

2AS

التحويلات النقطية

Transformations

ملخص الدرس

تمارين

طول التمارين

ملخص الدرس

O نقطة من المستوي ، k عدد حقيقي غير معدوم

نسمي تحاكيا h مركزه O و نسبته k ، و نرمز له بالرمز $h(O, k)$ ، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي

النقطة M' من المستوي حيث $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$

النقطة M' هي صورة M بالتحاكيا h : $M' = h(M)$ أو $M \xrightarrow{h} M'$

ملاحظة: إذا كان $k = 1$ فإن التحاكيا هو التحويل الحيايدي وإذا كان $k = -1$ فإن التحاكيا هو التناظر المركزي بالنسبة للنقطة O

نتائج :

(1) إذا كانت M' هي صورة M بالتحاكيا h الذي مركزه O و نسبته k فإن النقط M و M' على استقامة واحدة

$$OM' = |k| \times OM \text{ و } \triangleleft$$

(2) صورة النقطة O بالتحاكيا h هي النقطة O نفسها (O نقطة صامدة).

الخاصة المميزة

مبرهنة:

h تحاكيا مركزه O و نسبته k ، A و B نقطتان. A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتحاكيا . لدينا : $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$

نتائج :

(1) بما أن $k \neq 0$ فإنه إذا كانت A تختلف عن B فإن A' تختلف عن B' وبالتالي (AB) يوازي $(A'B')$ و $A'B' = |k| \times AB$

(التحاكيا يضاعف المسافات إلى $|k|$)

(2) إذا كان G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن صورته بالتحاكيا هي G' مرجح الجملة $\{(A', \alpha); (B', \beta)\}$.

خواص أخرى:

(1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط على استقامة واحدة و كانت A' ، B' و C' صورها على الترتيب بواسطة تحاك h فإن

A' ، B' و C' تكون على استقامة واحدة أيضا. نقول أن التحاكيا يحافظ على الاستقامية.

(2) إذا كان المستقيمان (D) و (Δ) متوازيين (أو متعامدين) فإن صورتيهما بواسطة تحاك h هما مستقيمان (D') و (Δ') متوازيان (أو متعامدين) ، نقول أن التحاكي يحافظ على التوازي وعلى التعامد.

(3) في إذا كانت A ، B و C نقط من المستوي الموجه صورها بتحاك h هي A' ، B' و C' على الترتيب فإن:

$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'B'}, \overline{A'C'})$ و $BAC = B'A'C'$. نقول أن التحاكي يحافظ على الزوايا .

(4) التحاكي الذي نسبته العدد الحقيقي k يضاعف الأطوال $|k|$ مرّة و يضاعف المساحات k^2 مرّة و يضاعف الحجم k^3 مرّة.

نقول ان التحاكي لا يحافظ على المسافات

. صورة بعض الأشكال الهندسية بالتحاكي



(1) صورة مستقيم (D) بتحاكي هي مستقيم (D') يوازيه.

(2) صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$.

(3) صورة دائرة (C) مركزها A و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $A' = h(A)$ و نصف

قطرها $r' = |k| \times r$.

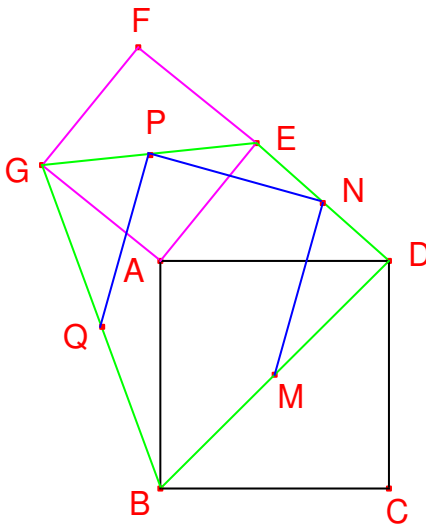
تمارين

تمرين 1: رقم 47 ص 332

$ABCD$ مربع طول ضلعه 3. و $BEFG$ مربع طول ضلعه 2. أنظر الشكل.

- (1) أحسب BAC و EBF .
- استنتج أن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان .
- (2) ليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول النقطة A إلى النقطة B . برهن أن $h(C) = F$.
- لماذا $\frac{2}{3}$ هي نسبة التحاكي h ؟
- (3) برهن أن النقط I ، G ، D في استقامة .

تمرين 2: رقم 48 ص 332:



$ABCD$ و $AEFG$ مربعان حيث : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}$. أنظر الشكل .

M ، N ، P ، Q منتصفات القطع $[BD]$ ، $[ED]$ ، $[GE]$ و $[GB]$ على الترتيب .

(1) باعتبار المثلثين BEG و BED برهن أن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

(2) الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين صورة القطعة $[BE]$ بالدوران r .
- استنتج أن $MNPQ$ مربع .

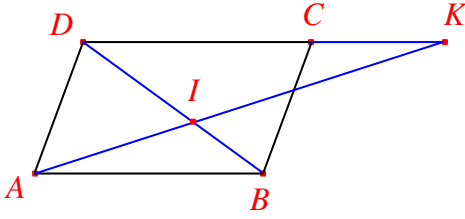
تمرين 3:

يمكن اعتبار المستوي مزود بالمعلم $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

$ABCD$ متوازي أضلاع J هي النقطة حيث $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{CJ}$ و E النقطة حيث $\overrightarrow{JE} = 4\overrightarrow{JB}$ هي منتصف $[BC]$ و G منتصف $[DE]$. بيّن أن النقط J ، G و F على استقامة واحدة.

تمرين 4: رقم 42 ص 331: (خطأ في المعطيات)

$ABCD$ متوازي أضلاع . نعتبر h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى D .



(1) لماذا المستقيم (DC) هو صورة (AB) بالتحاكي h ؟

(2) استنتج أن $h(A) = K$.

(3) عين صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h . واستنتج أن $h(C) = A$.

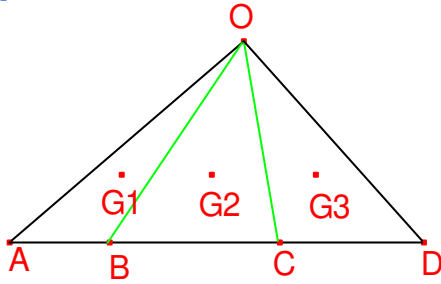
(4) نسمي k نسبة التحاكي h .

استنتج من الأسئلة السابقة أن : $\overline{IA} = k\overline{IJ}$ و $\overline{IK} = k\overline{JA}$ ثم استنتج أن : $IA^2 = IJ \times IK$.

تمرين 5: رقم 43 ص 331:

A, B, C, D أربع نقط متمايزة من مستقيم (Δ) و O نقطة لا تنتمي إلى (Δ) .

نسمي G_1, G_2, G_3 مراكز ثقل المثلثات OAB, OBC, OCD على الترتيب .



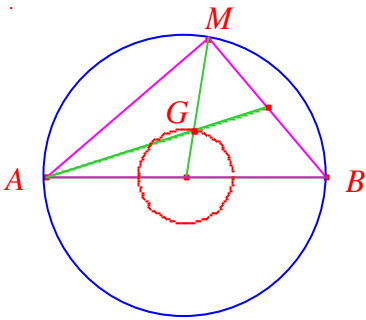
برهن أن النقط G_1, G_2, G_3 على استقامة واحدة .

تمرين 6: رقم 56 ص 334

(C) دائرة ثابتة قطرها $[AB]$. M نقطة متغيرة من الدائرة (C) حيث $(M \neq A \text{ و } M \neq B)$.

لكل نقطة M نعين G مركز ثقل المثلث ABM .

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتغير النقطة M على الدائرة (C) ما عدا A و B ؟

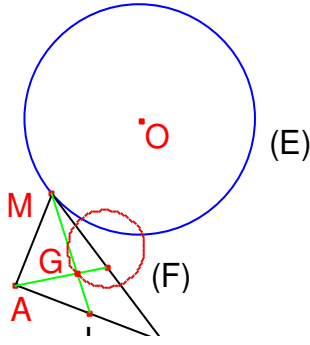


تمرين 7:

(E) هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها α .

A و B نقطتان خارج هذه الدائرة. M هي نقطة متحركة على الدائرة (E). نسمي G مركز ثقل المثلث ABM .

عين المجموعة (F) للنقط G .



تمرين 8: رقم 61 ص 335:

ABC مثلث O منتصف القطعة [BC] ، I نقطة كيفية من القطعة [BO] .

المستقيم الموازي لـ (OA) والمار بالنقطة I يقطع المستقيم (AB) في J ويقطع المستقيم (AC) في K .

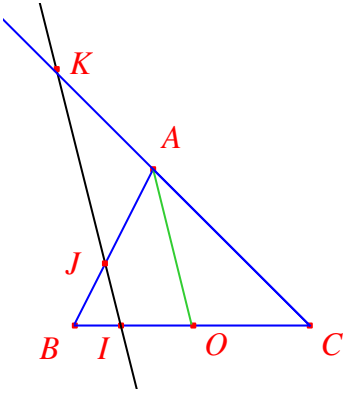
نسمي h_1 التحاكي الذي مركزه B ونسبته k_1 حيث : $h_1(O) = I$ ، و h_2 التحاكي الذي مركزه C

ونسبته k_2 حيث : $h_2(O) = I$.

(1) عين $h_1(A)$ و $h_2(A)$.

(2) بين أن : $\vec{BI} = k_1 \vec{BO}$ و $\vec{CI} = k_2 \vec{CO}$. استنتج أن : $k_1 + k_2 = 2$.

(3) برهن أن : $\vec{IJ} + \vec{IK} = 2\vec{OA}$.

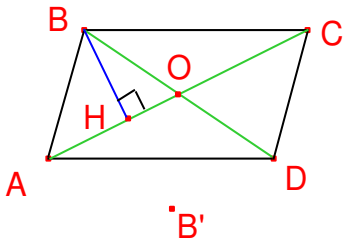


تمرين 9:

ABCD متوازي أضلاع. نعتبر النقط التالية:

A' نظيرة B بالنسبة إلى A ، B' نظيرة B بالنسبة إلى (AC) و C' نظيرة B بالنسبة إلى C .

بين أن النقط A' ، B' ، C' و D في استقامية.



تمرين 10: رقم 60 ص 334

ABC مثلث . M منتصف القطعة [BC] .

نرسم خارج المثلث ABC المثلثين BAB' و CAC' قائمان في A ومتساويان الساقين (أنظر الشكل) .

نريد البرهان أن المستقيمين (AM) و (B'C') متعامدان .



نضع h التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2 .

(1) عين صورة M بواسطة h .

(2) نسمي A' صورة A بواسطة h ، برهن أنه يوجد دوران r يحول C إلى C' و A' إلى B' .

استنتج مستعملا خواص h و r .

حلول التمارين



حل التمرين 1:

$$(1) \quad BAC = 45^\circ \text{ و } EBF = 45^\circ.$$

(2) بما أن الزاويتين BAC و EBF متقايستان و متبادلتان داخليا فإن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان

المثلثان IFB و IAC متشابهان. إذن التحاكي h الذي مركزه I و يحول A إلى B يحول كذلك C إلى F ومنه $h(C) = F$

$$(3) \quad \text{حسب مبرهنة طالس لدينا: } \frac{IB}{IA} = \frac{IF}{IC} = \frac{BF}{AC} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{IF}$ و $\overrightarrow{IC}$ لهما نفس الاتجاه فإن $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IC}$

(4) المثلثان IFG و ICD متشابهان. إذن التحاكي h الذي مركزه I و يحول C إلى F يحول كذلك D إلى G ومنه $h(D) = G$ و

بالتالي $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ID}$ ، إذن النقط I ، G ، D في استقامة .

حل التمرين 2:

(1) في المثلث BED لدينا: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ (مستقيم المنتصفين)

في المثلث BEG لدينا: $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ (مستقيم المنتصفين) . إذن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

(2) r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

• لدينا: $r(B) = D$ و $r(E) = G$ ومنه صورة القطعة $[BE]$ بالدوران r هي القطعة $[DG]$.

• حسب السؤال السابق الدوران يحافظ على المسافات إذن $BE = DG$ و $(BE) \perp (DG)$ (الزاوية بين المستقيمين هي زاوية الدوران)

ومنه $(MN) \perp (DG)$ لأن $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{NP}$. إذن: $(MN) \perp (NP)$

من $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ و $(MN) \perp (NP)$ نستنتج أن الرباعي $MNPQ$ مربع.

حل التمرين 3:

$$\text{لدينا : } \vec{JC} = \frac{1}{4} \vec{JD} \text{ و } \vec{JB} = \frac{1}{4} \vec{JE}$$

ومنه C صورة D بالتحاكي الذي مركزه J ونسبته $\frac{1}{4}$

و B صورة E بنفس التحاكي.

نستنتج أن $[BC]$ هي صورة $[DE]$ بهذا التحاكي ومنه المنتصف F للقطعة $[BC]$

هي صورة المنتصف G للقطعة $[DE]$

$$\text{أي } \vec{JF} = \frac{1}{4} \vec{JG} \text{ أي أن النقط } J, G \text{ و } F \text{ على استقامة واحدة.}$$

حل التمرين 4:

1) صورة (AB) بالتحاكي h هي المستقيم الذي يشمل صورة B بالتحاكي h و يوازي (AB) أي المستقيم الذي يشمل D

و يوازي (AB) أي المستقيم (DC) .

$$2) \text{ لدينا : } \frac{IK}{IA} = \frac{ID}{IB} = k \text{ حيث } k \text{ نسبة التحاكي } h.$$

$$\text{ومنه } h(A) = K \text{ أي } \vec{IK} = k \vec{IA}$$

3) صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h هي المستقيم الذي يوازي (BC) ويشمل صورة B بالتحاكي h أي المستقيم الذي

يوازي (BC) ويشمل D . إذن صورة المستقيم (BC) هي المستقيم (AD) .

$$\text{بما أن } h(B) = D \text{ و } h((BC)) = (AD) \text{ فإن } h(C) = A$$

حل التمرين 5:

لتكن E_1, E_2 و E_3 منتصفات القطع $[AB], [BC]$ و $[CD]$ على الترتيب

$$\text{لدينا : } \vec{OG_1} = \frac{2}{3} \vec{OE_1} \text{ و } \vec{OG_2} = \frac{2}{3} \vec{OE_2} \text{ و } \vec{OG_3} = \frac{2}{3} \vec{OE_3}$$

أي النقط G_1, G_2 و G_3 هي صور النقط E_1, E_2 و E_3 بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $\frac{2}{3}$

و بما أن النقط E_1, E_2 و E_3 على استقامة واحدة والتحاكي يحافظ على الاستقامة فإن النقط G_1, G_2 و G_3 على استقامة واحدة.

حل التمرين 6:

لتكن O منتصف $[AB]$. لدينا: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.

ومنه $OG = \frac{1}{3}OM$ أي أن النقطة G تتغير على الدائرة (C') التي مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{3}OM$

(الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته $\frac{1}{3}$)

حل التمرين 7:

نسمي J منتصف $[AB]$.

لدينا: $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JM}$ إذن M هي صورة G بالتحاكي الذي مركزه J و نسبته $\frac{1}{3}$

ومنه المجموعة (F) للنقط G هي صور (E) بهذا التحاكي.

(F) هي الدائرة التي نصف قطرها $\frac{\alpha}{3}$ ومركزها صورة O بهذا التحاكي.

حل التمرين 8:

(1) لدينا: $\frac{BI}{BO} = \frac{BJ}{BA} = k_1$ ومنه $\overrightarrow{BI} = k_1\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{BJ} = k_1\overrightarrow{BA}$ ومنه $h_1(A) = J$

التحاكي h_2 الذي مركزه C و يحول O إلى I يحول كذلك A إلى K (المثلثان CAO و CKI متحاكيان) إذن $h_2(A) = K$

(2) $h_1(O) = I$ و $h_1(B) = J$ ومنه $\overrightarrow{BI} = k_1\overrightarrow{BO}$

$h_2(O) = I$ و $h_2(C) = C$ ومنه $\overrightarrow{CI} = k_2\overrightarrow{CO}$

$$k_1 + k_2 = \frac{BI}{BO} + \frac{CI}{CO} = \frac{BI + CI}{BO} = \frac{BC}{BO} = 2$$

(3) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OA} = (k_1 + k_2)\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA}$

حل التمرين 9:

لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على $[AC]$ و O مركز متوازي الأضلاع

النقط A, H, O, C على استقامة واحدة.

بما أن A' نظيرة B بالنسبة إلى A فإن $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$

بما أن B' نظيرة B بالنسبة إلى (AC) فإن $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$

بما أن O مركز متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$

بما أن C' نظيرة C بالنسبة إلى B فإن $\overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BC}$

إذن التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2 يحول النقط A, H, O, C إلى النقط A', B', D, C' على الترتيب

و بما أن النقط A, H, O, C على استقامة واحدة فإن النقط A', B', C', D على استقامة واحدة.

حل التمرين 10:

(1) لدينا: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$ ومنه $h(M) = C$

(2) $h(A) = A'$ معناه $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$

لدينا: $AA' = AB'$ و $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'}) = \frac{\pi}{2}$

و $AC = AC'$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{\pi}{2}$. إذن يوجد دوران r مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول C إلى C' و A' إلى B'

الاستنتاج: لدينا: $h(M) = C$ و $h(A) = A'$ ومنه $h((AM)) = (A'C)$ و $(A'C) \parallel (AM)$

و لدينا: $r(C) = C'$ و $r(A') = B'$ ومنه $r((A'C)) = (B'C')$ و $(A'C) \perp (B'C')$

من $(A'C) \parallel (AM)$ و $(A'C) \perp (B'C')$ نستنتج أن $(AM) \perp (B'C')$.