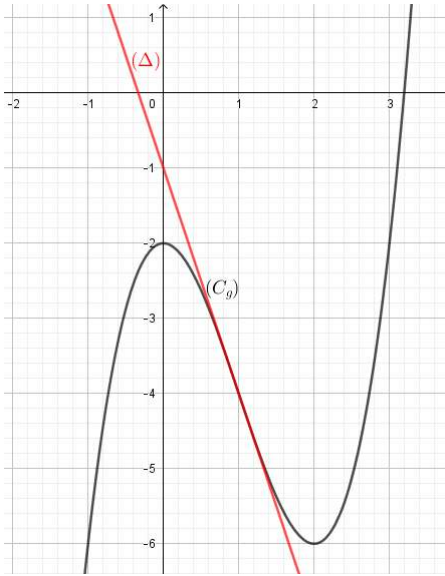


الجزء الأول :



الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.
المستقيم (D) هو مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1.
بقراءة بيانية :

- (1) أحسب كل من : $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(1)$ و $g''(1)$.
- (2) شكل جدول تغيرات الدالة g .
- (3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3; \frac{7}{2}\right]$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$.
- (4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
- (2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$ ثم إستنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .
- (4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
- (5) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
- (6) بين أن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصر ل $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-2} .
- (7) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.
- (8) جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات .
- (9) أنشئ (Δ) , (C_f) .
- (10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

الجزء الثالث :

- الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب : $h(x) = \frac{|x^3 + 1|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني .
- (1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .
- (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة -1 ثم فسر النتيجة هندسيا .
- (3) إستنتج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) .

الجزء الأول :

(1) حساب $g''(1), g'(1), g'(2), g'(0)$:

• $g'(0) = g'(2) = 0$ قيم حدية محلية .

• $g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3$: منه $A(1; -4)$ و $B(0; -1)$ و $g''(1) = 0$ المماس (D) نختار نقطتين كيفيتين من المماس (D) يغير وضعيته عند نقطة التماس و بالتالي فهو يخرق المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 التي تعتبر نقطة إنعطاف .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	0	+
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$

(3) تحديد إشارة $g(3)$ و $g(\frac{7}{2})$:

من البيان نلاحظ أن : $g(3) < 0$ و $g(\frac{7}{2}) > 0$.

إستنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من $3; \frac{7}{2}$ بحيث : $g(\alpha) = 0$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $3; \frac{7}{2}$ و $g(3) \times g(\frac{7}{2}) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $3 < \alpha < \frac{7}{2}$ يحقق : $g(\alpha) = 0$.

التحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$:

لدينا : $3; \frac{7}{2} \subset]3.1; 3.2[$ إذن الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[3.1; 3.2]$ و $g(3.1) \approx -1.039$ و $g(3.2) \approx 0.048$ أي : $g(3.1) \times g(3.2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $3.1 < \alpha < 3.2$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

(4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني :

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور الترتيب) للمنحنى (C_f) معادلته $x = 1$.

(3) تبيان أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) \times g(x)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(x-1)$ و $g(x)$ لأن $(x-1)^4 > 0$

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$(x-1)$	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]\alpha; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) حساب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x]$ ثم إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 2$ أي $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x - 2] = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$ و منه نستنتج أن المستقيم

$y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

(5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = f(x) - (x+2) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 1 - (x+2)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة الفرق من إشارة البسط $3x-1$ لأن المقام موجب تماما $(x-1)^2 > 0$.

$$3x-1=0 \text{ أي } 3x=1 \text{ أي } x=\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	$+$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع في النقطة $A(\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

(6) تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

طريقة 1 : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha)$ بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند $x = \alpha$ فإن : $f'(\alpha) = 0$.

طريقة 2 : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) = f'(\alpha) = \frac{(\alpha-1) \times g(\alpha)}{(\alpha-1)^4} = 0$ لأن $g(\alpha) = 0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته : $y = f(\alpha)$.

(7) تبيان أن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم إعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) - \left[3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \right] = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2} - 3 - \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 + 1 - 3(\alpha-1)^2 - 6\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2}{(\alpha-1)^2} = \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = 0$$

إذن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$

حصرا لـ $f(\alpha)$:

نعلم أن : $3.1 < \alpha < 3.2$ أي : $(3.1-1)^2 < (\alpha-1)^2 < (3.2-1)^2$ أي : $4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84$ أي : $\frac{1}{4.84} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{4.41}$

أي : $0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 0.23$ ولدينا أيضا : $18.6 < 6\alpha < 19.2$ و منه : $0.2 \times 18.6 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 0.23 \times 19.2$ أي : $3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 4.42$ إذن : $6.72 < f(\alpha) < 7.42$

(8) كتابة معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$:

$$(T) : y = f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right)$$

و منه : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{24}$ و $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

$$(T) : y = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{24} = x + \frac{1}{3} + \frac{13}{24} = x + \frac{8}{24} + \frac{13}{24} = x + \frac{21}{24} = x + \frac{7}{8}$$

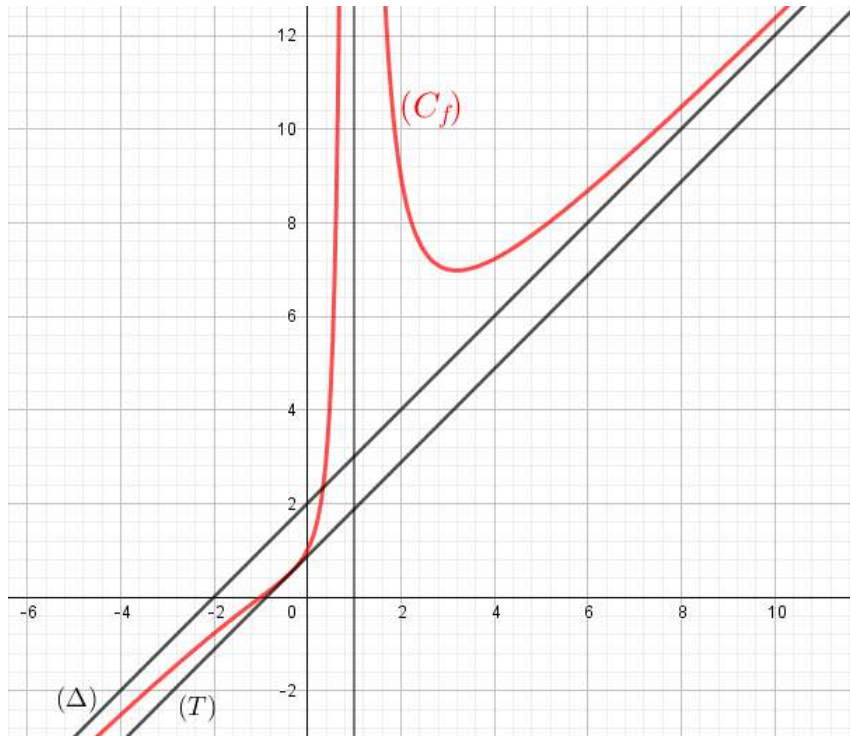
(9) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = 0 \text{ أي } x^3 + 1 = 0 \text{ و منه } x = -1 \text{ إذن : } (C_f) \cap (xx') = \{A(-1; 0)\}$$

$$\text{مع محور الترتيب : نحسب } f(0) \text{ أي : } f(0) = \frac{0^3 + 1}{(0-1)^2} = 1 \text{ إذن : } (C_f) \cap (yy') = \{B(0; 1)\}$$

إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



(10) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

- حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + m$.
- $m < \frac{7}{8}$: لا توجد حلول.
- $m = \frac{7}{8}$: حل مضاعف سالب.
- $m = 1$: حلين أحدهما معدوم والآخر سالب.
- $1 < m < 2$: حلين مختلفين في الإشارة.
- $m = 2$: حل وحيد موجب.
- $m > 2$: حلين موجبين.

الجزء الثالث :

(1) كتابة الدالة h بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة $x^3 + 1$ من إشارة $x + 1$ لأن : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ و $x^2 - x + 1 > 0$ إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^3 + 1$	-	0	+

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = f(x) : x \in [-1; 1[\cup]1; +\infty[\\ -\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} = -f(x) : x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند (-1) :

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{(x + 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الاشتقاق عند (-1) من اليمين .
دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليسار :

$$\lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} = \lim_{x \leq -1} \frac{-\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}}{x+1} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^3 + 1)}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \leq -1} \frac{-(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الاشتقاق عند (-1) من اليسار .

بما أن : $\lim_{x \geq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} \neq \lim_{x \leq -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)}$ فإن الدالة h لا تقبل الاشتقاق عند القيمة (-1) .

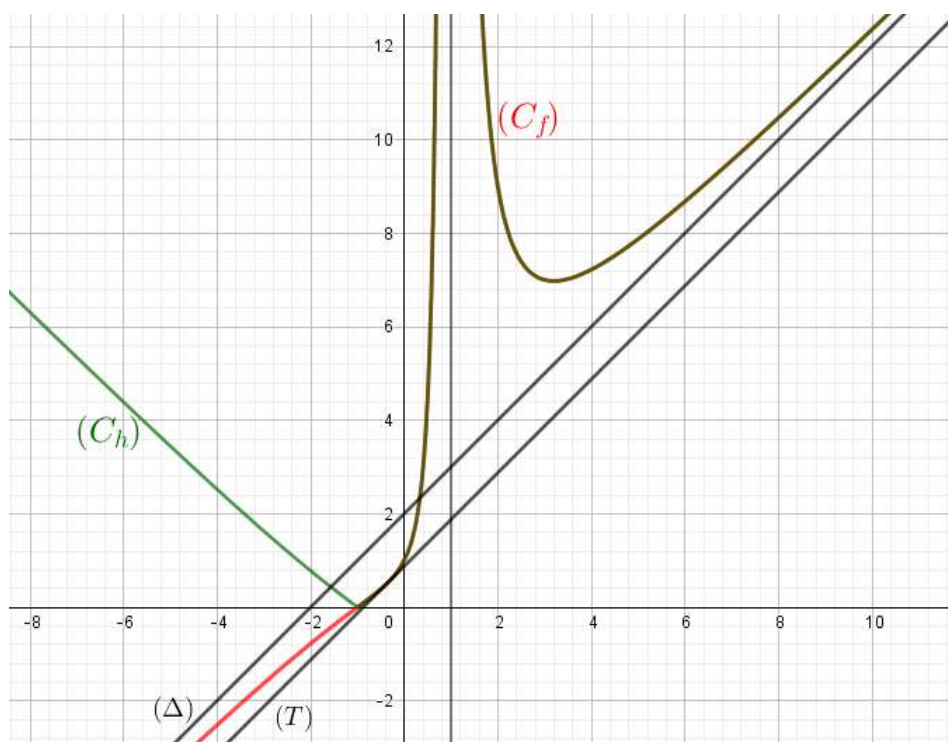
التفسير الهندسي :

المنحنى (C_h) يقبل عند النقطة $A(-1; f(-1))$ نصفي مماسين حيث $A(-1; 0)$ هي نقطة زاوية .

(3) إستنتاج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

(C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال $] -\infty; -1[$.



بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم