

الأعداد الأولية

الكفاءات المستهدفة

الأستاذ: بوخلاق محمد

- (1) التعرف على أولية عدد طبيعي .
- (2) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه .
- (3) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
- (4) استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
- (5) استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
- (6) استعمال مبرهنة بيزو .
- (7) استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .

تعريف : القول ان العدد الطبيعي n عدد اولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في Z : 1 و n نفسه

ملاحظات :

- (1) العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
- (2) العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو نفسه .
- (3) العدد 2 هو العدد الاولي الزوجي الوحيد .

خواص :

خاصية 1 : كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل على الأقل قاسما أوليا .

البرهان : ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

(*) إذا كان n أوليا فإن n يقسم n وبالتالي الخاصية محققة .
(*) إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n . نفرض أن p غير أولي ومنه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1 < d < p$ وبالتالي d يقسم n وهذا تناقض (لأن $d < p$ و p أصغر قاسم للعدد n) ومنه p عدد أولي وعليه الخاصية محققة .

خاصية 2 :

كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$

البرهان : ليكن n عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n = d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم .
(لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ وهذا تناقض)
نفرض $d \leq d'$ ومنه $d^2 \leq d \times d' = n$ أي أن $d^2 \leq n$ وبالتالي $d \leq \sqrt{n}$.
حسب الخاصية 1 : d يقبل على الأقل قاسما أوليا a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .
بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن : $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان :

نستعمل البرهان بالخلف

- نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .
ليكن N جداء كل الأعداد الأولية من 2 الى p . أي $N = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$.
ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن : $N' = N + 1$ باقي قسمة N' على 2، 3، 5، او p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2، 3، 5، او p .
- إذا كان N' أوليا فإن $N' > p$ وهذا تناقض .
 - إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (حسب الخاصية 1) وهذا تناقض .
- إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

طرائق

تمرين :

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا :

1023 (ج)

341 (ب)

251 (ا)

الحل :

- (ا) $\sqrt{251} \approx 15.84$ الأعداد الأولية الأصغر من هي 2، 3، 5، 7، 11، 13 .
العدد 251 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وكذلك $251 = 7 \times 35 + 6$ و $251 = 11 \times 22 + 9$ و $251 = 13 \times 19 + 4$ بالتالي العدد 251 أولي .
- (ب) $\sqrt{341} \approx 18.46$ الأعداد الأولية الأصغر من 18 هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .
العدد 341 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وعلى 7 لكن يقبل القسمة على 11 وبالتالي 341 غير أولي .
- (ج) $\sqrt{1023} \approx 31.98$ الأعداد الأولية الأصغر من 31 هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29 .
العدد 1023 لا يقبل القسمة على 2 لكن يقبل القسمة على 3 وبالتالي 341 غير أولي .

2) تحليل عدد الى جداء عوامل أولية :

مبرهنة : كل عدد طبيعي غير أولي n حيث يمكن تحليله الى جداء عوامل أولية

البرهان :

- ليكن n عددا طبيعيا أكبر من 1 .
 n عددا طبيعيا غير أولي فإن يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1 \geq 2$) على الأقل وبالتالي :
- $n = p_1 \times n_1$ حيث $1 < n_1 < n$.
- إذا كان n أوليا فإن المبرهنة محققة .
 - إذا كان n غير أولي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1 \geq 2$) على الأقل وبالتالي :
- $n_1 = p_1 \times n_2$ حيث $1 < n_2 < n_1$. نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول

على $n_i = 1$ (عدد طبيعي) . وعليه نحصل $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ (k عدد طبيعي)
 يمكن للأعداد $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. أن تتكرر في التحليل .
 وعليه نحصل على $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$ حيث $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$ أعداد طبيعية .

خاصية : a و b عددين طبيعيين كلاهما أكبر تماماً من 1 .
 يكون العدد b قاسماً للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجوداً في تحليل a
 وبأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a .

البرهان : n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 تحليله الى جداء عوامل أولية

$$n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

- إذا كان l قاسماً للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي . إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n وبالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، وكل عامل أولي في تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل n .

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k}$ حيث :

$$0 \leq d'_1 \leq d_1, \quad 0 \leq d'_2 \leq d_2, \quad \dots, \quad 0 \leq d'_k \leq d_k$$

- عكسياً l ليكن عدداً طبيعياً مكتوباً على الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k}$ يمكننا أن

$$\text{نكتب : } n = l \left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times p_3^{d_3-d'_3} \times \dots \times p_k^{d_k-d'_k} \right)$$

لأن

$$\left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times p_3^{d_3-d'_3} \times \dots \times p_k^{d_k-d'_k} \right) \left(p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k} \right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

ومنه l يقسم n

طرائق

تمرين :

- (1) حلل العدد 725 الى جداء عوامل اولية .
- (2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .
- (3) عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$.

الحل :

- (1) تحليل العدد 725
 $725 = 5^2 \times 29$
- (2) قواسم العدد 725
 عدد قواسم العدد 725 هو $(2+1)(1+1) = 6$.

للحصول على قواسم العدد 725 نتبع مايلي : كل قواسم العدد 725 هي من الشكل $5^\alpha \times 29^\beta$ حيث $0 \leq \alpha \leq 2$ و $0 \leq \beta \leq 1$.

5^0	29^0	$5^0 \times 29^0 = 1$
	29^1	$5^0 \times 29^1 = 29$
5^1	29^0	$5^1 \times 29^0 = 5$
	29^1	$5^1 \times 29^1 = 145$
5^2	29^0	$5^2 \times 29^0 = 25$
	29^1	$5^2 \times 29^1 = 725$

(3) تعين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$:

لدينا $x^2 - y^2 = 725$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 725$ تكافئ $\begin{cases} x + y = 29 \\ x - y = 25 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 725 \end{cases}$

أو $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 145 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 363 \\ y = -362 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 27 \\ y = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 75 \\ y = -70 \end{cases}$. الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$ هي $(27; 2)$.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين :

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ M_a الى مجموعة مضاعفات العدد a .

(1) تعريف : a و b عدنان طبيعيين غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a و M_b مجموعة مضاعفات b . $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ $PPCM(a, b)$.

ملاحظات : (1) $PPCM(a, a) = a$.

(2) $PPCM(a, 1) = a$.

مثال :

تعين $PPCM(12; 26)$.

$$M_{12} = \{0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; 144; 156; \dots\}$$

$$M_{26} = \{0; 26; 52; 78; 104; 130; 156; \dots\} \text{ و}$$

وبالتالي $M_{12} \cap M_{26} = \{0; 156; \dots\}$ إذن $PPCM(12; 26) = 156$.

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين :

تعريف : a و b عدنان صحيحان غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث

$$m = PPCM(|a|; |b|)$$

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

خاصية : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم

$$PPCM(ka; kb) = |k| PPCM(a; b)$$

طرائق

تمرين :

n عدد طبيعي أكبر من 3 .

نضع $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$ و $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$.

(1) برهن أن $PPCM(a; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(6; 3)$

(2) عين $PPCM(a; b)$

الحل :

(1) نبرهن أن $PPCM(a; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(6; 3)$

لدينا :

$$PPCM(a; b) = PPCM((6n^2 - 24)(n^2 - 9); (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6))$$

$$PPCM(a; b) = PPCM(6(n^4 - 13n + 36); 3(n^4 - 13n + 36))$$

$$PPCM(a; b) = (n^4 - 13n + 36)PPCM(3; 6)$$

$$PPCM(a; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(3; 6)$$

تعين $PPCM(a; b)$

لدينا : $PPCM(3; 6) = 6$. وبالتالي $PPCM(a; b) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :

خاصية : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :

خاصية : المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر :

خاصية : a و b عدنان طبيعيين كلاهما أكبر من 1 : $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$.

طرائق

تمرين 1 :

نضع $a = 256$ و $b = 5040$ باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية عين $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$.

تمرين 2 : عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PPCM(a;b) = 600 \end{cases}$.

تمرين 3 : عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :

$$PPCM(a;b) = 21 \times PGCD(a;b)$$

الحل التمرين الاول :

تحليل كلا من a و b الى جداء عوامل أولية : $a = 256 = 2^8$ ، $b = 5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ ،
اذن : $PGCD(a;b) = 2^4 = 16$ و $PPCM(a;b) = 2^8 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 80640$.

الحل التمرين الثاني :

تعين كل الثنائيات $(a;b)$: $\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PPCM(a;b) = 600 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$ وبالتالي $PGCD(a;b) = \frac{a \times b}{PPCM(a;b)}$ أي

$$\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PGCD(a;b) = 20 \end{cases} \text{ وعليه نجد } PGCD(a;b) = \frac{12000}{600} = 20$$

لدينا : $PGCD(a;b) = 20$ معناه $a = 20k$ و $b = 20k'$ حيث k و k' عدنان صحيحان و $PGCD(k;k') = 1$. وعليه $a \times b = 12000$ معناه $20k \times 20k' = 12000$ أي $k \times k' = 30$. وبالتالي

ثنائيات $(k;k')$ هي : $(1;30)$ ، $(3;10)$ ، $(5;6)$ ، $(6;5)$ ، $(2;15)$ ، $(15;2)$ ، $(10;3)$ ، $(3;10)$.

إذن ثنائيات $(a;b)$: $(20;600)$ ، $(600;20)$ ، $(100;120)$ ، $(120;100)$ ، $(40;300)$ ، $(300;40)$ ، $(60;100)$ ، $(100;60)$.

مبرهنة بيزو:

مبرهنة: يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث: $au + bv = 1$.

ملاحظة: الثنائية $(u; v)$ ليست وحيدة.

خواص:

(1) إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v حيث: $au + bv = d$.

البرهان:

و a عدنان صحيحان غير معدومين وليكن d قاسمهما المشترك الأكبر. نضع $a = da'$ و $b = db'$ حيث a' و b' عدنان صحيحان أوليان فيما بينهما. إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عدنان صحيحان u و v حيث $a'u + b'v = 1$ بضرب الطرفين في d نحصل على $da'u + db'v = 1$ أي $au + bv = d$.

(2) إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

البرهان:

ليكن p عددا أوليا و a عدد طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a; p) = d$. بما أن p أولي فإن $d = 1$ أو $d = p$ و d لا يقسم a إذن $d = 1$ ومنه p أولي مع a .
(3) إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

البرهان:

ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة u ، v ، u' و v' حيث: $au + bv = 1$ و $au' + cv' = 1$ نضرب طرفا لطرف نحصل على:
 $a(auu' + cuv' + bu'v) + bc(vv') = 1$ أي وبالتالي حسب مبرهنة بيزو a و $b \times c$ أوليان فيما بينهما.

طرائق

تمرين 1:

n عدد طبيعي أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما حيث: $a = 2n + 3$ و $b = 3n + 5$.

الحل التمرين الأول:

نحسب $-3a + 2b$.

$$-3a + 2b = -3(2n + 3) + 2(3n + 5) = 1 \text{ إذن } -3a + 2b = 1 \text{ وبالتالي حسب مبرهنة بيزو } a$$

و b أوليان فيما بينهما.

تمرين 2:

n عدد طبيعي غير معدوم. نضع $a = 2n^2 + 4n + 1$ و $b = n + 2$. باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

الحل التمرين الثاني:

لدينا: $a = 2n(n + 2) + 1$ أي $a = 2nb + 1$ وبالتالي نجد $a - 2nb = 1$ وعليه حسب مبرهنة بيزو

يوجد عدنان صحيحان 1 و $-2n$ بحيث $a - 2nb = 1$ وبالتالي a و b أوليان فيما بينهما.

مبرهنة غوص :

مبرهنة : a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

البرهان : ليكن a و b عدنان صحيحان أوليين فيما بينهما غير معدومين ، حسب مبرهنة بيزو يوجد عددين صحيحان u و v حيث : $au + bv = 1$. ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث يقسم الجداء bc . بضرب طرفي المساواة $au + bv = 1$ في c نحصل على $cau + cbv = c$. وبما أن a يقسم الجداء bc إذن a يقسم الجداء bcv ولدينا a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $cau + cbv$ أي a يقسم c .

خواص :

- (1) a و b عدنان طبيعيين غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

البرهان :

- a و b عدنان طبيعيين غير معدومين و p عدد أولي حيث p يقسم الجداء ab .
(*) إذا كان p يقسم a تكون الخاصية محققة .
(*) إذا كان p لا يقسم a فإن $\text{pgcd}(a, p) = 1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p إذن a و p أوليان فيما بينهما .
وبما أن p يقسم الجداء ab وهو أولي مع a وحسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b .

- (2) a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة .
إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعفا للجداء bc

البرهان :

- a مضاعفا للعددين b و c يوجد عددين طبيعيين k و k' حيث (1) $a = kb$ و $a = k'c$.
إذن $kb = k'c$.
العدد c يقسم $k'c$ إذن c يقسم kb وبما أن c أولي مع b وحسب مبرهنة غوص فإن c يقسم k .
إذن يوجد عدد طبيعي k'' حيث $k = k''c$ وبالتعويض في (1) نجد $a = k''cb$ وبالتالي a مضاعف للعدد kb .

تمرين :

- (1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول (x, y) : $7x - 24y = 0$.
(2) تأكد أن الثنائية $(7, 2)$ حل للمعادلة ذات المجهول (x, y) : $7x - 24y = 1$.
(3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول (x, y) : $7x - 24y = 1$.

الحل التمرين :

(1) $7x - 24y = 0$ ومنه $7x = 24y$.

$24y$ يقسم 24 و بالتالي 24 يقسم $7x$ بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة غوص 24 يقسم x . نضع $x = 24k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $7x = 24y$ نحصل على $7(24k) = 24y$ و منه $y = 7k$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k; 7k)$ حيث k عدد صحيح .

(2) $7 \times 7 - 24 \times 2 = 1$ و منه $(7; 2)$ حل للمعادلة $7x - 24y = 1$.

(3) بطرح 1 من طرفي المعادلة $7x - 24y = 1$ نحصل على $7x - 24y - 1 = 0$.

و نعلم أن $7 \times 7 - 24 \times 2 = 1$ إذن $7x - 24y - 7 \times 7 + 24 \times 2 = 0$ و منه $7(x - 7) = 24(y - 2)$.

24 يقسم $24(y - 2)$ و بالتالي 24 يقسم $7(x - 7)$ بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة

غوص 24 يقسم $(x - 7)$ نضع $(x - 7) = 24k$ حيث k عدد صحيح أي $x = 24k + 7$

بالتعويض في المساواة $7(x - 7) = 24(y - 2)$ نحصل على $7(24k) = 24(y - 2)$

ومنه $y = 7k + 2$. الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k + 7; 7k + 2)$ حيث k عدد صحيح .

ملاحظة :

يمكن الحصول على الثنائية $(7; 2)$ باستعمال الطريقة التالية (الطريقة ليست وحيدة)

لدينا : $7x - 24y = 1$ و بالتالي نجد : $24y + 1 = 7x$.

اذن نبحث عن العدد الصحيح y حيث $24y + 1$ مضاعف للعدد 7 .

نأخذ $y = 0$ و $y = 1$: نجد أن $24y + 1$ ليس مضاعف للعدد 7 .

نأخذ $y = 2$ نجد : $24 \times 2 + 1 = 49 = 7 \times 7$ و بالتالي $x = 7$.

اذن $(7; 2)$ حل للمعادلة $7x - 24y = 1$.