

الأسئلة الشائعة في دراسة الدوال وكيفية الإجابة عليها

1. السلوك التقاربي / الوضع النسبي لمنحني

السؤال	الإجابة
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $x = a$
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الترتيب معادلته $y = b$
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b$
بين أن المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) .	نبين أن : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته	- إذا كان : $f(x) = ax + b + g(x)$ ، يكفي أن نبين : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. ومعادلته هي : $y = ax + b$. - وإذا لم يكن ذلك نعين العددين a و b من $\mathbb{R}$ كما يلي : $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ و $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$
أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = ax + b$. <u>نطبق نفس الإجابة على السؤال</u> : أدرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) بوضع : $D(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق : $D(x) = f(x) - y$: $D(x) > 0$ معناه أن : (C_f) يقع فوق (Δ) . $D(x) < 0$ معناه أن : (C_f) يقع تحت (Δ) . $D(x) = 0$ معناه أن : (C_f) يقطع (Δ) .
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$	(C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

خاص بشعبي الرياضي والتقني رياضي

2. عناصر تناظر منحني / شفعية دالة

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$.
بين أن : $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	بعد الحساب نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة لـ $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن المستقيم $(d) : x = \alpha$ محور تناظر للمنحني (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) = f(x)$.
بين أن : $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)
بين أن f دالة فردية	نبرهن أن : $f(-x) = -f(x)$
بين أن f دالة زوجية	نبرهن أن : $f(-x) = f(x)$
بين أن : $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : f دالة فردية ، ومبدأ المعلم مركز تناظر لـ (C_f)
بين أن : $f(-x) - f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن f دالة زوجية ، و (C_f) متناظر بالنسبة لمحور الترتيب
بين أن : $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$
بين أن : $f(\alpha - x) - f(x) = \beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\alpha}{2}$

3) إشارة دالة / مبرهنة القيم المتوسطة

• يعطى لك المنحني (C_f) ممثلا في معلم . • حل بيانيا المعادلة $f(x) = 0$ • إستنتج إشارة $f(x)$.	• حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل • بالنسبة للإشارة : المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفواصل فإن $(f(x) < 0)$ ، والمجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفواصل فإن $(f(x) > 0)$.
أحسب $f(\alpha)$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.	نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات : $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $a \leq \alpha \leq b$	• أولا : نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a; b]$. • ثانيا : نحسب كلا من $f(a)$ و $f(b)$ ثم نبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، وعليه يجد α من المجال $[a; b]$ يحقق : $f(x) = k$
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $\alpha \in [a; b]$. أو بصيغة أخرى : بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .	• نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a; b]$. • نحسب $f(a)$ و $f(b)$ ، ثم نجد : $f(a) \times f(b) < 0$. ومنه يوجد α وحيد من المجال $[a; b]$ يحقق : $f(x) = 0$.

4) العدد المشتق وتفسيره الهندسي

السؤال	الإجابة
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L$ أو : $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = L$ ، (L ثابت حقيقي)	• الدالة f تقبل الاشتقاق عند a ، و $f'(a) = L$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ أي : L .
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 0$.	• الدالة f تقبل الاشتقاق عند a ، و $f'(a) = 0$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \pm \infty$	• الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) موازي لحامل محور الترتيب معادلته $x = a$.
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_1$ و : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_2$ ، حيث $(L_1 \neq L_2)$	• الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصف مماسين معامل توجيههما L_1 و L_2 على الترتيب ، وتسمى النقطة A نقطة زاوية .

5 المماسات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ، ثم نحسب كلا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعوض في المعادلة.
أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0	أي نبحت عن الفاصلة x_0 وذلك بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، ثم نكتب معادلة المماس عند x_0 .
عين بيانيا العدد المشتق: $f'(x_0)$. <u>ملاحظة:</u> معامل توجيه المماس $= f'(x_0)$.	نحسب معامل التوجيه: $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ، حيث النقطتين A و B من المماس.
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟	نبحت عن الفاصلة x_0 بحل المعادلة $f'(x) = a$ ، أي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ ؟	نحل المعادلة: معامل توجيه $f'(x) = (d)$ أي $f'(x) = a$. إذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$ ؟	نبحت عن x_0 بحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$. عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات.
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ ؟. (في معلم متعامد ومتجانس).	نبحت عن x_0 بحل المعادلة: $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ ، a هو معامل توجيه (d) . وعدد الحلول يمثل عدد المماسات.

6 أحيانا تعطى لنا عبارة الدالة $f(x)$ بثوابت مجهولة $(a, b, c, \dots)$ ويطلب منا تعيينها

علما أن عدد المعطيات المباشرة وغير المباشرة تكون بعدد الثوابت

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت $(a, b, c, \dots)$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0, y_0)$ يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل ، (أو يقبل ذروة في النقطة $A(x_0, y_0)$).	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ ثم نعين الثوابت المجهولة.
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = mx + k$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

7) رسم منحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f)

إذا كان :	فإن :
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(x)$	g دالة زوجية، ولما $x \geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f) .
$g(x) = f(x) $	(C_g) ينطبق على (C_f) في المجالات التي تكون فيها f موجبة. (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى (xx') في المجالات التي تكون فيها f سالبة.

بالتوفيق لجميع طلبتنا الأعزاء في بكالوريا 2018

الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق