

تمارين المتاليات العددية في البكالوريا

الشعبة: علوم تجريبية

التمرين [1]

[باك 2008] [م1] [ن4]

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [2]

[باك 2008] [م2] [ن5]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثل للدالة f

المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج- هل (u_n) متقاربة؟ برز إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [3]

[باك 2009] [م1] [ن3,5]

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج- بين أن (u_n) متقاربة.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول } u_1 \text{ وأساسها } q \text{ حيث :}$$

1) أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

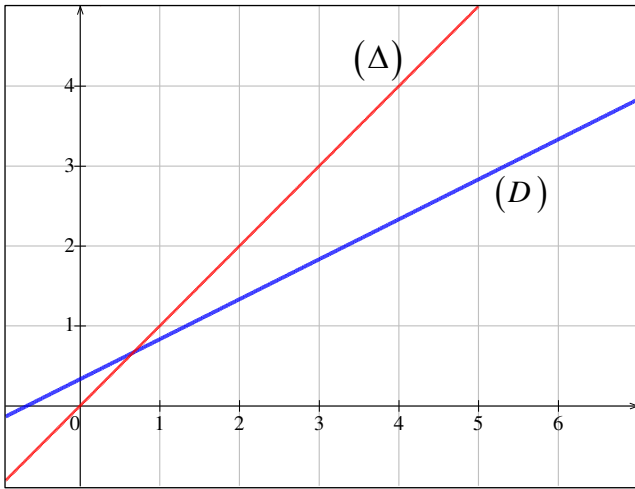
ج- أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$$(2) (v_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ كما يلي : } v_1 = 2 \text{ و } v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

أ- أحسب v_2, v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين

$$(Δ) \text{ و } (D) \text{ معادلتيهما على الترتيب : } y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$$\text{ب : } u_0 = 6 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \text{ دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم}$$

ب- عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(Δ)$ و (D) .

ج- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$(2) \text{ أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n \geq \frac{2}{3}$$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بالعلاقة : } v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$\text{ج- أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n, \text{ استنتج المجموع } S'_n \text{ حيث : } S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ : } u_0 = -1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 3u_n + 1$$

$$\text{و } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ : } v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليق.

1) المتتالية (v_n) : أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$ ب- $-\frac{1}{2}$ ج- $-\infty$

$$(3) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n, S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$$

$$\text{أ- } S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \text{ ب- } S_n = \frac{1 - 3^n}{4} \text{ ج- } S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

(1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

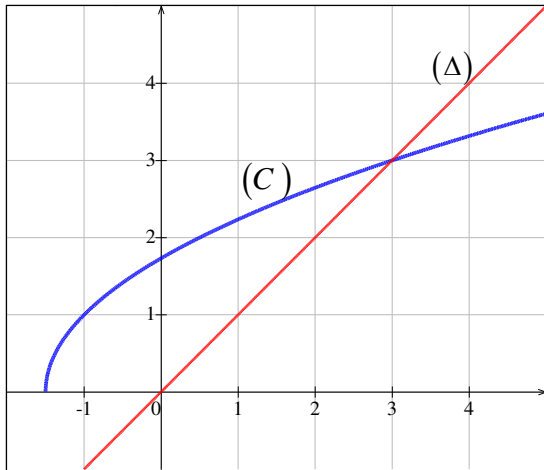
(2) نضع: $\alpha = \frac{3}{2}$.

- أحسب بدلالة n ، المجموعين T_n و S_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).



أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل

الحدود التالية u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماماً .

(3) بزرلماذا (u_n) متقاربة .

(4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حددها الأول .

ب- أكتب كلاماً من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

(I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

(1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

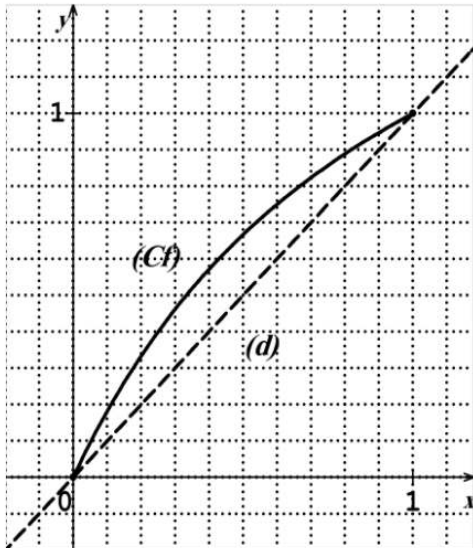
(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب- بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$



(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2

و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$

ب- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب- أحسب نهاية (u_n) .

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

- (I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدتها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)
- (1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأول.
 - (2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
 - (3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- (II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .
- (1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .
 - (2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$
 - ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$.
- (1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .
 - (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.
 - (3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علل .
 - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$
- أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأول.
- ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- ج- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2 + \ln 3)$

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .
- (1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
 - (2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$.
 - (3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.
- (II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :
- $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$
- (1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ، v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها .
 - ب- خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
 - (2) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
 - ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
 - (3) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$
 - ب- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 - ج- استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي: $y = x$ معادلة له.

(3) أرسم (C) و (Δ) .

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$.

(1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب- بين أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n .

ج- استنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n + 13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أ- عبر بدلالة n عن الحد العام v_n .

ب- استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أ- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

ب- تحقق أن : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$.

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

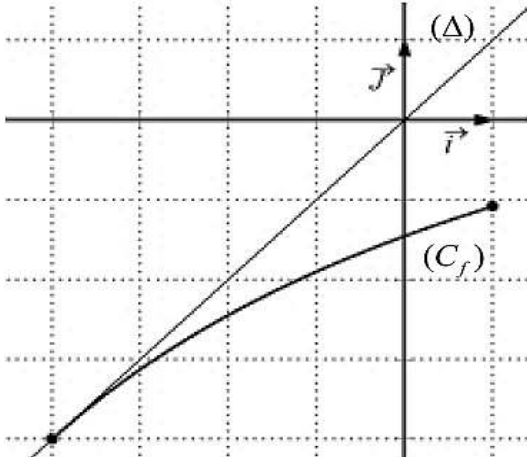
$u_0 = \frac{1}{4}$ و من من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب- أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و

الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

و (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$

(I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$. ثم بين أن:

من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$.

(II) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و حسابها.

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$

ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث: $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) أحسب الحدين u_1 و v_1 .

(2) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

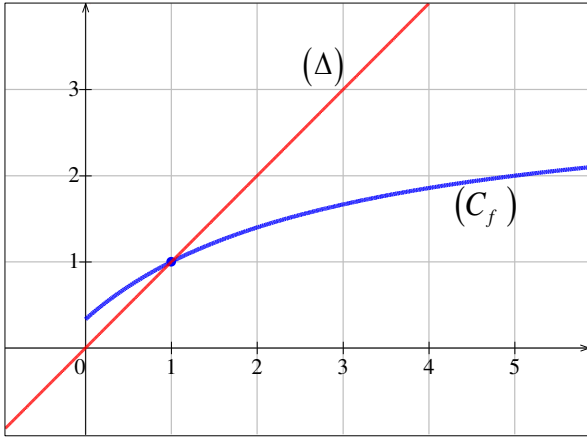
بـ باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n .

(4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم



متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بعدها

الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي: $\alpha = 5$

(2) أ. أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب. عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

(1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب. بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

أ. أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) أحسب كلا من u_1, u_2, u_3

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = 2n+1$

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$

ب. استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أحسب المجموعين S_n و T حيث: $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = 13 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

(1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.
- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ وأحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$(4) \text{ بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n, (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1}$$

$$\text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } [4; 7[\text{ بـ : } f(x) = \sqrt{x+2} + 4$$

(1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7[$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن $f(x) \in [4; 7[$.

$$(2) \text{ برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [4; 7[\text{ فإن } f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$$

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإن $f(x) - x > 0$.

$$(3) (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ : } u_0 = 4 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة .

$$(4) \text{ أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$$

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .