4 الدوال المرجعية

1 الدالة التآلفية

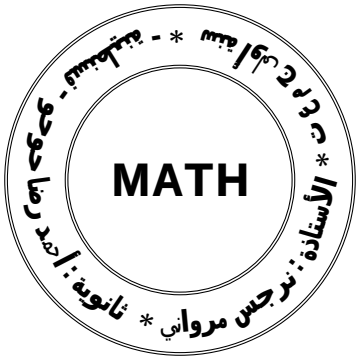
2 الدالة مربع

3 الدالة مقلوب

4 الدالة جذر تربيعي

5 الدائرة المثلثية

6 الدالة جيب تمام و الدالة جيب



merouaninardjiss@gmail.com Merouani nardjiss math-lycée

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : الدالة التآلفية

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال و بعض خواص الدالة التآلفية و الدالة الخطية.
الكفاءات المستهدفة : حساب نسبة التزايد، تحديد إتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto ax+b$.
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مقترح :** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، نعتبر x_1 و x_2 عددين من I حيث $x_1 \prec x_2$. ❶ بين أنه إذا كان العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ سالب تماما فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال I. ❷ بين أنه إذا كان العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ موجب تماما فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال I. ◁ نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x+4$. ❶ بفرض x_1 و x_2 عنصرين من D_f حيث $x_1 \prec x_2$، أحسب العددين $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ و $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$ ثم استنتج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g. ❷ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ أنشئ التمثيل البياني لكل الدالة .	30د
البناء و الترسيمة	**7 نسبة تزايد دالة** **تعريف** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نعتبر العددين x_1 و x_2 من I حيث $x_1 \prec x_2$. نسمي العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ بنسبة تزايد الدالة f بين العددين x_1 و x_2 **مبرهنة** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نعتبر العددين x_1 و x_2 من I حيث $x_1 \prec x_2$. تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا و فقط إذا كان العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ موجبا تماما. تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا و فقط إذا كان العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ سالبا تماما.	30 د

www.dzexams.com

8 الدالة التآلفية

تعريف

نسمي دالة تآلفية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

مثال (1)

الدالة $f : x \longmapsto 5x + 2$ هي دالة تآلفية حيث $a = 5$ و $b = 2$

مـــلاحظة:

- إذا كان $b = 0$ فإنّ $f : x \longmapsto ax$ تسمى دالة خطية.
- إذا كان $a = 0$ فإنّ $f : x \longmapsto b$ تسمى دالة ثابتة.

❶ الخاصية المميزة للدوال التآلفية :

مبرهنة

تكون الدالة f تآلفيه ، إذا وفقط إذا كانت النسبة $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ثابتة من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2.

مثال (2)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 4x - 1$

من أجل x_1 و x_2 عددان مختلفان من $\mathbb{R}$ فإن :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{4x_1 - 1 - (4x_2 - 1)}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 4$$

بما أن النسبة $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ثابتة فإن الدالة f تآلفية.

---

❷ اتجاه تغير الدالة التآلفية :

مبرهنة

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

- ❖ إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $a \prec 0$ فإن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $a \succ 0$ فإن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

www.dzexams.com

البناء و الترسيمة

النقويم

30د

❸ جدول تغيرات الدالة التآلفية:

إذا كان $a \prec 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

إذا كان $a \succ 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

❹ التمثيل البياني للدالة التآلفية:

مبرهنة

التمثيل البياني لدالة تآلفية معرفة بالعبارة $f(x) = ax + b$ **في معلم** $(O, \vec{i}; \vec{j})$ **هو المستقيم** (D) **الذي معامل توجيهه** a **و يشمل النقطة ذات الإحداثيات** $(0; b)$ **حيث** $y = ax + b$ **هي المعادلة المبسطة للمستقيم** (D).

تطبيق

f **دالة تالفية معرفة على** $\mathbb{R}$ **حيث :** $f(x) = ax + b$

① عين a **و** b **اذا علمت أن :** $f(1) = 2$ **و** $f(3) - f(-1) = -2$

② **أدرس إتجاه تغير الدالة** f **وشكل جدول تغيرا ا .**

③ في **المستوي المنسوب الى المعلم** $(O, \vec{i}; \vec{j})$ **أرسم التمثيل البياني للدالة** f.

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : الدالة مربع

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .
الكفاءات المستهدفة : تحديد اتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة مربع .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإطلاق	**نشاط مقترح :** لتكن الدالة المعرفة بـ : $f(x) = x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f. ❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$. ❸ شكل جدول تغيرات الدالة ثم استنتج القيمة الحدية الصغرى لها. ❹ أكمل الجدول التالي : ◄ إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0; +\infty[$. ❺ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتائج بيانيا. ◄ أكمل التمثيل البياني للدالة على المجال $]-\infty; 0]$.	30د

x	0	1	2	3
$f(x)$				

9 الدالة مربع

البناء و الترسيم

تعريف

الدالة مربع هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 و من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $f(x) = x^2$

❶ اتجاه تغير الدالة مربع :

30 د

مبرهنة

الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

❷ جدول تغيرات الدالة مربع :

مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

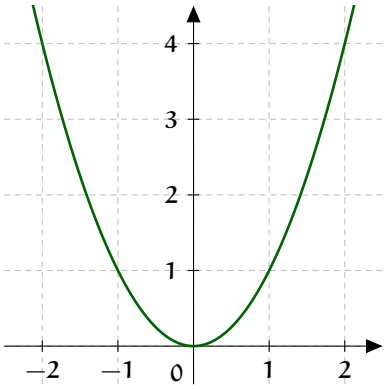
www.dzexams.com

❸ شفعية الدالة مربع :

خاصية

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$ **لدينا** $(-x) \in \mathbb{R}$ **و عليه** $\mathbb{R}$ **متناظرة بالنسبة لمبدأ المعلم حيث :** $(-x)^2 = x^2$ **أي** $f(-x) = f(x)$ **و منه نستنتج أنّ الدّالة مربّع زوجية أي تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.**

❹ التمثيل البياني للدالة مربع :



مبرهنة

التمثيل البياني لدالة مربع هو مجموعة النقط $M(x, y)$
حيث : $y = x^2$
التمثيل البياني للدالة مربع هو قطع مكافئ معادلته $y = x^2$
وذروته مبدأ المعلم

تطبيق 06 ص 106

تطبيق 02 :

30د

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مربع) حصرا للعدد x^2 **في كل حالة :**

① $\frac{1}{2} \preceq x \preceq 1$ ② $-4 \preceq x \preceq -2$ ③ $x \in [-3, 1[$

10 توظيف الدالة مربع لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto (x + a)^2 + b$

طريقة :

لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto (x + a)^2 + b$:

✍ **نحدد إشارة الدالة التآلفية** $x \mapsto x + a$ **على المجالين** $]-\infty; -a]$ **و** $[-a; +\infty[$.

✍ **نحدد اتجاه تغير الدالة** $x \mapsto (x + a)^2$ **على المجالين** $]-\infty; -a]$ **و** $[-a; +\infty[$ **ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة** f.

لتمثيل المنحنى البياني للدالة f

✍ **نبين أن النقطة** $M(x, y)$ **من** (C_f) **إذا و فقط إذا كانت النقطة** $N(x + a, y - b)$ **من منحنى الدالة مربع.**

✍ **نرسم** (C_f) **حيث** (C_f) **هو صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه** $(-a; b)$.

تطبيق :

لتكن الدالة g **المعرفة بـ :** $f : x \mapsto (x - 1)^2 + 1$، (C_f) **تمثيلها البياني في معلم م.م** $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. **أدرس اتجاه تغير الدالة** g **و شكل جدول تغيرا ا.**
2. **بين أنه من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ **فإن** $g(x) - g(1) \geq 0$. **ماذا تستنتج؟**
3. **إشرح كيفية رسم** (C_g) **ثم أنشئه بعناية.**

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : الدالة مقلوب

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .
الكفاءات المستهدفة : تحديد اتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة مقلوب .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مقترح :** لتكن الدالة المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. ❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f. ❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ ثم شكل جدول تغيراتها. ❸ أكمل الجدول التالي : ◄ إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $]0;+\infty[$. ❹ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتائج بيانيا. ◄ أكمل التمثيل البياني للدالة على المجال $]-\infty;0[$.	30د
البناء و الترسيمة	**11 الدالة مقلوب** **تعريف** الدالة مقلوب هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x مقلوبه $\frac{1}{x}$ و من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $f(x)=\frac{1}{x}$ **❶ اتجاه تغير الدالة مقلوب :** **مبرهنة** الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و كذلك متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$ **❷ جدول تغيرات الدالة مقلوب :** مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :	30 د

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	||	↘

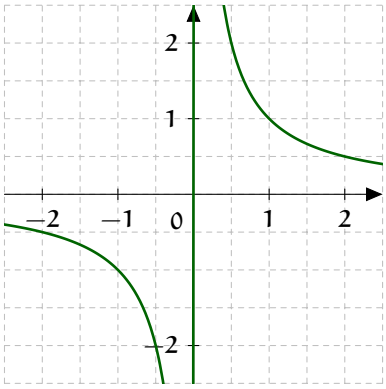
www.dzexams.com

❸ شفعية الدالة مقلوب :

خاصية

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}^*$ **لدينا** $(-x) \in \mathbb{R}^*$ **و عليه** $\mathbb{R}^*$ **متناظرة بالنسبة لمبدأ المعلم حيث :** $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ **أي** $f(-x) = -f(x)$ **و منه نستنتج أنّ الدّالة مقلوب فردية أي تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.**

❹ التمثيل البياني لدالة مقلوب :



مبرهنة

التمثيل البياني لدالة مقلوب هو مجموعة النقط $M(x, y)$
حيث : $y = \frac{1}{x}$
التمثيل البياني للدالة مربع هو قطع زائد معادلته $y = \frac{1}{x}$

تطبيق 02 :

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مقلوب) حصرا للعدد $\frac{1}{x}$ **في كل حالة :** 30د

① $-2 \preceq x \prec -\frac{1}{2}$ ② $2 \preceq x \preceq 4$

12 توظيف الدالة مقلوب لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x+a} + b$

30 د

طريقة :

لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x+a} + b$ **:**

✍ **نحدد إشارة الدالة التآلفية** $x \mapsto x + a$ **على المجالين** $]-\infty; -a[$ **و** $]-a; +\infty[$.

✍ **نحدد اتجاه تغير الدالة** $\frac{1}{x+a}$ **على المجالين** $]-\infty; -a[$ **و** $]-a; +\infty[$ **ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة f.**

لتمثيل المنحنى البياني للدالة f

✍ **نبين أن النقطة** $M(x, y)$ **من** (C_f) **إذا و فقط إذا كانت النقطة** $N(x+a, y-b)$ **من منحنى الدالة مقلوب**

✍ **نرسم** (C_f) **. حيث** (C_f) **هو صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه** $(-a; b)$.

تطبيق :

لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h : x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$، (C_h) **تمثيلها البياني في معلم م.م** $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. **عين** D_f
2. **بين أنه من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ **فإن** $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$
3. **أدرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيرا ت.**
4. **إشرح كيفية رسم** (C_h) **ثم أنشئه بعناية.**

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : الدالة جذر تربيعي

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .
الكفاءات المستهدفة : تحديد اتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

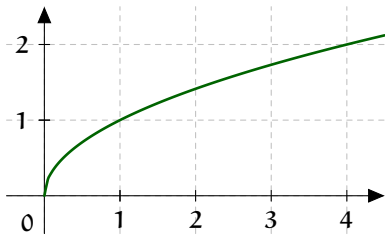
المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مقترح :** لتكن الدالة المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. ❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f. ❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها. ❸ أكمل الجدول التالي : إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0;4]$.	30د
البناء و الترسيمة	**13 الدالة جذر تربيعي** **تعريف** الدالة جذر تربيعي هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب جذره التربيعي $\sqrt{x}$ و من أجل كل عدد حقيقي x موجب نكتب $f(x)=\sqrt{x}$ **❶ اتجاه تغير الدالة جذر تربيعي :** **مبرهنة** الدالة جذر تربيعي متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ **❷ جدول تغيرات الدالة جذر تربيعي :** مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :	30 د

x	$f(x)$
0	
1	
2	
4	

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

www.dzexams.com

❸ التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي:



مبرهنة

التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي هو مجموعة النقط $M(x,y)$ **حيث :** $y=\sqrt{x}$

تطبيق 02 :

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مربع) حصرا للعدد x^2 **في كل حالة :**

① $0 \preceq x \prec 4$ ② $2 \preceq x \preceq 4$

15د

14 توظيف الدالة جذر تربيعي لدراسة اتجاه تغير الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x+a}+b$

طريقة :

لدراسة اتجاه تغير الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x+a}+b$

✍ **نحدد إشارة الدالة التآلفية** $x \mapsto x+a$ **على المجال** $[-a;+\infty[$.

✍ **نحدد اتجاه تغير الدالة** $x \mapsto \sqrt{x+a}$ **على المجال** $[-a;+\infty[$ **ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة f.**

لتمثيل المنحنى البياني للدالة f

✍ **نبين أن النقطة** $M(x,y)$ **من** (C_f) **إذا و فقط إذا كانت النقطة** $N(x+a,y-b)$ **من منحنى الدالة جذر تربيعي.**

✍ **نرسم** (C_f) **حيث** (C_f) **هو صورة منحنى الدالة جذر تربيعي بالإنسحاب الذي شعاعه** $(-a;b)$.

تطبيق :

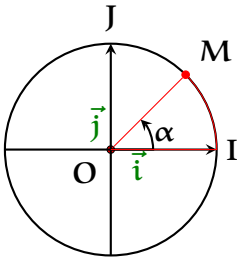
لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h: x \mapsto h: x \mapsto \sqrt{x+2}+1$، (C_h) **تمثيلها البياني في معلم م.م** $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. **أدرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيرا ا.**
2. **إشرح كيفية رسم** (C_h) **ثم أنشئه بعناية.**

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 03 ساعة	موضوع الحصة : الدائرة المثلثية

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .
الكفاءات المستهدفة : معرفة الراديان والتحويل من الدرجة إلى الراديان والعكس .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	نشاط 04 ص 84	30د
البناء و الترسيمة	**15 الدائرة المثلثية** **تعريف** نقول عن دائرة (C) إ ا موجهة إذا اخترنا عليها اتجاها للحركة، حيث **الاتجاه المباشر** (الموجب) هو الاتجاه المخالف لاتجاه دوران عقارب الساعة و **الاتجاه غير المباشر** (السالب) هو الاتجاه الموافق لاتجاه دوران عقارب الساعة. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي، الدائرة الموجّهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 تسمى دائرة مثلّثية. **❶ قيس زاوية بالراديان :** **تعريف** (C) دائرة مثلثية، M نقطة من الدائرة (C)، نسمي فيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ العدد الحقيقي x حيث x هو طول القوس IM و نكتب $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = x\,rad$  **❷ العلاقة بين قيس زاوية بالراديان و بالدرجة :** هناك تناسب بين قياس الزاوية بالدرجة و قياسها بالرديان ، وعليه فإن زاوية قياسها $180°$ تكافئ زاوية قياسها πrad $180° \longrightarrow \pi\,rad$ $d° \longrightarrow \alpha\,rad$ مثال (1) قيس الزاوية $45°$ بالراديان هو $180° \longrightarrow \pi\,rad$ $45° \longrightarrow \alpha\,rad$ $\alpha = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad$ تطبيق 50 ص 110 :	30 د

www.dzexams.com

❸ المستقيم العددي و الدائرة المثلثية :

نشاط مقترح :

(C) دائرة مثلثية مرفقة بالمعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$، (D) مماس للدائرة (C) في النقطة I

نقوم بلف المستقيم (D) حول الدائرة (C)، حيث نلف نصف المستقيم $[IK]$

على الدائرة (C) في الإتجاه المباشر و نلف نصف المستقيم $[IK']$

على الدائرة (C) في الإتجاه غير المباشر

m نقطة من (D) فاصلتها x في المعلم الخطي $(A; I)$.

❶ **على كم نقطة من (C) تنطبق m .**

❷ **كل عدد حقيقي x كم نقطة تقابله من (C) .**

❸ **كل نقطة من (C) هي صورة لكم عدد حقيقي .**

ملاحظات:

❖ **طول القوس IM هو طول القطعة $[IM]$ وهو $|x|$.**

❖ **عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$ تتحرك M على (C) في الاتجاه المباشر (هنا x موجب)**

❖ **عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في الاتجاه المعاكس للشعاع $\overrightarrow{IK}$ تتحرك M على (C) في الاتجاه غير المباشر (هنا x سالب)**

❖ **كل موضع للنقطة M من الدائرة المثلثية (C) يقابله لا اية من الأعداد الحقيقية x من الشكل : $x = \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$**

مثال (2)

صورة العدد الحقيقي 0 على الدائرة (C) هي النقطة I

صورة العدد الحقيقي $\frac{\pi}{2}$ على الدائرة (C) هي النقطة J

صورة العدد الحقيقي $-\frac{\pi}{2}$ على الدائرة (C) هي النقطة J'

صورة العدد الحقيقي π على الدائرة (C) هي النقطة I'

---

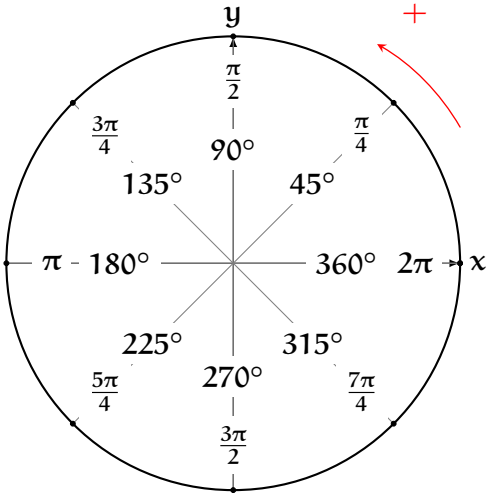
❹ التعليم على الدائرة المثلثية :

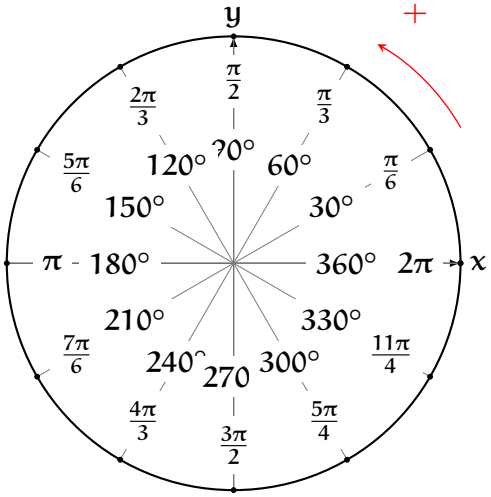
◄ وضع أقياس الزوايا الشهيرة :

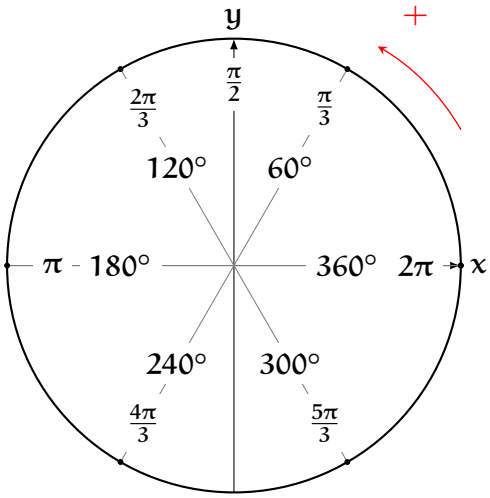
قيس الزاوية بالدرجة	30	45	60	90
قيس الزاوية بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

30د

www.dzexams.com







◄ وضع أقياس مستنتجة من أقياس الزوايا الشهيرة :

طريقة :

نعين الصورة النقطة M لعدد حقيقي x على الدائرة المثلثية كالآتي:

◄ **إذا كان** $\alpha x \succ 0$ ، M **تقطع فوسا طوله** x **في الاتجاه المباشر.**

◄ **إذا كان** $\alpha x \prec 0$ ، M **تقطع فوسا طوله** $|x|$ **في الاتجاه غير المباشر**

✍ في **حالة** $|x| \succ 2\pi$ **باستعمال القسمة نكتب** x **على الشكل** $x = |k| \times 2\pi + \alpha$ **حيث** k **هو عدد الدورات و** α **عدد حقيقي ينتمي إلى المجال** $]-\pi;\pi]$.

مثال تطبيقي :

نريد تعليم النقط A، B، C **و** D **صور الأعداد التالية على الدائرة المثلثية:** $\frac{7\pi}{4}$، $\frac{35\pi}{4}$، $-\frac{2017\pi}{6}$، $-\frac{16\pi}{3}$ **على الترتيب.**

الحل :

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4}$$
$$= \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$
$$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

A هي صورة $\frac{-\pi}{4}$

$$\frac{35\pi}{4} = \frac{32\pi + 3\pi}{4}$$
$$= \frac{32\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$
$$= 8\pi + \frac{3\pi}{4}$$
$$= 4 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$$

B هي صورة $\frac{3\pi}{4}$

$$-\frac{2017\pi}{6} = \frac{-2016\pi - \pi}{6}$$
$$= \frac{-2016\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$
$$= -336\pi - \frac{\pi}{6}$$
$$= -186 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

C هي صورة $\frac{-\pi}{6}$

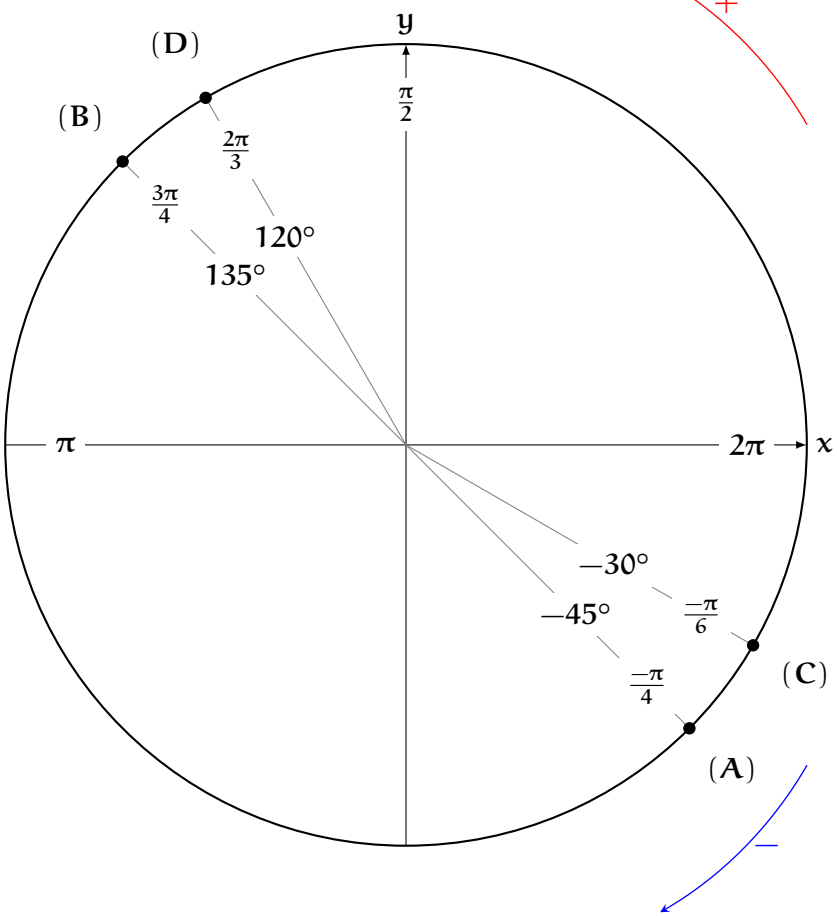
$$-\frac{16\pi}{3} = -\frac{18\pi + 2\pi}{3}$$
$$= \frac{-18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$
$$= -6\pi + \frac{2\pi}{3}$$
$$= -3 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

D هي صورة $\frac{2\pi}{3}$

www.dzexams.com

د30

البناء و الترسيمة



تطبيق 51 ص 110 :

www.dzexams.com

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2019 — 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 03 ساعة	موضوع الحصة : الدالة جيب و جيب التمام

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .
الكفاءات المستهدفة : تحديد اتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة جيب و الدالة جيب التمام .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت .

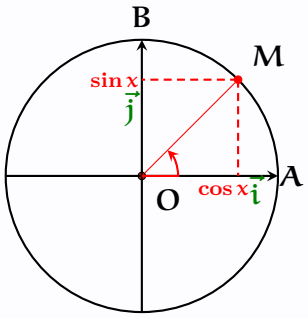
المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	نشاط 03 ص 84	20د

❶ جيب تمام و جيب عدد حقيقي :

تعريف

(C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس مباشر، نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$
لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x هو القيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$

- جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونرمز له بـ : $\cos x$
- جيب العدد x هو ترتيب النقطة M و نرمز له بـ : $\sin x$



نتيجة

إذا كان x قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي هو كذلك قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ أي x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة
و بالتالي نستنتج $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ و $\cos(x+2k\pi)=\cos x$.

البناء و الترسيمة		30 د

ملاحظة : إذا كان $\cos x\neq 0$ فإن الظل هو العدد الحقيقي x الذي نرمز له بـ : $\tan x$ حيث $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

❷ حساب جيب تمام و جيب عدد حقيقي :

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
- $-1\leq \cos \leq 1$
- $-1\leq \sin \leq 1$

www.dzexams.com

البناء و الترسيم

x عدد حقيقي صورته على الدائرة المثلثية (C) هي $M(\cos x; \sin x)$

◄ حسب نظرية فيثاغورس نجد $OM^2 = OA^2 + OB^2$ حيث $OM = 1$ و منه $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

◄ بما أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ معناه أن $\cos^2 x \leq 1$ أي $|\cos x| \leq 1$ و عليه $-1 \leq \cos \leq 1$

بنفس الطريقة نجد $-1 \leq \sin \leq 1$

❸ جيب تمام و جيب أقياس الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تطبيق 01 :

أحسب جيب تمام و جيب الأعداد التالية : $\frac{13\pi}{2}$، $\frac{9\pi}{4}$، $\frac{19\pi}{3}$

20د

النقويم

نشاط :

x عدد حقيقي صورته على الدائرة المثلثية هي M

❶ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $(-x)$، ماذا تلاحظ ؟.

◄ عين جيب تمام و جيب العدد $(-x)$

❷ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $x + \pi$، ماذا تلاحظ ؟.

◄ عين جيب تمام و جيب العدد $x + \pi$

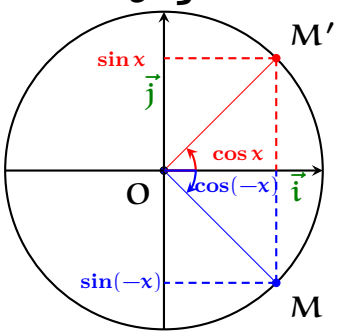
❸ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $x - \pi$، ماذا تلاحظ ؟.

◄ عين جيب تمام و جيب العدد $x - \pi$

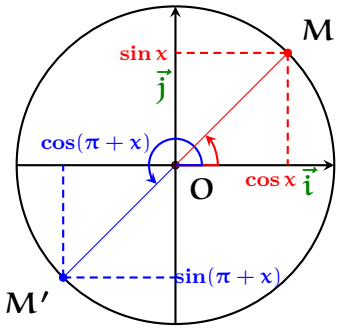
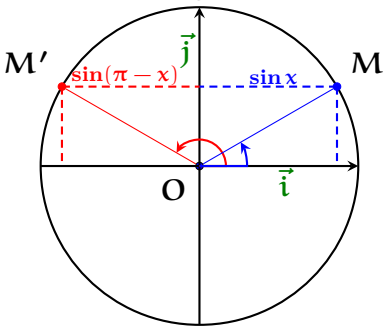
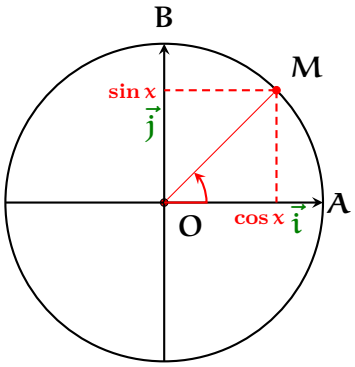
البناء و الترسيم

❹ جيب تمام و جيب أقياس مستنتجة من أقياس زوايا شهيرة:

M و M' صورتا العددان x و x' على الدائرة المثلثية

	الحالة		العلاقة المثلثية المستنتجة
(1)	$x' = -x$	M و M متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل 	$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$

www.dzexams.com

$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$	M و M متناظرتان بالنسبة لمبدأ المعلم 	$x = x' + 2\pi k$	(2)
$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$	M و M' متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب 	$x' = x - \pi$	(3)
$\begin{cases}\cos(x+2\pi k)=\cos x\\ \sin(x+2\pi k)=\sin x\end{cases}$	M و M' منطبقتان 	$x' = x + 2\pi k$	(4)

تطبيق 52 ص 110

30د

16 الدالة جيب تمام

تعريف

الدالة جيب تمام هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $\cos x$

ملاحظات :

◄ مما سبق نعلم أن $\cos(-x) = \cos x$ و عليه الدالة جيب تمام **زوجية** أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

◄ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ نقول أن الدالة $\cos$ دالة دورية دورها هو 2π

www.dzexams.com

❶ إتجاه تغير الدالة جيب تمام :

خاصية

❶ **على المجال** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الأول حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\cos x \succ \cos x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "cos" متناقصة تماما على** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

❶ **على المجال** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الثاني حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\cos x \succ \cos x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "cos" متناقصة تماما على** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

❶ **على المجال** $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الثالث حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\cos x \prec \cos x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "cos" متزايدة تماما على** $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

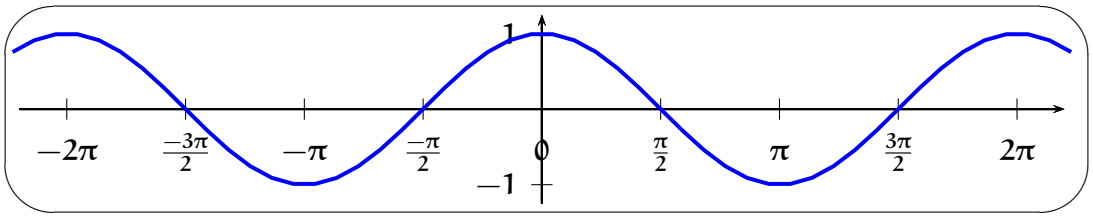
❶ **على المجال** $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الرابع حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\cos x \prec \cos x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "cos" متزايدة تماما على** $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

❷ جدول تغيرات الدالة جيب تمام :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	0

❸ التمثيل البياني للدالة جيب تمام :



17 الدالة جيب

تعريف

الدالة جيب هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ **و التي ترفق بكل عدد حقيقي** x **العدد الحقيقي** $\sin x$

ملاحظات :

◄ **مما سبق نعلم أن** $\sin(-x) = -\sin x$ **و عليه الدالة جيب تمام فردية أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.**

◄ **من أجل كل عدد حقيقي** x **لدينا:** $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ **نقول أن الدالة** $\sin$ **دالة دورية دورها هو** 2π

❶ إتجاه تغير الدالة جيب :

www.dzexams.com

خاصية

❶ **على المجال** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الأول حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\sin x \prec \sin x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "sin" متزايدة تماما على** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

❶ **على المجال** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الثاني حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\sin x \succ \sin x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "sin" متناقصة تماما على** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

❶ **على المجال** $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الثالث حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\sin x \succ \sin x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "sin" متناقصة تماما على** $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

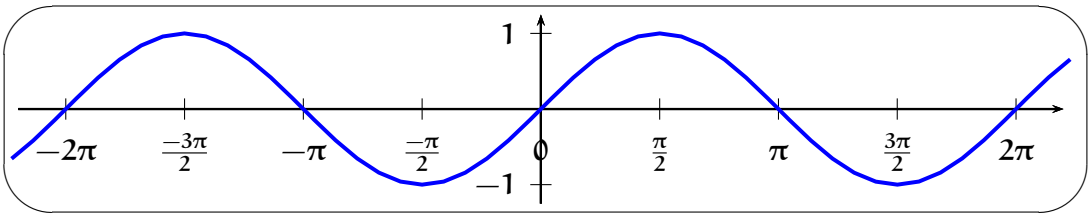
❶ **على المجال** $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$:

العددان الحقيقيان x **و** x' **ينتميان إلى المجال** : $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ ، **صورتاهما** M **و** M' **تتغيران على الربع الرابع حيث إذا كان** $x \prec x'$ **فإن** $\sin x \prec \sin x'$ **و منه نستنتج أن الدالة "sin" متزايدة تماما على** $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

❷ جدول تغيرات الدالة جيب تمام:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

❸ التمثيل البياني للدالة جيب تمام:



تطبيق 54 – 55 ص 110

www.dzexams.com