

تمارين محلولة في الدوال الأسية للتحضير الجيد لباكوريا 2021

📌 : 03 ثانوي جميع الشعب العلمية / 📌 : Mezanemaths / 📌 : Mezanemaths / 📌 : Mezanemaths

التمرين 01

• $g(x) = e^{x^2+ax+b}$: a و b عدنان حقيقيان و g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

الحل

من جدول التغيرات لدينا : $g'(\frac{3}{2}) = 0$ و $g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$

• مشتقة الدالة g : $g'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$

$g'(\frac{3}{2}) = 0$ تكافئ $(3+a)e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = 0$ لأن $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} \neq 0$: $3+a=0$ تكافئ

إذن : $a = -3$

$g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b) = -\frac{5}{4}$ و منه : $b = 1$

و بالتالي : $a = -3$ و $b = 1$

التمرين 02

• (C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

للدالة f حيث : $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$ مع a, b, c أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ في النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$

و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 2x$.

الحل

النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0) = -\frac{1}{2}$ أي : $a + b = -\frac{1}{2}$

المماس (T) عند النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ معناه : $f'(0) = 2$

$f'(x) = -2ae^{-2x} - be^{-x} + c$ و منه : $f'(0) = 2$ تكافئ : $-2a - b + c = 2$ أي : $-2a - b = 2 - c$

$y = 2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - cx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [ae^{-2x} + be^{-x}] = 0$$

معناه : $y = cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = -\frac{1}{2} \\ -2a - b = 0 \end{array} \right. \text{ التي تكافئ : } \left\{ \begin{array}{l} a + b = -\frac{1}{2} \\ -2a - b = 2 - c \end{array} \right.$$

و منه : $a = \frac{1}{2}$ و $b = -1$ و بالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x$.

التمرين 03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1, e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.

(2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4; 5]$.

(3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0.

(4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

(5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4; 5]$ كما يلي : $g(x) = [f(x)]^2$.

استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$.

الحل

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1, e)$ معناه : $f(1) = e$

معامل توجيه المماس عند $\Omega(1, e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1) = 3e$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = e \\ f'(1) = 3e \end{array} \right. \text{ نحسب } f'(x) \text{ فنجد : } f'(x) = (ax + a + b)e^x \text{ و بالتالي نحل الجملة :}$$

$$\text{و منه : } \left\{ \begin{array}{l} (a + b)e = e \\ (2a + b)e = 3e \end{array} \right. \text{ و بالتالي نجد : } a = 2 \text{ و } b = -1 \text{ أي : } f(x) = (2x - 1)e^x$$

(2) حساب $f'(x)$: $f'(x) = 2e^x + e^x(2x - 1) = e^x(2 + 2x - 1) = e^x(2x + 1)$

إشارة المشتقة من إشارة $(2x + 1)$ لأن : $e^x > 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-4	$-\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-9 - 4e^{-4}$	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	$9e^5$

(3) معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0.

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : $y = x - 1$

(4) نبين أن المنحني يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.
حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x) = (2x+3)e^x$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

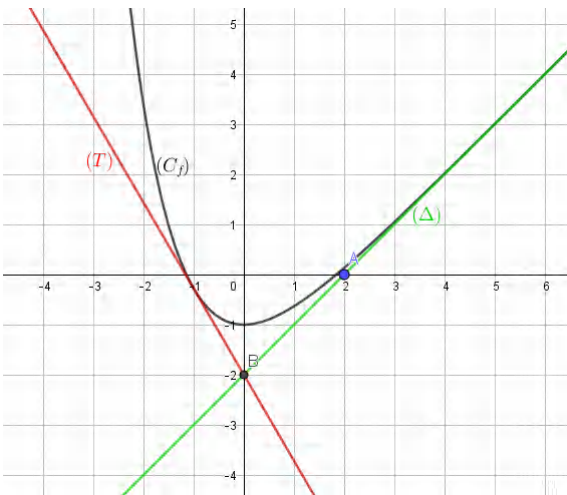
x	-4	$-\frac{3}{2}$	5
$f''(x)$	-	0	+

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega(-\frac{3}{2}; -4e^{-\frac{3}{2}})$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) .
(5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$ حيث : $g(x) = [f(x)]^2$
حيث : $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$ و $f'(x) = (2x+1)e^x$ و $f(x) = (2x-1)e^x$

x	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$81e^{-8}$	$4e^{-1}$	0	$81e^{30}$

التمرين 04

هو التمثيل البياني للدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = ax + b + e^{-x}$ حيث : a و b عددا حقيقيان .
(Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحني (C_f) المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$.
(T) هو المماس للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1 - e$.



- أكتب معادلة للمستقيم (Δ).
- إستنتج قيمة كلا من a و b .
- أكتب معادلة للمماس (T).

(1) بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
فإن معادلة (Δ) هي : $y = ax + b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

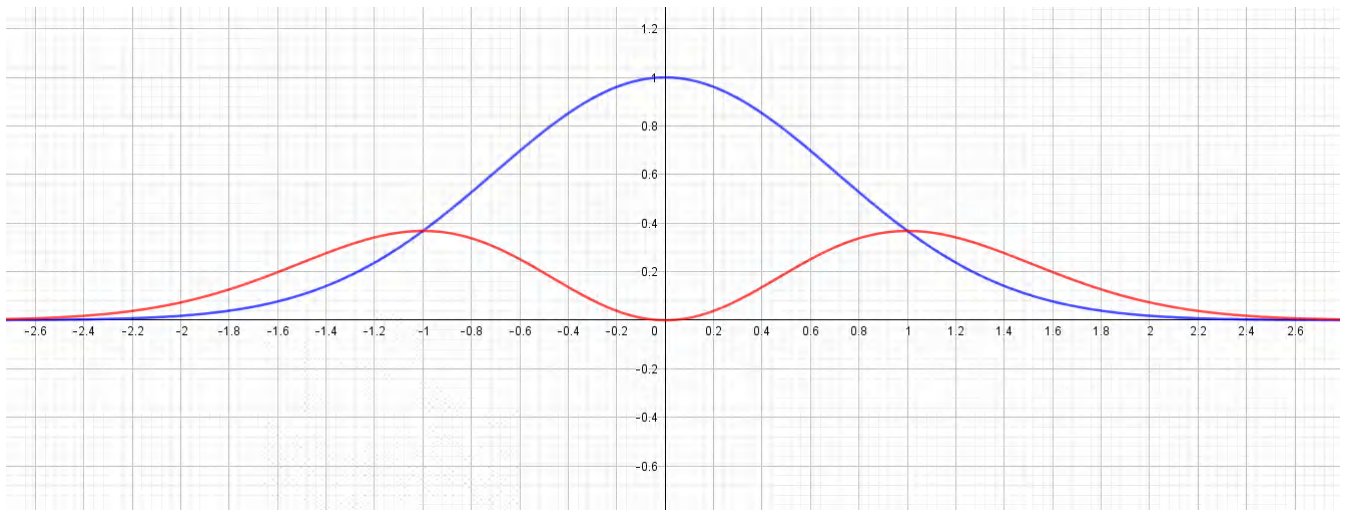
فيكون لدينا :
$$\begin{cases} 0 = 2(a) + b \\ -2 = 0(a) + b \end{cases}$$
 فنحصل على : $a = 1$ و $b = -2$

إذن : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي : $y = x - 2$

(2) معادلة (T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي $y = (1-e)(x+1) - 3 + e$ و بالتالي : معادلة (T) هي : $y = (1-e)x - 2$

التمرين 05

• $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بحيث
و ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



- (1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل .
- (2) أدرس شفعية الدالتين f و g .
- (3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g .
- (4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن : $f(0) = 1$

و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن : $g(0) = 0$

(2) شفعية الدالتين f و g :

شفعية f : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ و منه f دالة زوجية.

شفعية g : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$ و منه g دالة زوجية.

(3) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ حيث : f و g زوجيتان.

ب) دراسة تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(x^2) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$
 جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$									

0

e^{-1}

0

0

0

0

e^{-1}

0

0

0

- 4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق $g(x) - f(x)$.
- $g(x) - f(x) = x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ إشارة هذا الفرق من إشارة $x^2 - 1$ لأن $e^{-x^2} > 0$ و منه :
- على المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$ يكون $x^2 - 1 > 0$ وبالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f) .
- على المجال $]-1, 1[$ يكون $x^2 - 1 < 0$ وبالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f) .
- المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1; e^{-1})$ و $C(1; e^{-1})$.

في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

(1) بقراءة بيانية :

أ) عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم إستنتج قيمة c .

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

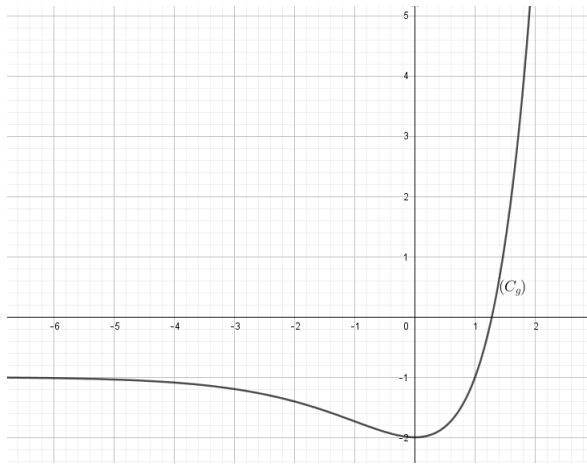
ج) عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي a و b .

(2) نفرض فيما يلي : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2 < \alpha < 1.3$

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.



في الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(4) بين $f(\alpha) = \alpha - 1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

(7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي : $h(x) = f(|x|)$

أ) بين أن h دالة زوجية.

ب) أرسم المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق.

الحل

(1) (I) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax+b)e^x + c] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$

إذن نستنتج أن : $c = -1$.

ب) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ج) لدينا : $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$

لدينا : $g(0) = -2$ أي : $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ أي : $b - 1 = -2$ و منه : $b = -1$.

نحسب $g'(x) : g'(x) = a \times e^x + e^x(ax+b) = e^x(a+ax+b)$

لدينا : $g'(0) = 0$ أي : $e^0(a+a \times 0 - 1) = 0$ أي : $a - 1 = 0$ و منه : $a = 1$

إذن : $g(x) = (x-1)e^x - 1$

(2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

(ب) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1, 2; 1, 3]$ وبما أن : $g(1.2) = -$ و $g(1.3) = +$ أي : $g(1.2) \times g(1.3) < 0$ إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1.2 و 1.3 .
(ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

• بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

$$(2) \text{ لدينا : } y = x : (\Delta), \text{ نحسب : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

• الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$:

أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة : $(-x)$.

(3) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$$\bullet \text{ نحسب المشتقة } f'(x) : f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x + 1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x - 1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

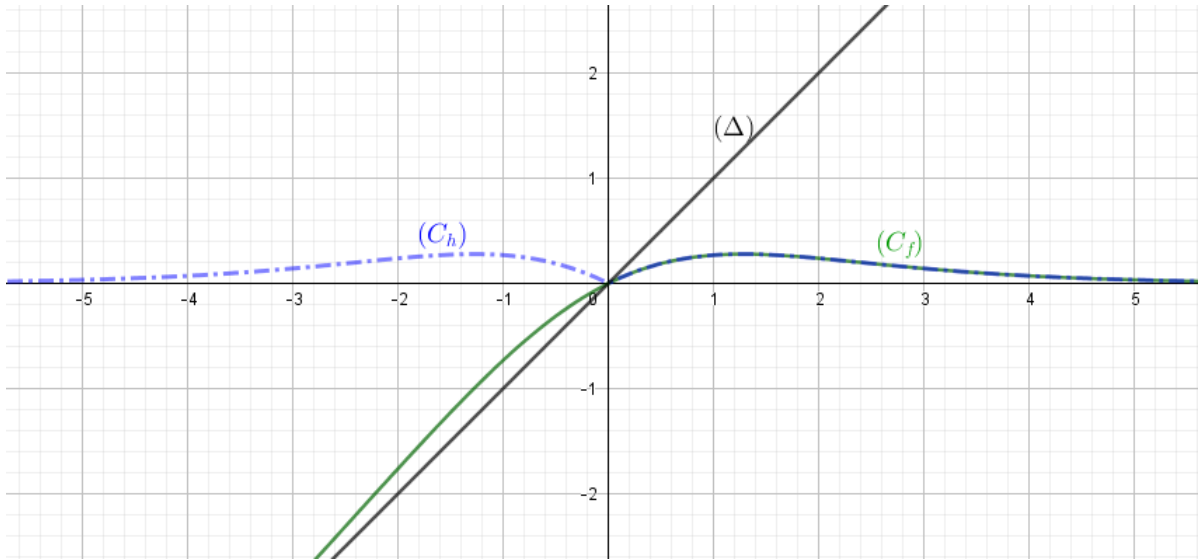
إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن : $(e^x + 1)^2 > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(4) إثبات : $f(\alpha) = \alpha - 1$:

نعلم أن : $g(\alpha) = 0$, أي : $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ أي : $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$, ومنه : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
 لنحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$.
 وهو المطلوب .

حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $1.2 < \alpha < 1.3$ أي : $0.2 < \alpha - 1 < 0.3$ ومنه : $0.2 < f(\alpha) < 0.3$.
 (5) الإنشاء :



(6) المناقشة البينائية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$, عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل والذي معادلته : $y = f(m)$.

إذا كان : $m \in]-\infty; 0]$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن : المعادلة تقبل حلان متميزان .

إذا كان : $m = \alpha$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

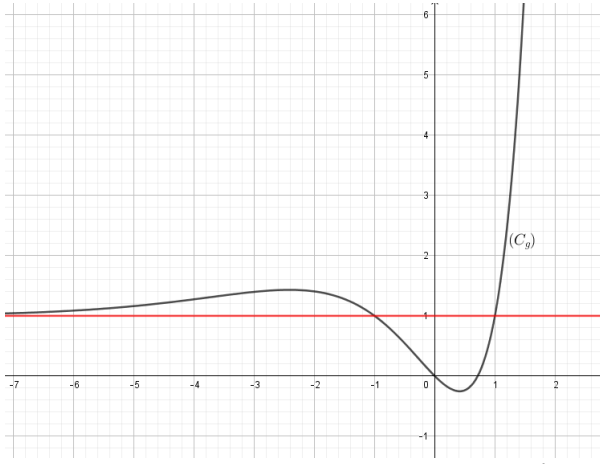
(7) لدينا الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $h(x) = f(|x|)$.

أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ و بالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب في المجال $]-\infty; 0]$.



• لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$
 • تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .
 يعطى جدول القيم التالي :

x	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
$g(x)$	-0.17	-0.11	-0.03	0.07	0.2

- (1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
- (2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.
- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- (ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
- (2) تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1, 1)$.
- (ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المماس (T) .
- (ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .
- (4) أرسم كلا من (T) , (T') و (C_f) .
- (5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E) : (x - 1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول .

الحل

- (I) 1) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
 لدينا : $g(0) = (0^2 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.
 ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7; 0.75]$ و $g(0.70) \times g(0.75) = -0.03 \times 0.07 = -0.0021 < 0$ و
 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
 و بالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
- (2) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

- (II) لدينا : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ معرفة على $D_f = \mathbb{R}$
- (1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x - 1)^2 e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = +\infty$$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$
من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = 1 + [2x - 2 + (x-1)^2 e^x] = 1 + (2x - 2 + x^2 - 2x + 1)e^x = 1 + (x-1)^2 e^x = g(x)$$

$$f'(x) = g(x) : \text{أي}$$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	0	-	+

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين : $]-\infty; 0[$ و $]\alpha; +\infty[$ و f متناقصة تماماً على المجال $[0; \alpha]$.
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$(2) \text{ التحقق من أن : } f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$$

$$\text{لدينا : } f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 e^\alpha$$

$$\text{و لدينا : } g(\alpha) = 0 \text{ و منه : } 1 + (\alpha^2 - 1)e^\alpha = 0 \text{ و بالتالي : } e^\alpha = -\frac{1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\text{إذن : } f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 \times \left(-\frac{1}{\alpha^2 - 1}\right) : \text{أي } f(\alpha) = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - \alpha - \alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\text{و بالتالي : } f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$$

تعيين حصر ل $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا : } 0.70 < \alpha < 0.75 \text{ و منه : } (0.70)^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < (0.75)^2 + 1 \text{ و } 0.70 + 1 < \alpha + 1 < 0.75 + 1$$

$$\text{إذن : } \frac{(0.70)^2 + 1}{0.70 + 1} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} < \frac{(0.75)^2 + 1}{0.75 + 1} : \text{و بالتالي : } 0.85 < f(\alpha) < 0.92$$

(3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$:

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = g(1)(x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

(ب) تبين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المماس (T)

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - y : f(x) - y = x + (x-1)^2 e^x - x = (x-1)^2 e^x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)

تبيان أن المنحنى (C_f) يقبلا مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا : $(T) \parallel (T')$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي : $f'(x_0) = 1$

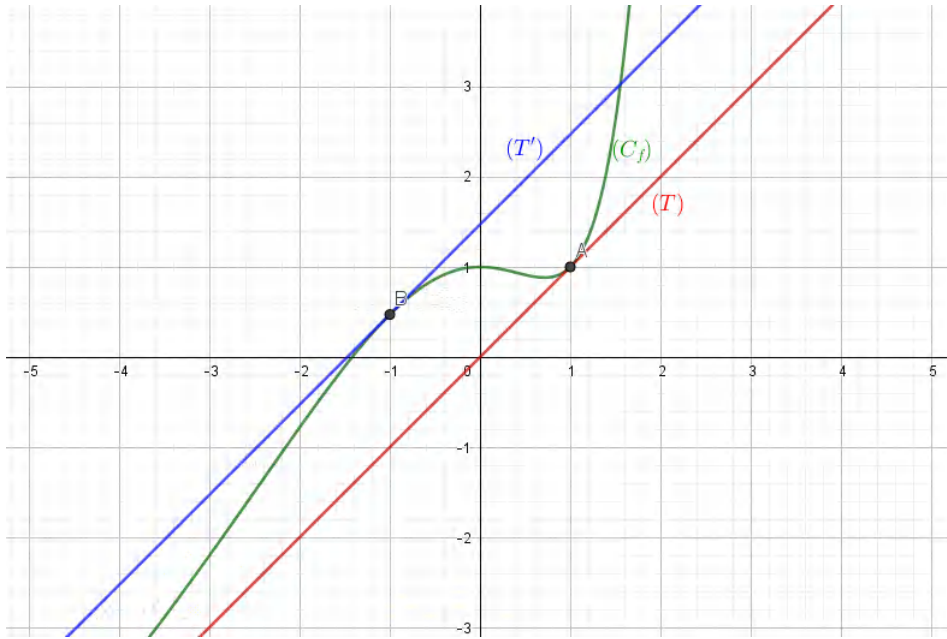
ومنه : $1 + (x_0^2 - 1)e^{x_0} = 1$ وبالتالي : $(x_0^2 - 1)e^{x_0} = 0$ ومنه : $(x_0^2 - 1) = 0$ لأن : $e^{x_0} \neq 0$ و عليه : $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$.
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس (T') :

لدينا : $B(-1; -1 + 4e^{-1})$

إذن : $(T') : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = 1 \times (x + 1) - 1 + 4e^{-1} = x + 4e^{-1}$

الرسم :

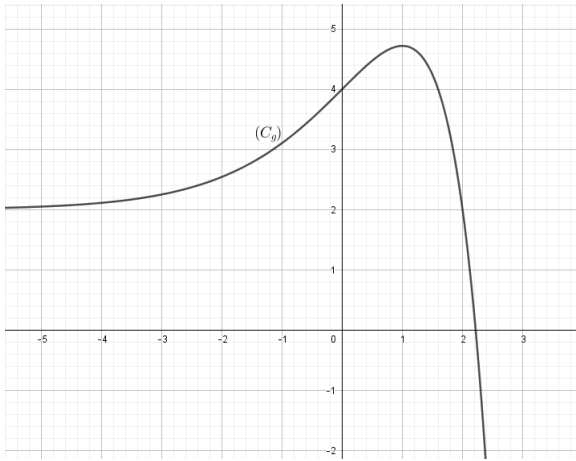


تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول :

لدينا : $(x - 1)^2 e^x = m + 1$ تكافئ : $x + (x - 1)^2 e^x = x + m + 1$ تكافئ : $f(x) = x + m + 1$

حلول المعادلة (E) بيانها هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m + 1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T') .

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني : $0 < m + 1 < 4e^{-1}$ وبالتالي : $-1 < m < -1 + 4e^{-1}$.



• الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (2-x)e^x$.
 (C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل المقابل)

- (1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21 < \alpha < 2.22$.
 (2) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

• نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة بيانيا .
 (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.
 ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 (3) بين أن : $f(-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(-\alpha)$.
 (4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في المعلم السابق .
 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
 ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .
 (5) أنشئ كلا من المنحنى (δ) والمنحنى (C_f) (تعطي $f(-\alpha) = 0.48$) .

الحل

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (2-x)e^x$.

- (1) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21 < \alpha < 2.22$.

• الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; 3[$ و $]2.21; 2.22[\subset]1; 3[$ و $\left\{ \begin{array}{l} g(2.21) \approx 0,08 \\ g(2.22) \approx -0,02 \end{array} \right.$ أي $g(2.21) \times g(2.22) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; 3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2.21 < \alpha < 2.22$.
 بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

أ) 2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2x(1+e^{-x}) + x^2 e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2} = \frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(-\alpha)$	0	$+\infty$

$$3) \text{ لدينا : } f(-\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+e^{\alpha}} = \frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha^2}{\frac{-\alpha}{2-\alpha}} = -\alpha(2-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$$

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا : $2,21 < \alpha < 2,22$ و منه $0,21 < \alpha - 2 < 0,22$ إذن $0,46 < \alpha(\alpha-2) < 0,48$ و بالتالي $0,46 < f(-\alpha) < 0,49$.

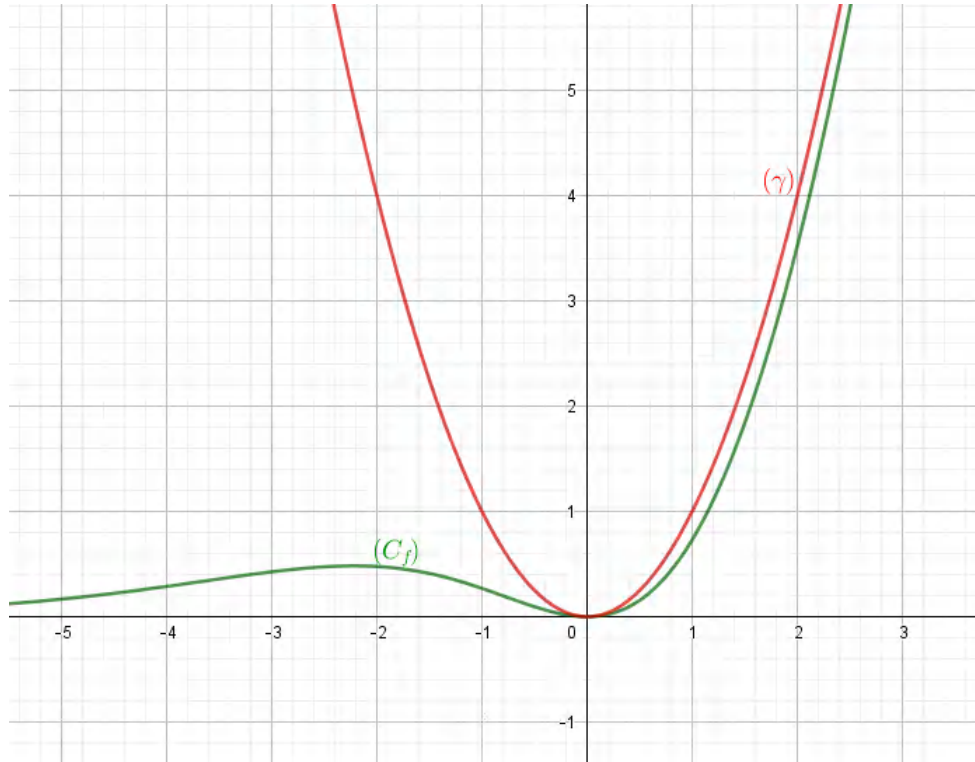
4) (γ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في المعلم السابق .

$$\text{أ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+e^{-x}} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = 0$$

التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x) - x^2 = \frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى



التمرين 09

- نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
 - (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70 < \alpha < 0.71$.
 - (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x - 4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .
- (1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
 - ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2 - x)]$ ، و فسر النتيجة بيانيا .
 - ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$.
 - (2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \times g(x)$ ، ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .
 - (3) بين أن $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 - (4) احسب احداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب .
 - (5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة A.
 - (6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln \frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) ، المماس T والمنحنى (C_f).
 - (7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$.

الجزء الأول

① دراسة تغيرات الدالة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$

أولاً : حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = +\infty$

ثانياً : اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$
جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0,7;0,71[$ و $g(0,7) \times g(0,71) \leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,71$
جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$

① حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)(2e^{\frac{1}{2}x} - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = +\infty$$

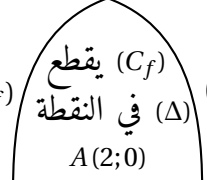
حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x - 2 + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} \right) = 0$$

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = 2 - x$ بجوار $(-\infty)$
دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة إشارة الفرق $f(x) - (2-x)$

لدينا : $f(x) - (2-x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$
ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x} > 0$
ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة إشارة العبارة $2x-4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية			

② دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = (2+x-2)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} - 1 = e^{\frac{1}{2}x}(x - e^{-\frac{1}{2}x}) = e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بما أن $e^{\frac{1}{2}x} > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :
جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ إثبات أن $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$: لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha - e^{-\frac{1}{2}\alpha} = 0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha} = \alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

$$f(\alpha) = (2\alpha - 4)\frac{1}{\alpha} + 2 - \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} + 2 - \alpha = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$$

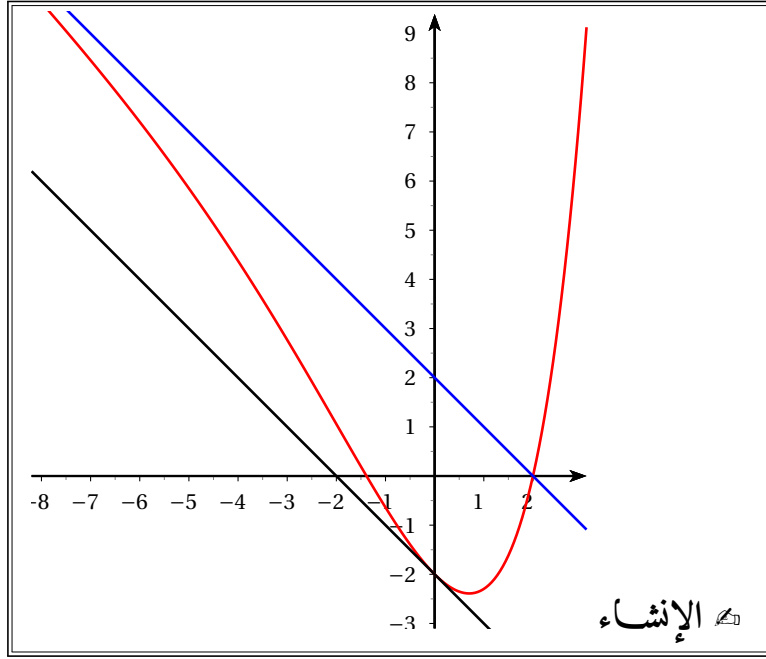
بالتعويض نجد :
حصر $f(\alpha)$:

لدينا $0,71 < \alpha < 0,71$ ومنه : $3,29 < 4 - \alpha < 3,3$ و $-5,61 < -\frac{4}{\alpha} < -5,71$ إذن : $-2,42 < f(\alpha) < -2,31$

أحدائي النقطة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب : لدينا : $f(0) = -2$ ومنه $(C_f) \cap (y'y) = \{A(0; -2)\}$

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x - 2$$

معادلة المماس عند A :



المناقشة البيانية:

لدينا: $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$ تكافئ $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} = m-2$

أي $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 = m$ وعليه $f(x) = m - x$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m - x$

من أجل $m < -2$ المعادلة لا تقبل حلولاً

من أجل $-2 < m < 2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

من أجل $m = -2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً $x = 0$

من أجل $m > 2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

التمرين 10

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $] -0.38, -0.37[$

(3) إستنتج إشارة $g(x)$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(وحدة الطول $2cm$)

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة f

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

(5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف

(6) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

- (7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$) .
 • (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .
 (1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .
 (2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$.

الحل

• الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$.

• الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $] -\infty, 2[$ ومنه على المجال $] -0.38, -0.37[$.
 وبما أن $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$.

3. إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

• نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1)$ لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	$+$	$\parallel$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$\parallel$	(C_f) تحت (Δ)

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x) = g'(x)$ ومنه

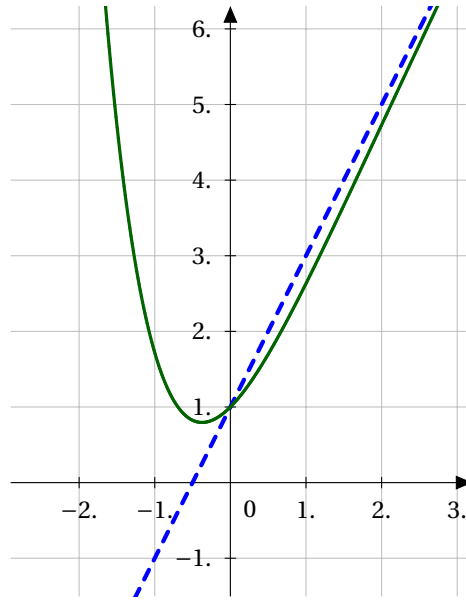
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		$+ \quad 0 \quad -$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $(2; 5 - \frac{2}{e^2})$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6. إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$g(\alpha) = 0$ تكافئ $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$ ومنه : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

7. رسم المنحنى (C_f)



✎ (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي

1. تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y = 2x + m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0) = 2$ أي أن $g(x) = 2$ ومنه $(x-1)e^{-x} = 0$ وبالتالي $x_0 = 1$

لدينا : $f(1) = 3 - e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y = 2x + 1 - e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m = 1 - e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

يعني $m = -xe^{-x} + 1$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m + 2x = -xe^{-x} + 1 + 2x$ أي أن $m + 2x = f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ، لدينا عندئذ :

✎ إذا كان $m \in]-\infty, 1 - e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حولا .

✎ إذا كان $m = 1 - e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف .

✎ إذا كان $m \in]1 - e^{-1}, 1[$ للمعادلة حلان .

✎ إذا كان $m > 1$ للمعادلة حل وحيد.

التمرين 11

✎ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن : $e^{-x} + x \geq 1$.

✎ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

- (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. فسر النتيجةين بيانياً .
- (3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.
- (4) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (5) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O .
- (6) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x-f(x)$.
- (7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
- (8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$.

الحل

1. حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$$\begin{array}{ll} g'(x) \geq 0 \text{ يكافئ } -e^{-x} + 1 \geq 0 & g'(x) \leq 0 \text{ يكافئ } -e^{-x} + 1 \leq 0 \\ \text{يكافئ } e^{-x} \leq 1 & \text{يكافئ } e^{-x} \geq 1 \\ \text{يكافئ } 1 \leq e & \text{يكافئ } -x \geq 0 \\ \text{يكافئ } x \geq 0 & \text{يكافئ } x \leq 0 \end{array}$$

إذن إذا كان $x \in]-\infty; 0]$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، وإذا كان $x \in]0; +\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$

من أجل $x \in]-\infty; 0]$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متناقصة على $] -\infty; 0]$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (1)$

من أجل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متزايدة على $]0; +\infty[$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا: $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ و منه $e^{-x} + x \geq 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{(x) \times 1}{(x) \times (\frac{e^{-x}}{x} + 1)} = \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1$$

التفسير البياني:

عند $-\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y = 0$ و $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

عند $+\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y = 1$.

$$3. f \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا: } f'(x) = \frac{1(e^{-x} + x) - (-e^{-x} + 1)(x)}{(e^{-x} + x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} \text{ إذن } f'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} + x)^2}$$

4. دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} (x+1)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x} > 0$ والمقام موجب تماما، إذن:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ومن جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
f	0	$\frac{1}{1-e}$	1

5. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O :

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس هي $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = x$

$$6. \text{ التحقق من أن } x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

إشارة $x - f(x)$:

لدينا $g(x) \geq 0$ و $g(x) + 1 \geq 1$ و $g(x) + 1 > 0$ ، إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x < 0$ فإن $x - f(x) < 0$ ،

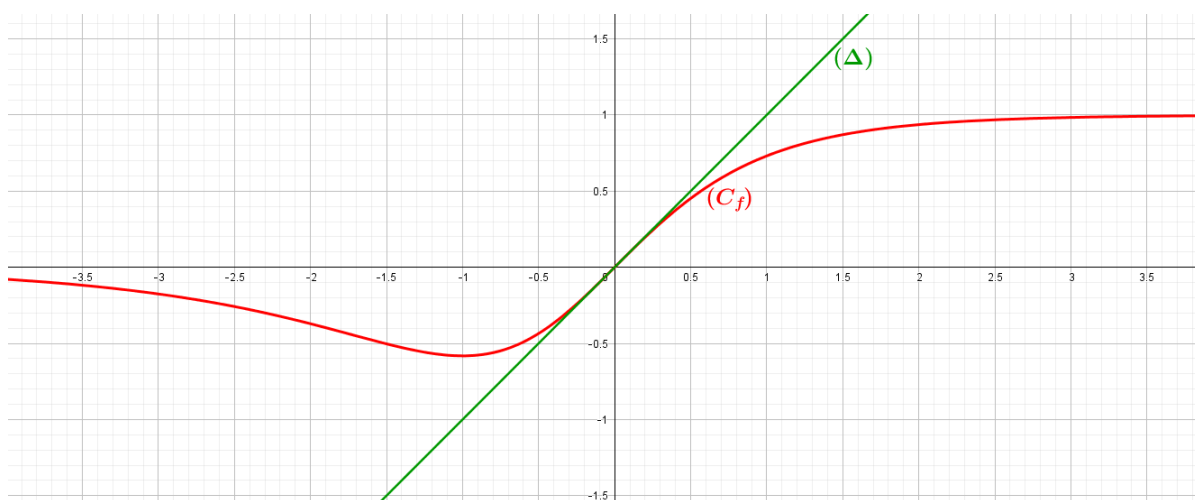
$x > 0$ فإن $x - f(x) > 0$

وإذا كان $x = 0$ فإن $x - f(x) = 0$.

7. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
(C_f) تحت (Δ)	(Δ) و (C_f) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) فوق (Δ)

8. رسم (C_f) و (Δ)



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$

المناقشة: لدينا $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x} \frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ يكافئ $\frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ أي $f(x) = m+1$ ، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m+1$ ، نميز الحالات التالية:

- إذا كان $m+1 \geq 1$ أي $m \geq 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول
- إذا كان $0 < m+1 < 1$ أي $-1 < m < 0$ ، للمعادلة حل وحيد موجب
- إذا كان $m+1 = 0$ أي $m = -1$ ، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0 = 0$
- إذا كان $\frac{1}{1-e} < m+1 < 0$ أي $\frac{1}{1-e} - 1 < m < -1$ ، للمعادلة حلين سالبين متميزين
- إذا كان $m+1 = \frac{1}{1-e}$ أي $m = \frac{1}{1-e} - 1$ ، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1 = -1$
- إذا كان $m+1 < \frac{1}{1-e}$ أي $m < \frac{1}{1-e} - 1$ ، المعادلة ليس لديها حلول.

التمرين 12

• لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حيث a, b, c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معاملا توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

نضع $c = -3, b = 0, a = 1$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

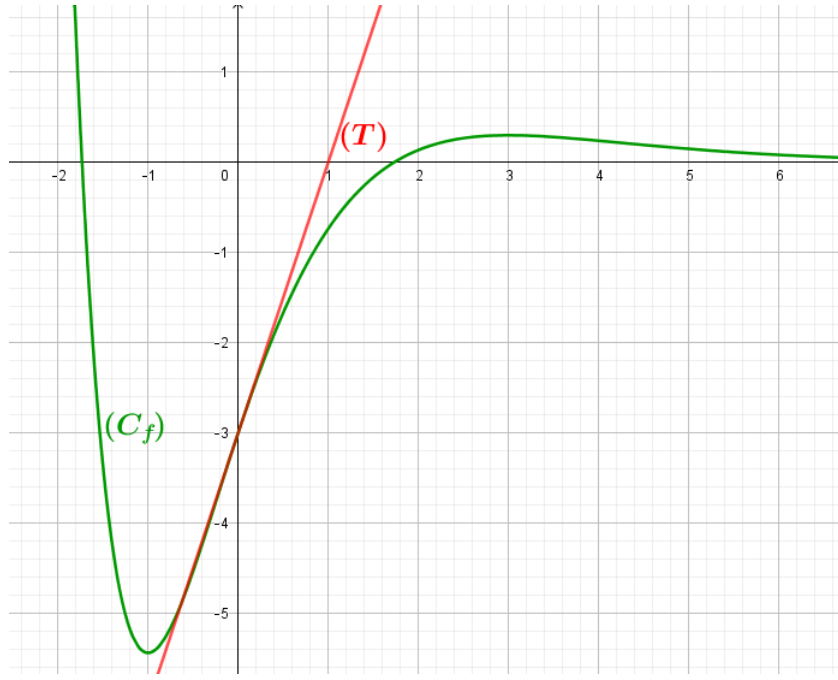
- (4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$
- (5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
- (6) أرسم (T) و (C_f) .
- (7) m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$.

الحل

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
- حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .
- (1) تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.
- $f(0) = -3$ و هذا يعني $c = -3$
- و لدينا $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$
- $f'(0) = 3$ يعني أن $b - c = 3$ و منه $b = 0$.
- $f(\sqrt{3}) = 0$ يعني أن $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ و منه $a = 1$.
- (2) نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$ تصبح $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$
- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ لأنه بوضع $x = 2t$
- نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$
- (3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :
- حساب المشتقة : $f'(x) = (2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 3) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$
- إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1; 3]$.

x	$-\infty$	-1			3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$			$\frac{6}{e^3}$	0

- (4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$.
- (5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :
- $f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ أي أن $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$.
- (6) رسم (T) و (C_f)



(7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ $-m = f(x)$ أي أن $me^x = -(x^2 - 3)$ يكافئ $-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.

المناقشة :

- لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .
- لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .
- لما $-3 > -m > -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين .
- لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم والأخر سالب .
- لما $-3 > -m > 0$ أي أن $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .
- لما $-\frac{6}{e^3} > -m > 0$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان وحل سالب .
- لما $-\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .
- لما $-\frac{6}{e^3} > -m$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021 ولا تنسونا من خالص دعائكم