التمرين 25:

الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

$$1) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0.$$

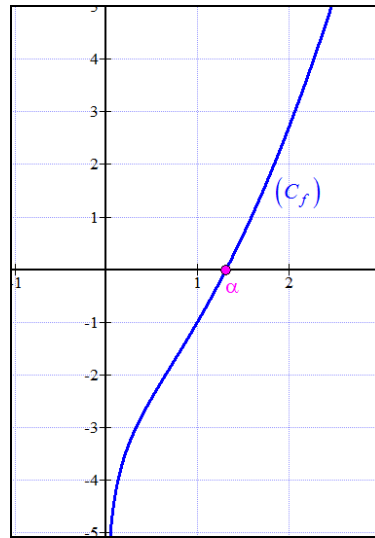
$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2 = -2; \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2 + \ln x = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



(2) بما أن الدالة f مستمرة ومنتزعة تماماً على $]0; +\infty[$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ ، فإن المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \in]0; +\infty[.$$

❖ من خلال جدول القيم التالي، نلاحظ أن $1,314 < \alpha < 1,315$.

x	1,25	1,3	1,31	1,314	1,315	1,32
$f(x)$	-0,2144	-0,0476	-0,0139	-0,0003	0,0031	0,02

حل التمرين 26:

الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

$$1) \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} = 1 + \frac{x}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{x(2x+1)} > 0.$$

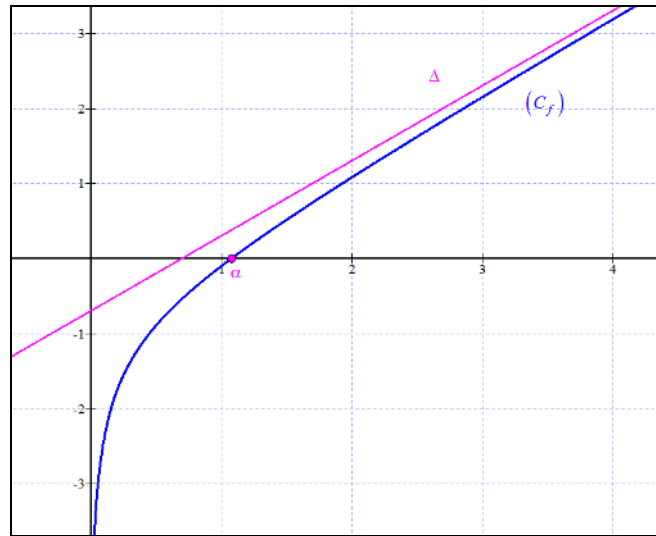
$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) = -\infty.$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) = +\infty.$$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم Δ :



$$2) f(x) - (x - \ln 2) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) - x + \ln 2 = \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right).$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x+1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \ln 2) = 0.$$

❖ ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

$$3) \forall x \in]0; +\infty[; \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2x}}\right).$$

$$\diamond \forall x \in]0; +\infty[; \frac{1}{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{2x}} < 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2x}} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (x - \ln 2) < 0.$$

❖ ومنه فإنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، (C_f) يقع تحت المستقيم Δ .

(4)

$$\diamond f(1) = 1 + \ln \left(\frac{1}{3} \right) = 1 - \ln 3 \approx -0,1 < 0.$$

$$\diamond f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} + \ln \left(\frac{\frac{5}{4}}{2\left(\frac{5}{4}\right) + 1} \right) = \frac{5}{4} + \ln \left(\frac{5}{14} \right) \approx 0,2 > 0.$$

❖ بما أن الدالة f مستمرة ومنتزاية تماما على $]0; +\infty[$ ، و $f(1) < 0$ ، $f\left(\frac{5}{4}\right) > 0$ ، فإن المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \in \left]1; \frac{5}{4}\right[.$$

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ وَتَوْفِيقِهِ