مجلة 5 min Maths tay at home

من انجاز الأستاذ: شعبان أسامة

2AS

السنة الثانية ثانوي

الشعب العلمية

محاور الفصل الثالث

1. الجداء السلمي
2. المتتاليات العددية
3. الهندسة في الفضاء
4. نموذج اختبار

Fb/5min Marths
chbnoussama@gmail.com
Instagram/5minmaths

تلمسان أفريل 2020

www.dzexams.com

وفقني الله عز و جل في اتمام هذا العمل البسيط خلال فترة عطلة الربيع ليكون لكم مرجعا متواضعا .

أتمنى لكم من صميم قلبي النجاح و التوفيق في المشوار الدراسي خاصة تلامذتي في ثانوية "بوحميدي الطاهر"

أقدم هذا العمل كهدية علمية لجميع محبي المادة

تحياتي لعائلتي الحبيبة

أ.شعباه

شكر خاص للزملاء الأساتذة على الأعمال المقدمة

أ.شبورو ابراهيم

أ.خاتر الياس

أ.خيار هلال

www.dzexams.com

5 min Maths

محاور الفصل الثالث

وجلة 2AS tay at home

تجدون فيها:

www.dzexams.com

Alaâ Ourmassi
لم أستطع انتظار النجاح لذا ذهبت اليه , والله غير الصفحة min math 5 عاونتني بزاف .

Lahcen Ben Kassem
كنتم في خدمة العلم والانسان 1

Super fan
Mī Lā
انت لست متأخر بل في الوقت المناسب

Sel MA
ما دمت تستطيع أن تحلم، فأنت قادر على تحقيق حلمك و جعله حقيقة.

ريم الساعدي
اخر واحدة وسأتوقف
لا تتخلى ولا تتوقف عن فعل الاشياء التي تحبها

Sel MA
صوب دائما نحو القمر، فإن لم تصب القمر ستصيب أحد النجوم

إبراهيم بوسكين
كن أنت النسخة الوحيدة من نفسك و لا تكن مجرد نسخة مقلدة لشخص آخر كن أنت الأساس, أنت الأصل, أنت الشخص الذي يتمنى الجميع أن يكونوا مثله و اترك التقليد للأشخاص الأقل شأنا، للأشخاص الأقل طموحا للأشخاص الذين لا يملكون هدفا في حياتهم.

ريم الساعدي
لاشيء يفوق الارادة والعزيمة

Super fan
طه ياسين
إذا كانت النفوس كبارا ** تعبت في مرادها الأجسام

Hiba Lr
لا تضع حدودا لأحلامك، و إسع لتحقيقها دون تردد

Super fan
Khattar Julin
من كبوة إلى كبوة حتى نصل للقمة

Super fan
Flø Rā
قم و بادر بالعمل فلا مستحيل بالأمل

فارسة القرآن
لا حياة مع اليأس و لا يأس مع الحياة

Ōŋ Jiŋe
سواءا قلت اقدر او لااقدر ..في كلا الحالتين انت محق
انت وحدك من تحدد مصيرك ارادتك هي وقودك وحافزك للنجاح صح حلمك
نصب عينيك
سننجح باذن الله

Ël Ãmãl Ëlãkhïr
شدة و تزول و ربي ان شاء الله يوفقكم

Amjad Loulou
استعدو للبكالوريا و اعتمدو على انفسكم

براي صدام
الشيء الجميل في العلم ان لا احد يستطيع اخذه منك.

Sou Mia
على قدر حلمك تتسع الارض

Sondos Fadwa
الحلم هو مجرد حلم اما الهدف فهو حلم له خطه و موعد نهائي لتحقيقه

Alwasim Elghali
تأكد أن الله لن يضع حلما في عقلك إلا وقد زودك بالقدرات التي تمكنك من تحقيقه
أنتم أملنا للسنة القادمة BAC 2021

Super fan
Gherdaoui A-lazize
إن لم تتألم لن تتعلم .

ريم الساعدي
الفشل اول خطوات النجاح

Super fan
Ad Îs Kivõk
لا تجعل خوفك من الفشل يؤثر على رغبتك في النجاح.

Abd Eldjalil Euldji
إن الشباب إذا سما بطموحه**** جعل النجوم مواطئ الأقدام

مريم البتول
إياك و الرضى عن نفسك فإنه يصطرك للخمول، و إياك و العجب فإنه يورطك في الحمق و إياك و الغرور فإنه يظهر للناس نقائصك كلها و لا يخفيها إلا عليك

Hiba Lr
لا تضع حدودا لأحلامك، و إسع لتحقيقها دون تردد

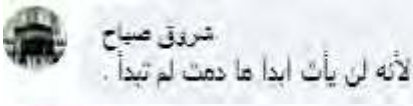
Sondos Fadwa
لقد خلقنا لنمارس الإصرار ..هكذا نستطيع معرفة من نحن

Bembac Bembac
اذا كنت تملك قلما وعقلا فانه بامكانك النجاح لكن اذا كان لديك ارادة فانك ستنجح باذن الله

جرعة أمل

www.dzexams.com

جرعة أمل



www.dzexams.com

الكاشي 839هـ / 1436 م

هو غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشاني و المدعو الكاشي. ولد في أواخر القرن الثامن الهجري في مدينة كاشان (إيران). درس الكاشي النحو و الصرف و الفقه و المنطق، ثم درس الرياضيات و تفوق فيها. و لا غرابة في ذلك فإن والده كان من أكبر علماء الرياضيات و الفلك.

و قد عاش الكاشي معظم حياته في مدينة سمرقند و فيها بنا مرصدا سماه " مرصد سمرقند ".

مؤلفاته: وضع الكاشي مصنفات في علوم مختلفة نذكر منها:

- كتاب " الزيج الخقاني " و فيه ضبط لجداول النجوم.
- "رسالة في الحساب"، "رسالة في الهندسة"، "رسالة الجيب

و الوتر"و " رسالة عن إهليجي القمر و عطارد".

و كان كتابه " مفتاح الحساب " منهلا استقى منه علماء الشرق

و الغرب على حد سواء و اعتمدوا عليه في تعليم أبنائهم في

المدارس و الجامعات عدة قرون، كما استخدموا كثيرا من

المبرهنات و القوانين التي أتى بها و برهنها و ابتكرها.

1

الجداء السلمي

Produits Scalaires

www.dzexams.com

ملخص الدرس

1. الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف بـ:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

حالات خاصة:

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$
- نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ و بصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2. العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

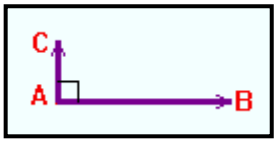
البرهان:

إذا كان $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا و متجانسا و كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ شعاعين فإن:

$\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')$ و $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ ، $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2$

بعد التعويض في $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

الأشعة المتعامدة:



تعريف: القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان:

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.

www.dzexams.com

ملاحظة: نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

البرهان:

- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فالقول أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ يعني $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ أي $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}+k\,\pi$ حيث k عدد صحيح

و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

3. خواص الجداء السلمي

مبرهنة: من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\quad(1)\qquad \vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\quad(2)\qquad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\quad(3)$$

$$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\quad(4)\qquad \vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\quad(5)$$

البرهان:

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x,y)$، $\vec{v}(x',y')$ و $\vec{w}(x'',y'')$

1. لدينا $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y\end{cases}$ و بما أن $xx'=x'x$ و $yy'=y'y$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. إحداثيات الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ هي $(x'+x'',y'+y'')$. لدينا إذن:

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=x\left(x'+x''\right)+y\left(y'+y''\right)=xx'+xx''+yy'+yy''\\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+xx''+yy''=xx'+xx''+yy'+yy''\end{cases}$$

و منه $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda\vec{u}$ هي $(\lambda x,\lambda y)$. لدينا إذن:

$$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=(\lambda x)x'+(\lambda y)y'=\lambda(xx'+yy')=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

ملاحظة: يتم، بإتباع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين (3) و (5).

أمثلة:

- $2\vec{u}\cdot\left(-3\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}\right)=\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(-3\vec{v}\right)+\left(2\vec{u}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{w}\right)=-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}^{2}+6\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-3\vec{v}^{2}=2\vec{u}^{2}+5\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^{2}$.

www.dzexams.com

المتطابقات الشهيرة:

- لدينا: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- لدينا: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$ أو $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$ أو $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$ أو $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

4.الجداء السلمي و الاسقاط العمودي

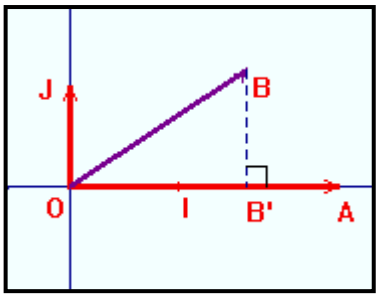
أ-المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

تعريف: $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}.\vec{C'}=\overrightarrow{CD}$ و D' و C المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين D و $\left(O;\vec{u}\right)$ على محور.

يسمى الشعاع $\vec{v'}$ ، المعرف بـ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $\left(O;\vec{u}\right)$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

ب-الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$



البرهان: نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ بحيث يكون الشعاعان

$\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.

نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و لتكن B' المسقط العمودي لـ B على (OA).

إذن $\vec{v'}=\overrightarrow{OB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ على الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$

لدينا هكذا: $O(0,0)$، $A(x_A,0)$، $B(x_B,y_B)$ و $B'(x_B,0)$ و منه

$\overrightarrow{OA}(x_A,0)$، $\overrightarrow{OB}(x_B,y_B)$ و $\overrightarrow{OB'}(x_B,0)$

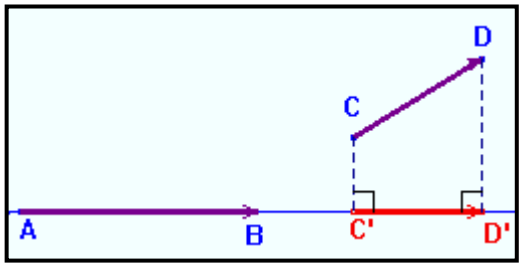
لدينا: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+0\times y_B=x_Ax_B\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=x_Ax_B+0\times 0=x_Ax_B\end{cases}$ و منه $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ أي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$

www.dzexams.com

نتيجة: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا

C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D

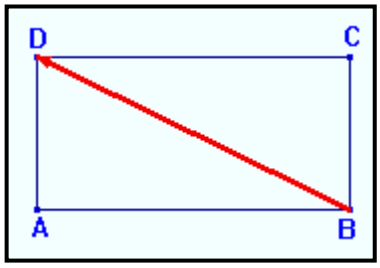
على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$



حالات خاصة: • إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$

- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$
-

مثال: إذا كان $ABCD$ مستطيلا حيث $AB=5$ و $CB=3$ فإن:



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-25$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{BA}$

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=3$

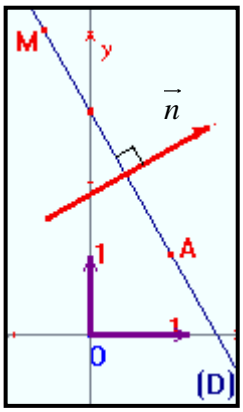
لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{BC}$.

5.تطبيقات الجداء السلمي

أ-الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف: **القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لِـ (D)**

ب-معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه



$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس. $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي

و ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له. (D) هي إذن مجموعة النقط M

من المستوي بحيث: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. إذا فرضنا $M(x,y)$ يكون لدينا $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$

و بالتالي $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

إذن تكون $M(x,y)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

أي $ax+by-(ax_0+by_0)=0$ أو $ax+by+c=0$ بوضع $c=-(ax_0+by_0)$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة

من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

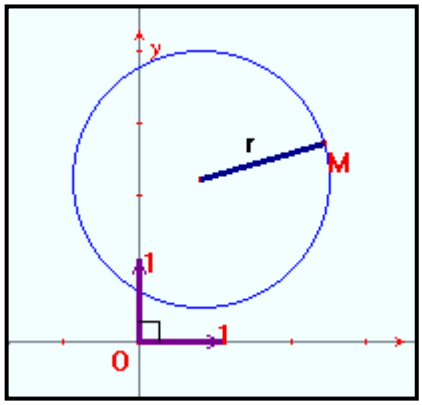
www.dzexams.com

ملاحظة: إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

ج. معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ω



✸معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$.

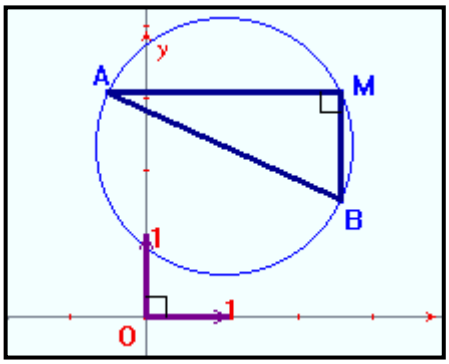
(C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\Omega M=r$ أي $\Omega M^2=r^2$

و هذا يعني أن: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

برهنة:

في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$

هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$



✸معادلة دائرة علم قطر لها

لتكن (C) الدائرة التي قطراها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة

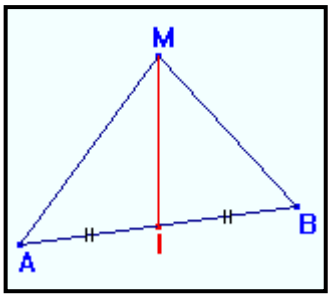
النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

6.حساب أطوال و أقياس زوايا

أ-مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

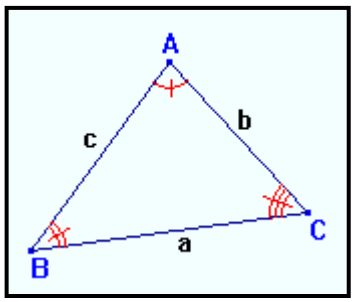
و بما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

www.dzexams.com

مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



ب-العلاقات المترية في مثلث

ABC مثلث. نضع $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $BAC=A$، $CBA=B$،

$ACB=C$ و لتكن S مساحة المثلث ABC.

✸مبرهنة الكاشي

لدينا: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

و بما أن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AB\cos A$، $\overrightarrow{AC}^2=b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2=c^2$ فإن: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\quad(1)\qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\quad(2)\qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\quad(3)$$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$ و S مساحة المثلث ABC. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

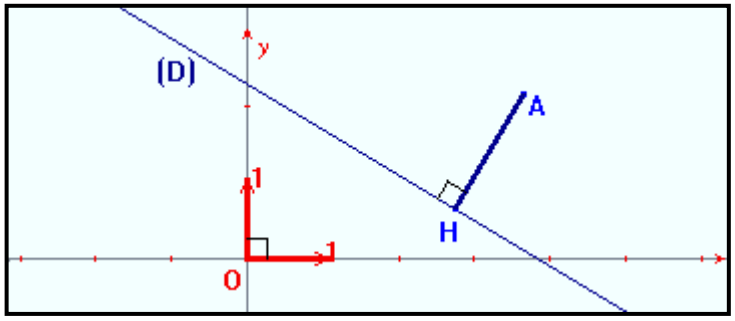
مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

المسافة بين نقطة و مستقيم

تعريف: المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (D).

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I,J)$ نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما (D) معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$.

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي إحداثياه هما (a,b).



مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

www.dzexams.com

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$	$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$	$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
$\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$	$\sin 2a=2\sin a\cos a$

www.dzexams.com

تمارين

رقم	نص التمرين
1	ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=AC=BC=3$ ولتكن النقط A'، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب. أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}$.
2	$ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب. برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.
3	1. A ، B و C ثلاث نقط. بين أنه من أجل كل نقطة M : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 2.استنتج أن ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة H.
4	$ABCD$ مربع طول ضلعه a. I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. 1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}$ 2. بكتابة $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟
5	ABC مثلث قائم في A. A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$. المستقيم المار من A' و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B'. قارن بين العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$.
6	ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB=AC=4$ و $BC=5$. ولتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. 1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$. 2. لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC). أحسب المسافة CK.
7	$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(1,1)$ ، $B(-2,3)$ و $C(3,2)$. أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$
8	$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. 1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$. 2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$. 3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. 4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

www.dzexams.com

9 ABC مثلث حيث: $AB=5$، $AC=8$ و $BC=7$.

1. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MC^2=38$
2. أحسب A و عين قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من B و C.
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

10 ABC مثلث حيث: $BC=8$، $B=50°$ و $C=70°$.

1. أحسب A.
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}.

1 $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس. (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $B(1,1)$ و $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

1 1. عين معادلة للمستقيم (D) ثم بين أنه إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من (D) فإن إحداثيها تحقق:
$x=-k+1$ و $y=2k+1$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

2. عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(k)=5k^2-10k+10$

3. لتكن النقطة $A(2;4)$. أحسب AM^2 بدلالة k ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (D).

1 ABC مثلث. نضع $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $BAC=A$، $CBA=B$، $ACB=C$.

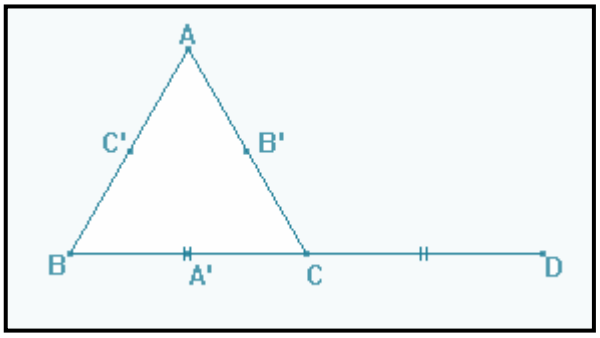
2 نرمز بالرمز S إلى مساحة المثلث ABC و بالرمز p إلى نصف محيطه.

1. بين أن $1+\cos A=\dfrac{2p(p-a)}{bc}$ و أن $1-\cos A=\dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$
2. استنتج $\sin A$ بدلالة p، a، b و c ثم بين أن: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
3. نفرض: $a=15\,cm$، $b=9\,cm$ و $c=11\,cm$
   - أحسب بـ cm^2 المساحة S ثم عين قيمة مقربة لها إلى 0.01
   - عين قيمة مقربة لـ A إلى 0.01

www.dzexams.com

حلول مقترحة

حل التمرين 1:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC=3\times 3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$ و منه $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=CD\times CA\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=3\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

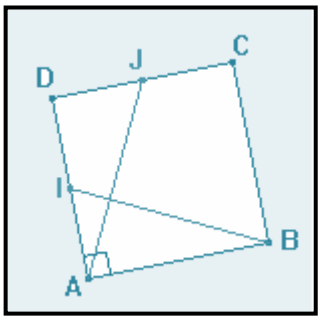
(CC') هو ارتفاع في المثلث ABC و منه $(CC')\perp(AB)$ و بالتالي فإن $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

نعلم أن $\overrightarrow{A'B'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا و اتجاهاهما متعاكسين و بالتالي فإن:

$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}=-A'B'\times AB=-\frac{3}{2}\times 3=-\frac{9}{2}$

حل التمرين 2:

طريقة: لإثبات أن مستقيمين (AB) و (CD) متعامدان يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$



لنبين أن $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=0$. و من أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;B,D)$

لدينا: $A(0,0)$، $J\left(\frac{1}{2},1\right)$، $B(1,0)$ و $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و منه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2},1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

و هكذا: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{1}{2}\right)(-1)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)=0$

نستنتج إذن أن الشعاعين $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدان و منه المستقيمان (AJ).

www.dzexams.com

حل التمرين 3:

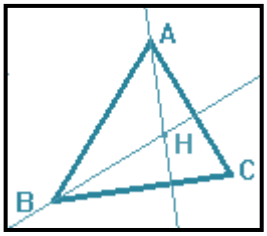
1. نضع: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$ و منه:

$$\alpha=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$، $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ فإن $\alpha=0$

2. إذا كان ABC مثلثا فإن (مثلا) ارتفاعيه اللذين يشملان A و B متقاطعان في نقطة H لأنهما عموديان على مستقيمين متقاطعين. لنبين أن النقطةٍ H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.



لدينا حسب السؤال1 و بأخذ $M=H$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

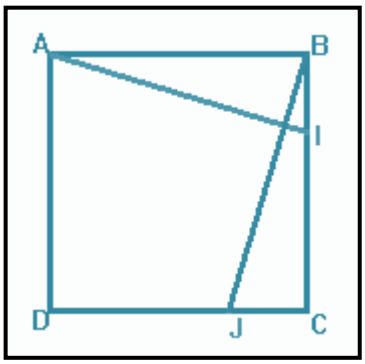
و بما أن $(AH)\perp(BC)$ و $(BH)\perp(AC)$ فإن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

و منه: $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و هذا يعني أن $(CH)\perp(AB)$

نستنتج هكذا أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C.

تعريف: تسمى النقطة H **نقطة ارتفاعات** " *orthocentre* " المثلث ABC.

حل التمرين 4:



1. لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$، بينما $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2=\frac{a^2}{3}$$

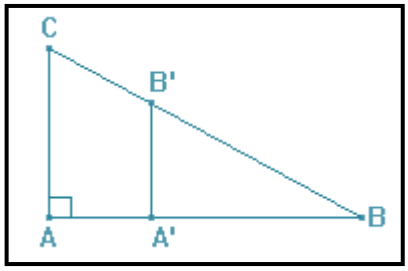
و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{a^2}{3}$

2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$ و منه

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$$

و بالتالي: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+0=0$. نستنتج أن $(AI)\perp(BJ)$.

حل التمرين 5:



المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=AB\times AA'$ أن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.

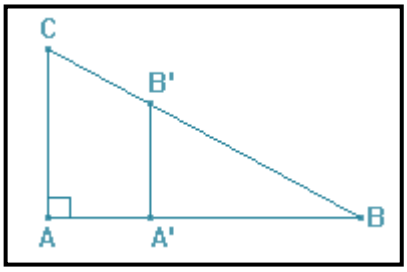
المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$

www.dzexams.com

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}=-AB\times AA'$ لأن اتجاهي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$

حل التمرين 6:



المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=AB\times AA'$

لأن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}=-AB\times AA'$

لأن اتجاهي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}$

حل التمرين 7:

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC. إذنٍ (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. و بما أن إحداثيات $\overrightarrow{BC}$ هي $(5,-1)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل: $5x-y+c=0$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $5(1)-1+c=0$ و منه $c=-4$

إذن $5x-y-4=0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

حل التمرين 8:

1. معادلة (C) هي $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$ أي: $x^2+y^2+4x-2y+2=0$
2. $M(x,y)\in(C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ أي: $(-2-x)(-3-x)+(-1-y)(2-y)=0$
و منه معادلة (C') هي $x^2+y^2+5x-y+4=0$

3. لتكن (C'') مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2x-3=0$ $(*)$
لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ و منه تكتب $(*)$ على الشكل: $(x-1)^2-1+y^2-3=0$

لدينا إذن $(x-1)^2+y^2=2^2$. (C'') هي إذن الدائرة التي مركزها النقطة $I(1,0)$ و نصف قطرها 2.

4. نكتب $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ على الشكل $(x^2+2x)+(y^2-4y)+8=0$
و بما أن $x^2+2x=(x+1)^2-1$ و $y^2-4y=(y-2)^2-4$ يكون لدينا: $(x+1)^2+(y-2)^2=-3$

www.dzexams.com

الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M(x,y)$ إحداثياها تحقق هذه المساواة.

المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.

حل التمرين 9:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:

$MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}AC^2$. إذن القول أن M نقطة من (Γ) يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=38$

أي $2MI^2+32=38$ أو $MI^2=3$. و بالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{A}$

أي $49=64+25-2\times5\times8\times\cos\widehat{A}$ و منه $\cos\widehat{A}=\frac{1}{2}$. و بما أن $0<\widehat{A}<180^\circ$ فإن: $\widehat{A}=60^\circ$.

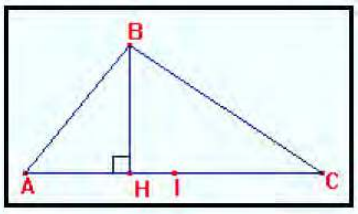
بتطبيق مبرهنة الكاشي و بعد الحساب نجد: $\cos\widehat{B}=\frac{1}{7}$ و باستعمال آلة حاسبة نقرأ: $\widehat{B}\approx81.2^\circ$.

نعلم أن $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ و منه $\widehat{C}\approx38.8^\circ$.

3. لدينا من جهة $S=\frac{1}{2}AC\times BH$

و لدينا حسب قاعدة المساحة $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$

و منه $AH=AB\sin\widehat{A}$ إي $AH=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$



حل التمرين 10:

1. من $A+B+C=180^\circ$ نجد $A=60^\circ$.

2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$

و منه $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{8\sin70^\circ}{\sin60^\circ}$ و $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{8\sin50^\circ}{\sin60^\circ}$

نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

حل التمرين 11:

1. معادلة المستقيم (D) هي من الشكل: $2x+y+c=0$ لأن $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

بما أن النقطة $B(1,1)$ تنتمي إلى (D) فإن إحداثييها تحقق معادلة (D) أي: $2(1)+1+c=0$ و منه: $c=-3$

www.dzexams.com

نستنتج أن $2x+y-3=0$ هي معادلة للمستقيم (D).

القول أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى المستقيم (D) يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D). نأخذ مثلا $\vec{u}(-1,2)$.

$\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا يعني أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ أي $\begin{cases}x-1=-k\\y-1=2k\end{cases}$

نجد هكذا أن إحداثيات النقطة $M(x,y)$ تحقق $\begin{cases}x=-k+1\\y=2k+1\end{cases}$

2. لدينا: $f(k)=5k^2-10k+10$ و منه: $f'(k)=10(k-1)$

لدينا:

k	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(k)$		$-$	0	$+$	

بما أن f' تنعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 هي $f(1)$

لدينا: $f(1)=5(1)^2-10(1)+10=5$. إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ هي 5.

3. لدينا: $AM^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

و منه بعد تعويض x بـ $-k+1$ و تعويض y بـ $2k+1$

يكون لدينا: $AM^2=(-k-1)^2+(2k-3)^2$ أي $AM^2=5k^2-10k+10$

لا تنسى أن: المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

نلاحظ أن $AM^2=f(k)$ و منه أصغر قيمة تأخذها AM^2 هي 5

نستنتج هكذا أن المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) هي: $\sqrt{5}$.

حل التمرين 12:

1. لدينا بتطبيق مبرهنة الكاشي: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ و منه $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

و بالتالي: $\begin{cases}1+\cos A=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\\1-\cos A=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\end{cases}$

www.dzexams.com

لدينا $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ و منه:

$$\begin{cases} p(p-a)=\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right] \\ (p-b)(p-c)=\frac{1}{4}\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]=\frac{1}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right] \end{cases}$$

نجد بعد التعويض: $1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}$ و $1-\cos A=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

2. نعلم أن $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ و منه $\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1-\cos A)(1+\cos A)$

نجد هكذا $\sin^2 A=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$

نعلم أن $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ و منه $S^2=\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A$ أي $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

و بما أن الأعداد p ، $p-a$ ، $p-b$ و $p-c$ موجبة فإن $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

➢ تسمى النتيجة السابقة " قاعدة هيرون - *Héron* -

3. • لدينا: $p=\frac{35}{2}$ و منه بتطبيق قاعدة هيرون يكون لدينا: $S=\sqrt{\frac{35\times5\times17\times13}{16}}=\frac{\sqrt{38675}}{4}cm^2$

نجد هكذا: $S\approx49{,}16cm^2$

• نعلم حسب مبرهنة الكاشي أن $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ و منه $\cos A=-\frac{23}{198}$

باستعمال آلة حاسبة نجد: $A\approx96{,}67°$.

www.dzexams.com

تمارين مقترحة

1. $ABCD$ معين حيث : $AB=2$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ أحسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

2. لتكن النقط التالية : $A(4,2)$; $B(1,5)$; $C(-1,-1)$

1) أحسب طويلة كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$

2) أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

3) عين $COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ وقيس للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

4) لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC) ، أحسب AH و CH بتقريب $\frac{1}{10}$.

3. $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث :

$\left\|\vec{u}\right\|=3$ و $\left\|\vec{v}\right\|=3$ و $\vec{u}.\vec{v}=-3$

1) احسب ، $(\vec{u}-\vec{v})^2$ ، $(\vec{u}+2\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v})$ ،

$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ ، $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$

2) نضع $\vec{u}(3;-2)$ و $\vec{v}(2;4)$

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ ، $\left\|\vec{v}\right\|$ ، $\left\|\vec{v}\right\|=3$ ، $\vec{u}^2$

4. نعتبر النقط $A(2,-1)$; $B(5,-2)$; $C(4,3)$

I / * جد معادلة محور القطعة المستقيمة $[BC]$ ،

* جد معادلة الارتفاع المتعلق بالظلع $[BC]$ ، * عين نقطة تقاطع أعمدة المثلث ABC

II / * أكتب معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\omega(-2,-3)$ وتمس المستقيم (AB) في نقطة H

* عين تقاطع الدائرة (C) مع كل من محور الفواصل ومحور التراتيب

* عين تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x+y-1=0$

5. عين معادلة للدائرة (C) في كل حالة من الحالات التالية :

1) الدائرة التي مركزها $\Omega(1;2)$ ونصف قطرها 2

2) الدائرة التي قطرها $[AB]$ حيث $A\ -1\ ,\ 1$; $B\ -3\ ,\ 2$ (بطريقتين)

6. أذكر إن كانت المعادلات التالية تمثل دائرة في حالة الإجابة نعم عين مركزها ونصف قطرها :

(1 $x^2+y^2-2x-3y+5=0$

(2 $2x^2+2y^2+4x-2y-\frac{9}{2}=0$

(3 $x^2+y^2+2x-4y+8=0$

(4 $x^2+y^2-2x-3=0$

www.dzexams.com

.7 نعتبر النقط التالية : $A(1,2)$; $B(1,-2)$; $C(-3,-2)$

أ – أثبت أن المثلث ABC قائم في B

ب- أحسب $COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ثم عين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ج- أكتب معادلة الدائرة (S) التي تشمل النقط A ، B ، C

هل تعرف طرق أخر لكتابة معادلة الدائرة (S)

د- عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة A ، أذكر طريقة أخرى تمكنك من كتابة معادلة هذا المماس

.8 عين شعاع ناظم لكل من المستقيمين : $(\Delta): x-2y=0$; $(\Delta'): -3x+y-1=0$

1) هل (Δ) و (Δ') متعامدان ؟ هل هما متوازيان ؟،

2) أكتب معادلة للمستقيم الموازي لـ (Δ') ويقطع محور الفواصل عند $x_0=4$

.9 نعتبر النقط : $A(1;-1)$ ، $B(-1;1)$ $C\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ و $D(1;0)$.

1) أ- أحسب AB و AC و الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب- أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

2) أ- بين أن المعادلة : $y=-x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- أحسب المسافة $d\left((AB);C\right)$

ج- استنتج مساحة المثلث ABC .

3) لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و المارة من النقطة C .

أ- تحقق من أن : $x^2+y^2-2x+2y-6=0$ هي معادلة ديكارتية للدائرة (C) .

تحقق من أن : $B\in(C)$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للدائرة (C) في النقطة B

.10 نعتبر النقط : $B\left(0;\sqrt{3}\right)$ ، $C\left(0;-\sqrt{3}\right)$

1) بين ان مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$ هي دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها و قطر لها .

2) اكتب معادلة المماسين (T_1) ، (T_2) للدائرة (C) في النقطتين B,C على الترتيب

3) انشئ كل من (T_1) ، (T_2) و (C)

.11 نعتبر النقطتين : $A(0;2)$ ، $B(-4;-2)$

1) اوجد احداثيا النقطة A' صورة بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته 2

2) جد احداثيا G مركز التحاكي الذي نسبته 2- ويحول A الى B

3) جد معادلة الدائرة (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2

.12 نعتبر النقط : $A(-1;-3)$ ، $B(2;1)$ ، $C(6;-2)$

1) جد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

2) بين ان : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=25$ واستنتج $cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

3) (Δ) مجموعة النقط من المستوي بحيث:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=AB^2-5$ ، عين طبيعة (Δ)

4) نعتبر المستقيم (D_m) الذي معادلته الديكارتية D_m : $m^2x-(2m+1)y-3=0$

عين قيم m حتى يكون (D_m) و (AB) متعامدان

www.dzexams.com

.13 (C) الدائرة التي معادلتها : $x^2+y^2=4$. و (C') الدائرة التي معادلتها : $x^2+y^2-6x+8=0$.

1) أرسم (C) و (C') .

2) تحقق أن (C) و (C') دائرتان متماستان .

3) لتكن I النقطة ذات الإحداثيين $(2;0)$.

برهن أن (C') هي صورة (C) بتحاكي مركزه I ونسبته k يطلب تعيينها .

.14) (C) الدائرة التي مركزها $A(2;3)$ ونصف قطرها 2

h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$.

1) أنشئ (C') صورة (C) بواسطة h .

2) أكتب معادلة للدائرة (C') .

ب) ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

1) $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ ؟

2) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ ؟

.15 لتكن A و B نقطتين من المستوي حيث $AB=5$

عين ومثل مجموعة النقط M التي تحقق :

$MA^2-MB^2=-15$

.16 1.أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$

2.عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة: $x+y-2=0$

3.لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$

أ- بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ب- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

.17 ينسب المستوي الى المعلم المتعامد المتجانس $O;\vec{i},\vec{j}$

لتكن النقط : $A\ 1,2$; $B\ -2,1$; $C\ 2,4$

الجزء الأول :

1) أحسب الأطوال AB , OB , OA

2) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ استنتج طبيعة المثلث OAB

3) احسب قيس للزاوية $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$

4) نسمي G مركز ثل المثلث OAB

احسب مساحة المثلث ABG

الجزء الثاني :

نعتبر المستقيم (Δ) الذي $3x-4y+10=0$ معادلة له

1) تحقق ان (Δ) هو نفسه (BC)

2) احسب بعد النقطة A عن (Δ)

3) اكتب معادلة للمستقيم (D) المار من A ويعامد (Δ)

4) جد احداثيا نقطتي تقاطع (D) و حاملي محوري الاحداثيات

الجزء الثالث :

نسمي (Γ_1) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق: $x^2+y^2-2x-4y=5$

www.dzexams.com

و (Γ_2) الدائرة التي (AB) قطرلها

1) تحقق ان دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

2) اكتب معادلة للدائرة (Γ_2)

3) بين ان المستقيم (D')الذي $y=-3x-5$ معادلة له. مماس للدائرة (Γ_2) في نقطة F يطلب تعيين احداثيها

4) ادرس الوضع النسبي للدائرتين (Γ_1) و (Γ_2) معيينا احداثي نقط تقاطعهما (ان وجدت).

www.dzexams.com

متتالية فيبوناتشي

فيبوناتشي 1170 / 1240

ليوناردو بيزانو(1170-1250) الملقّب فيبوناتشي أعظم رياضي أوروبا في عصره. ارتبط اسمه بمتتالية عددية عرضها عام 1228 في كتابه المسمى *Liber Abaci* نمذجة وحلا للمشكلة التالية:

نضع في حظيرة زوجا من أرنبين (ذكر وأنثى).

يلد كلّ زوج عمره شهران على الأقل، كلّ شهر، زوجا جديدا من أرنبين (ذكر وأنثى).

إذا فرضنا أنّ ليس هناك أرنب يموت، ما هو عدد أزواج الأرانب بعد n شهرا ؟

وهكذا، إذا كان u_n هو عدد أزواج الأرانب الموجودة خلال الشهر من المرتبة n، فنحصل على متتالية معرّفة بالشّكل:

$u_1 = u_2 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n > 1$ ، $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

في هذه المتتالية، يكون كلّ حدّ هو مجموع الحدّين السابقين له مباشرة وهي تشرح انتظام توالد الأرانب كما ذكر فيبوناتشي، وقد اكتشف توافقها كذلك مع بعض الظواهر الطبيعية كتفرّع بعض الأشجار التي تنبت في بعض البلدان الباردة وتوجّه بعض النباتات (زهرة الأقحوان، عباد الشمس،...) نحو الشمس.

كما ساهمت هذه المتتالية في إثراء العديد من مواضيع الرياضيات وحلّ الكثير من المعضلات.

2

المتتاليات العددية

Les Suites Numériques

www.dzexams.com

ملخص الدرس

1. متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$.هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:

- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq 1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

❑ **مثال:** المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b\in\mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a $(a$ عدد طبيعي أصغر من $b)$ هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2. طرق توليد متتالية عددية. (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

1- توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

❑ **مثال:** المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

www.dzexams.com

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n = f(n)$ حيث $f : x \mapsto -x^2 + 3$.

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_1 = 3u_0 = 3$ ، $u_2 = 3u_1 = 9$ ، $u_3 = 3u_2 = 27$ و هكذا ...

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .
2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . ومن أجل كل عدد حقيقي x حيث $f(x) = -3x^2 + 1$:

حل: 1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$ ، $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$.

2) $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{3}{2+u_n}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .
2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} .ثم ضع تخمينا

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل عدد حقيقي موجب x حيث $f(x) = \dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0, +\infty[$ وبما أن $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

1) $u_1 = \dfrac{3}{2+u_0} = \dfrac{3}{4}$ ، $u_2 = \dfrac{3}{2+u_1} = \dfrac{3}{2+\frac{3}{4}} = \dfrac{12}{11}$ ، $u_3 = \dfrac{3}{2+u_2} = \dfrac{3}{2+\frac{12}{11}} = \dfrac{33}{34}$.

2) الحاسبات تبين أن $u_{10} \approx 1$ ، $u_{11} \approx 1$ و $u_{12} \approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n = 10$.

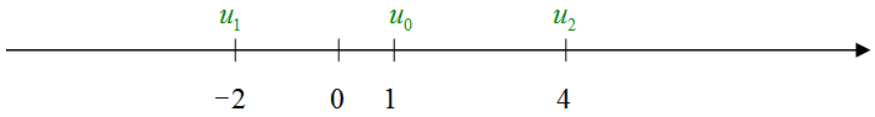
3. التمثيل البياني لمتتالية عددية.

www.dzexams.com

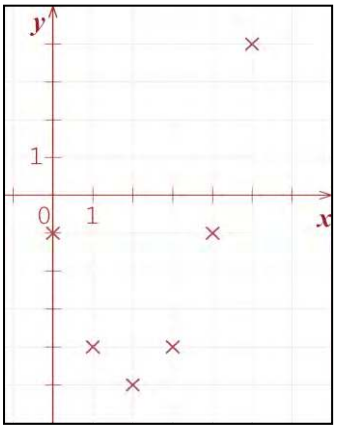
1. متتالية معرفة بالحد العام.

- **يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور**

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=(-2)^n$.



- **يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).**



مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-4n-1$.

(u_n)معرفة كذالك $u_n=f(n)$ حيث: $f:x\mapsto x^2-4x-1$ نعرف f على المجال $[0,+\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n,f(n))$ من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. **مجموعة النقط** $M(n,f(n))$ **هي التمثيل البياني للمتتالية** (u_n) .

2. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

4. إتجاه تغير متتالية عددية.

❶ **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❷ **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❸ **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

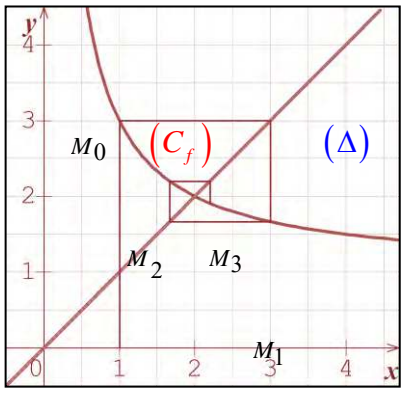
❹ **متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

www.dzexams.com

• مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

➢ **طريقة:** لتمثيل **المتتالية** (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة **بالمتتالية** (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. **لأن المتتالية من الشكل** $u_{n+1}=f(u_n)$ **والتمثيل البياني هو مجموعة النقط** $M(u_n,u_{n+1})$.

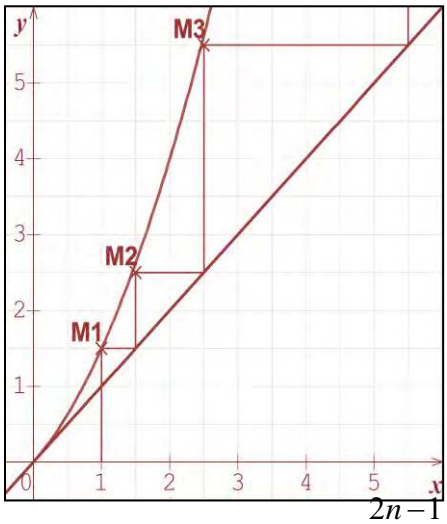


حل: (C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$.

نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

❑ **مثال:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$

و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n^2+u_n$.



• مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي:

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

❑ **مثال:**

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$

➢ **طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية** (u_n) **يمكن أن:**

1) **ندرس إشارة** $u_{n+1}-u_n$ **أو**
2) **نقارن بين** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **و 1** .
3) **إذا وجدت دالة** f **حيث من أجل كل عدد طبيعي** n : $u_n=f(n)$ **ندرس تغيرات الدالة** f .

حل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

www.dzexams.com

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=u_n+r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الالحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=r$ و منه:

- **إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.**

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$.

1. **أحسب u_0 و u_1.**
2. **أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.**
3. **أحسب، بدلالة n ، المجموع: $S=u_0+u_1+.....+u_n$.**

الحل:

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،
$u_{n+1}-u_n=\left[-3(n+1)+2\right]-\left[-3n+2\right]=-3$.
نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.
3. لدينا:
$S=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$ و

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=q \quad \text{أو} \quad u_{n+1}=u_n\times q$$

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n=u_0\times q^n$ و $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن1 فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن:

$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ،حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q=0$ تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد2 .

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=v_1+v_2+.....+v_n$.

الحل:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.

www.dzexams.com

و منه $S=\frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.	$v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$ .2 $S=v_1+v_2+.....+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ و منه: $S=3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

6.نهاية متتالية عددية

1.متتالية عددية متقاربة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ أو $\lim\limits_{n\to-\infty}u_n=l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة:

- إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

2.نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة.

مبرهنة: لتكن المتتالية (u_n)المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

3.نهاية غير منتهية لمتتالية عددية.

تعريف: (u_n) متتالية عددية .

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=n^2$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2\in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n\geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

www.dzexams.com

❑**مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=-n^2-1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1)\in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n\geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

برهنة: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

ملاحظة: النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

❑**مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n+1}{n+2}$. • عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

❑**مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$. • عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: نحول العبارة $u_n=\dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

$$u_n=\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=n\times\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2+\dfrac{3}{n}=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .

7. نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر.

برهنة:: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n\leq u_n\leq w_n$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

برهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

www.dzexams.com

مبرهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

مثال: $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\dfrac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{4n}{2n+3}$.

• عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

حل: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = 2$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

www.dzexams.com

Ask me i'm ready

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} . **2.** أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2. **2.** عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

4. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1. **2.** أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

5. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3. **2.** أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n. **3.** أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

6. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n. **2.** استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

7. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول. **2.** ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

8. بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.. **2.** كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

9. (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ ، و $u_5 = \dfrac{1}{32}$.

1. أحسب u_{2007} . **2.** أحسب $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{28} + u_{29}$.

☹ لا تتسرع في النظر الى الأجابة

www.dzexams.com

حل السؤال ❶:

1. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.
2. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

حل السؤال ❷:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times 2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times 7+1=-13$$

حل السؤال ❸:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\dfrac{v_n-5}{2}$.

حل السؤال ❹:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1}-u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\left[-3(n+1)+2\right]-\left[-3n+2\right]=-3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا: $S=(n+1)\times\dfrac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\dfrac{2-3n+2}{2}$ و منه $S=\dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

حل السؤال ❺:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

www.dzexams.com

$S=3\times\frac{1-2^n}{1-2}=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$ و منه $S=v_1+v_2+.....+v_n=v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$

حل السؤال ❻:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-\left(n^2-n\right)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

حل السؤال ❼:

1. $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}=\frac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}}=\frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$
2. بما أن $\frac{3}{2}>1$ و $v_0>0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1}-v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

حل السؤال ❽:

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$.

لنرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005+n$ و منه $u_0=3000$ و $u_2=3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1}=u_n+\alpha u_n$ أي $u_{n+1}=(1+\alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$.

لدينا إذن $u_2=u_0\times q^2$ و منه $q^2=\frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2=1,21$ و بالتالي $q=1,1$. نستنتج أن $\alpha=0,1=10\%$.

2. نلاحظ أن $2005+25=2030$. لدينا $u_{25}=u_0\times q^{25}$ و منه $u_{25}=3000\times(1,1)^{25}$ أي $u_{25}\approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

حل السؤال ❾:

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}=\frac{1}{2^{2007}}$.

- نعلم أنه إذا كان $q\neq 1$ لدينا $S=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$

www.dzexams.com

تمارين

رقم	نص التمرين

1 (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

2 نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

3 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

4.استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$

4 (u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

5 نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

www.dzexams.com

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 ب- -14 ج- -11.

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$ ، $b=6x-3$ ، $c=4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ ب- $x=0$ ج- $x=\frac{3}{4}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1.(u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2.(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$ ج- $v_n=2\times 3^n$

3.المجموع: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ ب- $\left(2^n-1\right)$ ج- $2\left(3^n-1\right)$

8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1.بين أن $u_1=24$ ، ثم استنتج قيمة u_0.

2.بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

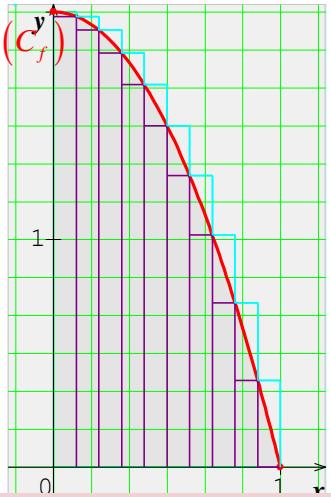
www.dzexams.com

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

10 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x) = 2 - 2x^2$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين المعرفينبالمعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.



نقسم المجال $[0,1]$ إلى n جزءًا متساوية حيث أن كل جزع يساوي $\frac{1}{n}$.

كما هو مبين في الرسم المقابل.

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين . نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E . و عليه لدينا $u_n \le A \le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) إستنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1 لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

1 $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

1 في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000\,DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن

2 مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\,DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 30000$.
   - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

www.dzexams.com

1 **I.** (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$.

3 1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+...+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$\begin{cases} v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

www.dzexams.com

حل التمرين 1: ❑

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_3.

$$\begin{aligned} u_0 &= -2 \\ u_1 &= 1 \\ u_2 &= 4 \\ u_3 &= 7 \end{aligned}$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - 3n + 2 \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$ رتبته. 653 لأن الحد الأول هو u_0.

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2} \\ &= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) \end{aligned}$$

و منه .

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \dfrac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

www.dzexams.com

$$\frac{3n^2-n-4}{2}=328$$

معناه: $3n^2-n-4=2(328)$

$$3n^2-n-660=0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_1=15\in\mathbb{N}$ و $n_2=\frac{-44}{3}\notin\mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n=328$

حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

نجمع المعادلات نتحصل: $u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ أي: $4u_0+18=10$ و بالتالي: $u_0=-2$.

$$\begin{cases}u_1=u_0+r=u_0+3\\u_2=u_0+2r=u_0+6\\u_3=u_0+3r=u_0+9\end{cases}$$

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$.

أي: $u_n=-2+3n=145$ يعني: $n=49$ $u_{49}=145$

4. حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$.

$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}\\&=50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right)\\&=50\left(\frac{-2+145}{2}\right)\\&=3575\end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$.

احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.

$$\begin{aligned}S'&=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}\\&=2S+3(50)\\&=2(3575)+150\\&=7300\end{aligned}$$

حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$.

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

www.dzexams.com

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$
$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$
من القانون : نضع: $n=3;\ p=1$.
$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$
$$q = 4, q = -4$$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n: $u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$= \frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$ $S' = \frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right) = 27305$

حل التمرين 4: ❑

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:
$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$
$$10r - 10 = 50$$
$$10r = 60$$
$$r = 6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n - 5$

www.dzexams.com

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة: $6n-5=2017$
$n=337\in\mathbb{N}$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$
$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)$$
$$=(n+1)(-5+3n)$$
$$=3n^2-2n-5$$

أي:

حل التمرين 5: ❑

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$u_3+u_5=2u_4$$
و بالتالي: $2u_4=20$
$$u_4=10$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.لدينا:

$$u_4=10$$
معناه: $2u_4-u_5=7$
$$2(10)-u_5=7$$
$$u_5=13$$

$$r=u_5-u_4$$
3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r=13-10$
$$r=3$$

$$u_4=u_0+4r$$
حساب u_0.نأخذ المعادلة: $u_0+4(3)=10$
$$u_0=-2$$

www.dzexams.com

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n-2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

و بالتالي:

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-2+3n-2}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4+3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين 6:

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x+2$، $b = 6x-3$، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$، (u_n) متتالية:

www.dzexams.com

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1}-u_n>0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$

حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. اثبات أن $u_1=24$،

لدينا: $u_0\times u_2=576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0\times u_2=u_1^{\,2}$$

و بالتالي:

$$u_1^{\,2}=576$$

$$u_1=24;u_1=-24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1=24$ استنتاج قيمة u_0:

$$u_0+u_1=30$$

لأن:

$$u_0=30-u_1=30-24$$

$$u_0=6$$

2. بين أن $q=4$، نعلم أن:

$$u_1=u_0\times q$$

$$q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{24}{6}=4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=6\times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$،

لدين: $u_n=6\times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1}=6\times 4^{n+1}$.

www.dzexams.com

$$u_{n+1}-u_n = 6\times4^{n+1}-6\times4^n$$
$$= 6\times4^n\times4^1-6\times4^n$$
$$= 6\times4^n(4-1)$$
$$= 6\times4^n(3)=18\times4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n = 18\times4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6\times4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1+u_2+...+u_n$

معناه:

$$S_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$

أي:
$$= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$$
$$= -6\left(1-4^n\right)$$
$$= 6\left(4^n-1\right)$$

حل التمرين 9: ❑

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = ... = u_0 = 3$ (كل حدودها متساوية)

- من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0+u_1+...+u_n = (n+1)\,u_0$ و منه $S_n = 3(n+1)$.

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

www.dzexams.com

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}u_n-3$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $S=v_0+3+v_1+3+\ldots+v_n+3=v_0+v_1+\ldots+v_n+3+3+\ldots+3$

و منه $S=S'+3(n+1)$ حيث $S'=v_0+v_1+\ldots+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=-1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 10: ❑ .

1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور له هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)$ وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

أي $u_n=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

$u_n=\frac{2n}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right)$ و منه $u_n=2-\frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $u_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

مساحة المستطيل الأول من الفيئة الثانية هي $\frac{2}{n}$، مساحةالمستطيل الثاني هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل الثالث هي

$\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

وبالتالي أي $v_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

www.dzexams.com

$v_n = 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$ إذن $v_n = 2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1} p^2$ ومنه $v_n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n^3}\left(1+4+\ldots+(n-1)^2\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = \frac{4}{3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

3) بما أن $u_n \le A \le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $A = \frac{4}{3}$.

حل التمرين 11: ❑

1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$
$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$
$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3) نحسب : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$

5) إذا $-1 < \frac{1}{12} < 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

www.dzexams.com

حل التمرين 12:

1) $u_0 = 10000$ ، $u_1 = 90000$ u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

حيث: $u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 - 1500$ و منه $u_2 = 7950$

2) $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 10000 - 1500$ و منه $u_{n+1} = 1,05\,u_n - 1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(x) = 1,05\,x - 1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1 - u_0 < 0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4) $v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1,05u_n - 31500$.

و منه $v_{n+1} = 1,05\,v_n$ أي $v_{n+1} = 1,05(u_n - 30000)$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ و حدها الأول $v_0 = -20000$.

- لدينا $v_n = v_0 q^n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n$.

بما أن $u_n = v_n + 30000$ فإن $u_n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n + 3 \times 10^4$

و منه $\lim u_n = -\infty$

5) لدينا $u_8 = 540,89$ و $u_9 = -1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في $2010/01/01$ فإن رصيده

يكون دائنا ابتداء من سنة 2010.

حل التمرين 13:

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية:

$$u_2 = u_0 + 2r = -1 + 2r$$
$$u_4 = u_0 + 4r = -1 + 4r$$

بالتعويض نجد: $r = 1$ بما أن: $r = 1 > 0$ فان (u_n) متتالية متزايدة تماما

2) أكتب u_n بدلالة n. $u_n = -1 + n$

3) احسب S_n مجموع الحدود الأولى للدالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}S_n &= u_1+u_2+\ldots+u_n+\frac{1}{2}n\\ &= n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)+\frac{1}{2}n\\ &= n\left(\frac{-1+n}{2}\right)+\frac{1}{2}n\end{aligned}$$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$ والعلاقة الارجاعية:

$$\begin{cases}v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a\\ v_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) عين قيم a بحيث تكون (v_n) متتالية ثابتة:

لكي تكون المتتالية (v_n) ثابتة يجب أن تكون العلاقة الارجاعية على الشكل: $v_{n+1}=v_n+2a^2-a$ أي: $\left(a^2-3\right)=1$ وهذا يكافئ $a=-2, a=2$: نجد حلول المعادلة من الدرجة الثانية.

2) عين قيم a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

لكي تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن تكون العلاقة الارجاعية على الشكل: $v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n$ أي: $2a^2-a=0$ وهذا يكافئ $a=0, a=\frac{1}{2}$: نجد حلول المعادلة من الدرجة الثانية.

www.dzexams.com

تمارين مقترحة

1.

أ) احسب الحد الاول والثاني والثالث والعاشر للمتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

1) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n - \frac{7}{2}$

2) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = n^2 - 2n$

3) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$ بـ:

$$u_n = \sqrt{2n-8} - \frac{1}{2}$$

ب) (v_n) للمتتالية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$$

1) علم على حامل محور الفواصل الحدود v_3, v_2, v_1, v_0 دون حسابها.

2) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (v_n)

3) احسب الحدود v_3, v_2, v_1, v_0

ج) مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة على بـ: $u_n = n^2 - 6n + 5$

2.

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n = -5n - \frac{1}{2}$ 2) $u_n = n^2 - 6n + 1$

3) $u_n = 2(\frac{3}{5})^n$ 4) $u_n = -5(\frac{3}{2})^n$

5) $u_n = \frac{2n-3}{-n-3}$ 6) $u_n = \frac{n-1}{2n+5}$

3.

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

عبر عن u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية

1) الحد الأول : $u_0 = -1$ و $r = 4$.

2) الحد الاول $u_1 = \frac{3}{2}$ و $r = -5$

3) الحد الاول: $u_3 = \sqrt{3}$ و $r = \frac{5}{4}$.

4.

(u_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 3 و حدها الاول u_2 حيث $u_2 = -2$

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) بين ان 49 حد من حدود المتتالية (u_n) ، عين رتبته

3) أحسب المجموع : $u_2 + u_3 + \ldots + u_{19}$

www.dzexams.com

.5

أ) (u_n) متتالية حسابية حيث : $u_{10}=16$ و $u_{15}=41$

أحسب المجموع : $S=u_{10}+u_{11}+u_{12}+\ldots+u_{29}$

ب) (v_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $v_3=23$ و $v_{10}=65$

1) اوجد الأساس والحد الأول للمتتالية (v_n)

2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

3) احسب الحد v_{15} والحد السابع والعشرون

4) احسب المجموع : $S=v_{10}+v_{11}+v_{12}+\ldots+v_{29}$

.6

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$.

و نعتبر المتتالية w_n حيث : $w_n=\dfrac{1}{u_n-2}$

1) برهن أن المتتالية w_n حسابية . عين حدها الأول وأساسها .

2) عبر عن الحد العام w_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.7

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ : $u_0=-1$ و $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$.

و نعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها .

2) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.8

أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها q .

أكتب u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_0=-\dfrac{1}{4}$ و $q=7$.

2) $u_1=3$ و $q=3$.

3) $u_4=\sqrt{2}$ و $q=-\dfrac{1}{2}$.

ب) (u_n) متتالية هندسية حيث : $u_7=\dfrac{1}{216}$ و $u_{10}=\dfrac{27}{1331}$

جد الاساس والحد الاول u_1 للمتتالية (u_n)

جـ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1=-2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $u_2+u_2+\ldots+u_9$.

.9

a ، b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية . أحسب a، b و c علما أن:

$$\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$$

www.dzexams.com

.10 (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$.

1) أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج u_1 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ بدلالة n .

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $s_n=728$.

.11 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث: $u_0=2$ و $u_3=9\,u_1$.

1) عين أساس المتتالية (u_n). ثم أحسب u_n بدلالة n

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

.12 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=2-\dfrac{4}{u_n+3}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) لا حسابية و لا هندسية.

3) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

4) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n . واستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

5) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

.13 (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0=1$ ومن أجل $n\geq 1$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{2}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_n+\alpha$.

- عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .
- عبر عن v_n بدلالة n .
- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

.14 نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=1$ و $3u_{n+1}=2u_n+n+3$.

1. أحسب الحدود u_1 ; u_2 ; u_3 .

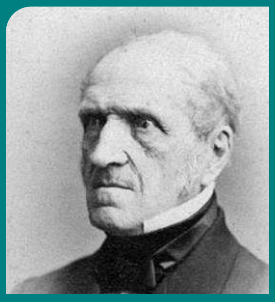
2. (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n=u_n-n$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

www.dzexams.com

ميشال شال 1793 / 1880



ولد ميشال شال (Michel Chasles) سنة 1793 بمدينة ابيرنان بفرنسا. وبعد ما تفوق في التعليم الثانوي التحق سنة 1812 بالمدرسة المتعددة التقنيات و بعد تخرجه رفض منصبا هاما في الدولة و عاد إلى مسقط رأسه لدراسة تاريخ الرياضيات.

أصدر شال أولى أعماله سنة 1827 و كانت عبارة عن لمحة تاريخية حول الطرائق في الهندسة. عمل سنة 1841 أستاذا بالمدرسة المتعددة التقنيات ثم بجامعة السوربون ابتداء من سنة 1846. نشر بعد ذلك كتابين مهمين في الهندسة و قد اشتهر بالعلاقة التي تحمل اسمه.

توفي ميشال شال سنة 1880 بمدينة باريس.

3

الهندسة في الفضاء

Géométrie dans l’espace

www.dzexams.com

ملخص الدرس

1.انشاء مقاطع رباعي وجوه بمستو

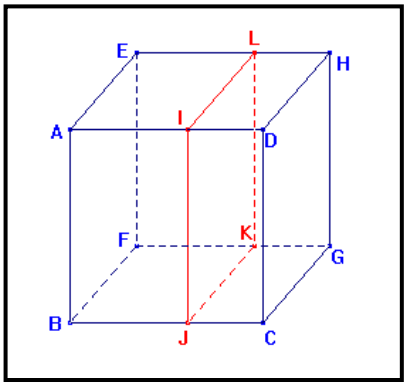
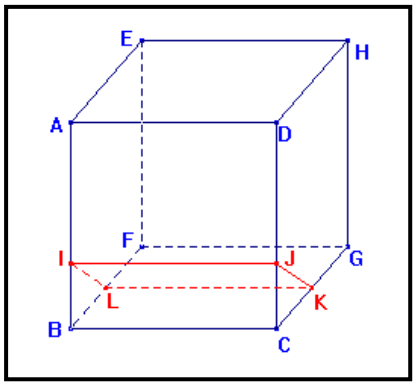
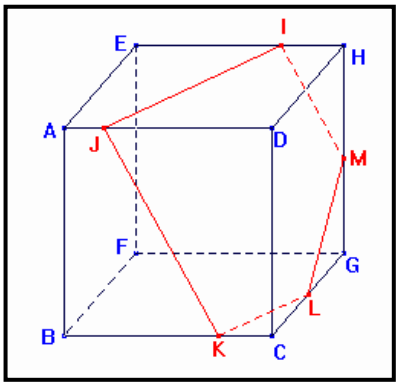
أ.المقاطع المستوية لمكعب

مقطع مكعب بمستو (P) هو:

مربع إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه المكعب.

- قطعة مستقيمة أو مستطيل إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أحرف المكعب.
- نقطة، مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف، خماسي أو سداسي في الحالات الأخرى.

❑مثال

		
المستوي (LIJ) يوازي الوجه $ABFE$	المستوي (IJK) يوازي الحرف $[BC]$	مقطع المكعب بالمستوي (IJK)
مقطع المكعب هو المربع $IJKL$	مقطع المكعب هو المستطيل $IJKL$	هو الخماسي $IJKLM$

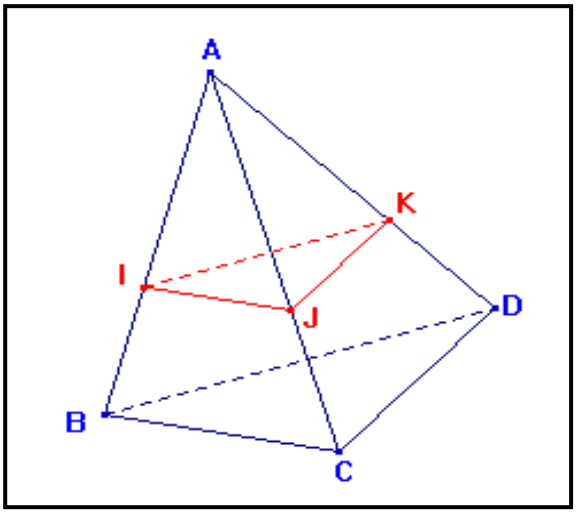
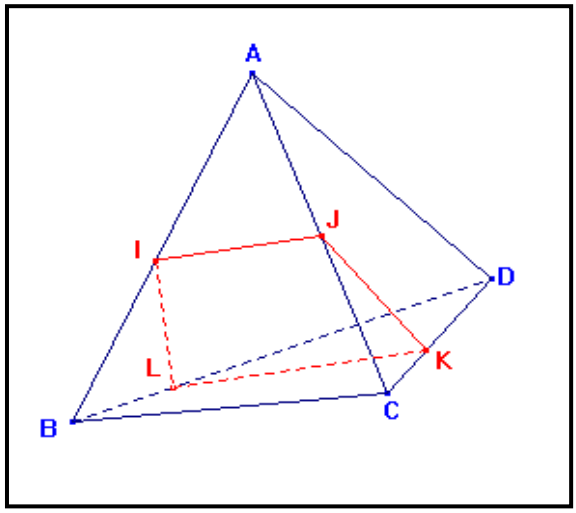
ب-المقاطع المستوية لرباعي وجوه

مقطع رباعي وجوه بمستو (P) هو:

- نقطة أو مثلث اذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه رباعي الوجوه.
- نقطة، قطعة مستقيمة، مثلث أو رباعي في الحالات الأخرى.

www.dzexams.com

❑مثال

	
المستوي (KIJ) يوازي الوجه BCD	المستوي (LIJ) يوازي الوجه BCD
مقطع رباعي الوجوه هو المثلث IJL	وفق الرباعي $IJKL$

2.الحساب الشعاعي في الفضاء

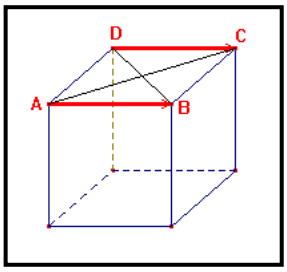
أ-أشعة الفضاء

نرفق، كما في المستوي، بكل ثنائية نقطية (A,B) من الفضاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

- إذا كان $A \neq B$، منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB)، اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو من A نحو B

و طويلة $\overrightarrow{AB}$ التي نرمز إليها بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ هي المسافة AB. لدينا: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

- إذا كان $A = B$، فإن $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع المعدوم الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{0}$.
- غالبا ما نرمز إلى الأشعة بواسطة حرف مثل: $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$، ...
- من أجل كل نقطة O و من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من الفضاء، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



مبرهنة: A، B، C و D أربع نقط من الفضاء. الخواص الثلاث الآتية متكافئة:

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

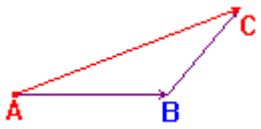
(2) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(3) للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.

www.dzexams.com

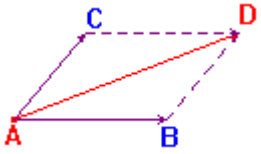
ب-العمليات على الأشعة

➢مجموع شعاعين



علاقة شال

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



قاعدة متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

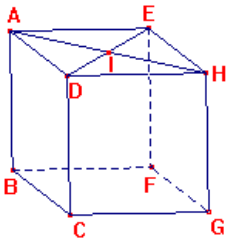
حالة خاصة:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. نقول أن $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ و نكتب $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

➢جداء شعاع بعدد حقيقي

مبرهنة: من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و من أجل كل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

- $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$
- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $\left(k+k'\right)\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k\left(k'\vec{u}\right)=\left(kk'\right)\vec{u}$
- $k\vec{u}=\vec{0}$ يكافئ $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$



مثلا: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AI}$

نتائج:

- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k\vec{u}$
- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.
- تكون النقط A، B و C في استقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

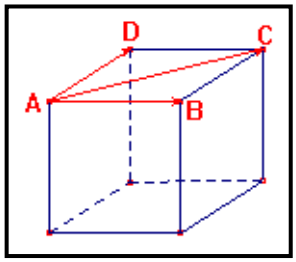
3.لأشعة من نفس المستوي

تعريف

لتكن $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة و لتكن O نقطة كيفية من الفضاء. نعتبر النقط A، B و C من الفضاء حي $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$، $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$

القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.

❑مثال:



نلاحظ أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي و منه فالأشعة

$\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ الممثلة على الترتيب بـ: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي.

www.dzexams.com

ملاحظة:

- يعمم التعريف السابق إلى عدد كيفي من أشعة الفضاء.
- إذا كان شعاعان من بين الأشعة الثلاثة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطين خطيا تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي.

مبرهنة:

$\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث: $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

برهان: لتكن O نقطة كيفية من الفضاء و لتكن النقط A، B و C من الفضاء حيث: $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$، $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$

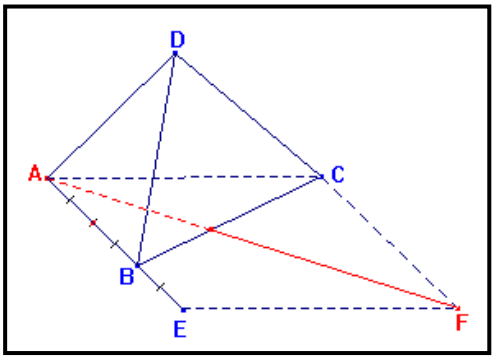
القول أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يعني أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي(التعريف). النقط O، A، B ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فهي تعرف إذن مستويا (OAB) حيث $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ معلم له.

النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (OAB). يوجد إذن عددان حقيقيان x و y بحيث:

$$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

($(x;y)$ هما إحداثيا النقطة C بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$).و هكذا $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

مثال:



$ABCD$ رباعي وجوه.(الشكل المقابل) لدينا $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

و منه الأشعة $\overrightarrow{AF}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من نفس المستوي. و بما أن A مشتركة

فإن النقط A، B، C و F تنتمي إلى نفس المستوي.

المرجح و الاستقامية : لإثبات استقامية ثلاث نقط يكفي أحيانا إثبات أن إحدى هذه النقط هو مرجح النقطتين الأخريين.

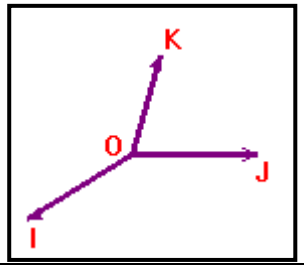
4.التعليم في الفضاء

أ-المعلم الديكارتي

تعريف: نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة O كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$ ليست من نفس المستوي.

إذا وضعنا: $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ **نرمز إلى المعلم السابق بالرمز** $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

ملاحظات:



- تشكل النقط O، I، J و K رباعي وجوه.
- الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ليست من نفس المستوي.
- يسمى المستقيم (OI) محور الفواصل و المستقيم (OJ) محور التراتيب

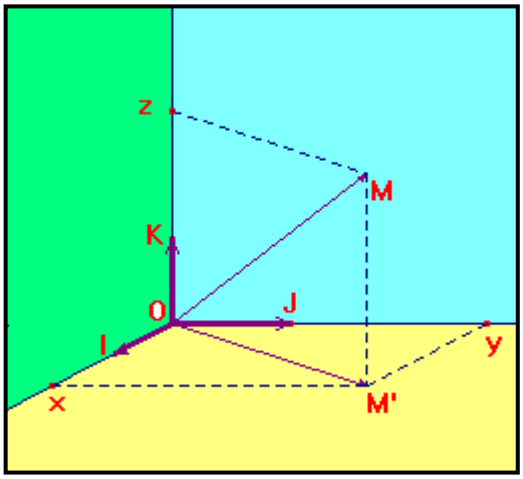
www.dzexams.com

بينما يسمى المستقيم (OK) محور الرواقم.

- إذا كانت المستقيمات (OI)، (OJ) و (OK) متعامدة مثنى مثنى نقول أن المعلم $(O;I,J,K)$ متعامد.
- إذا كان $(O;I,J,K)$ معلما متعامدا و كان $OI=OJ=OK=1$ نقول أن $(O;I,J,K)$ متعامد و متجانس.
- نرمز إلى المستوي (OIJ) بـِ $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و إلى المستوي (OJK) بـِ $P\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$، ...

ب-إحداثيات نقطة

مبرهنة: إذا كان $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما للفضاء و كانت M نقطة من الفضاء فإنه توجد ثلاثية أعداد حقيقية وحيدة (x,y,z) بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



برهان: نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

النقط O، I، J و K ليست من نفس المستوي و منه المستوي (OIJ)

لا يوازي المستقيم الذي يمر من M و حيث $\vec{k}$ شعاع توجيه له فهما

إذن متقاطعان ولتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و منه يوجد عددان حقيقيان

x و y وحيدين بحيث: $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

الشعاعان $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{k}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z

بحيث: $\overrightarrow{MM'}=z\vec{k}$.لدينا حسب علاقة شال:

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{MM'}$ ومنه: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

مثال:

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد للفضاء حيث: $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$.

علم النقطة M ذات الإحداثيات $(2,3,-3)$

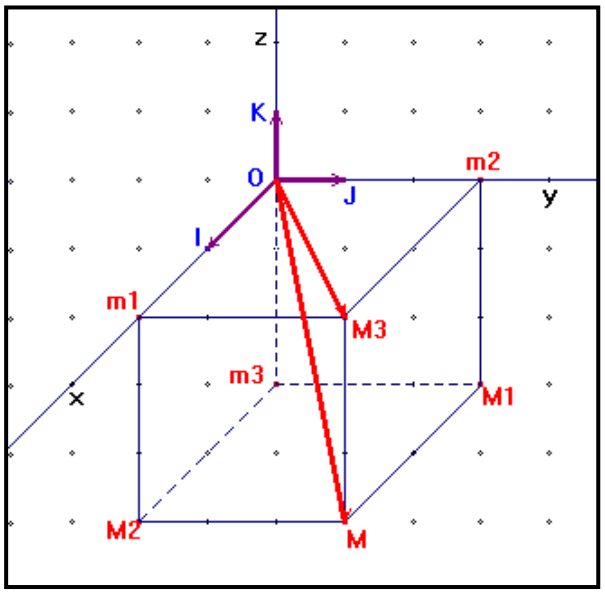
طريقة: لتعليم نقطة M علمت إحداثياتها (x,y,z)

في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ يمكننا تعليم النقط m_1، m_2، m_3، M_1، M_2 و M_3

ثم رسم متوازي المستطيلات $m_1 0 m_2 M_3 M_2 m_3 M_1 M$

حيث: $m_1(x,0,0)$، $m_2(0,y,0)$، $m_3(0,0,z)$

$M_1(0,y,z)$، $M_2(x,0,z)$، $M_3(x,y,0)$



www.dzexams.com

ج- إحداثيات شعاع

تعريف: $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء. $\vec{u}$ شعاع و لتكن M النقطة الوحيدة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

إحداثيات الشعاع $\vec{u}$ هي $\left(x,y,z\right)$ إحداثيات النقطة M في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.ويمكن أن نكتب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

و هكذا كل شعاع $\vec{u}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

5.الحساب على الإحداثيات

نتائج: $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء.

1. إذا كان $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ شعاعين من الفضاء و كان α عددا حقيقيا فإن:
   1. $\vec{u}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=0$
   2. $\vec{u}=\vec{v}$ يعني $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
   3. إحداثيات $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ هي $\left(x+x',y+y',z+z'\right)$ و إحداثيات $\alpha\vec{u}$ هي $\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)$
2. إذا كانت $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ نقطتين من الفضاء فإن:
   1. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$
   2. إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أ.الأشعة من نفس المستوي:

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء. $\vec{u}\left(a,b,c\right)$، $\vec{v}\left(a',b',c'\right)$ و $\vec{w}\left(a'',b'',c''\right)$ ثلاثة أشعة من الفضاء.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y بحيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

و هذا يعني أن الجملة $\begin{cases}ax+a'y=a''\\bx+b'y=b''\\cx+c'y=c''\end{cases}$ تقبل حلا $\left(x,y\right)$ في $\mathbb{R}^2$.

ب.معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء. ليكن $\left(D\right)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ شعاع توجيه له.

$M\left(x,y,z\right)\in\left(D\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ أي$\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$ $x-x_A=\alpha a$ و $y-y_A=\alpha b$ و $z-z_A=\alpha c$

و هذا يعني إذا كان $abc\neq 0$ أن $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ أي أن مثلا: $\begin{cases}b\left(x-x_A\right)-a\left(y-y_A\right)=0\\c\left(x-x_A\right)-a\left(z-z_A\right)=0\end{cases}$

أما إذا كان أحد الأعداد a، b أو c معدوما فإن مثلا في حالة $c=0$: $\begin{cases}b\left(x-x_A\right)-a\left(y-y_A\right)=0\\z=z_A\end{cases}$

أما إذا انعدم عددان من الأعداد a، b و c فإن مثلا في حالة $a=b=0$: $\begin{cases}x=x_A\\y=y_A\end{cases}$ و يبقى z كيفي.

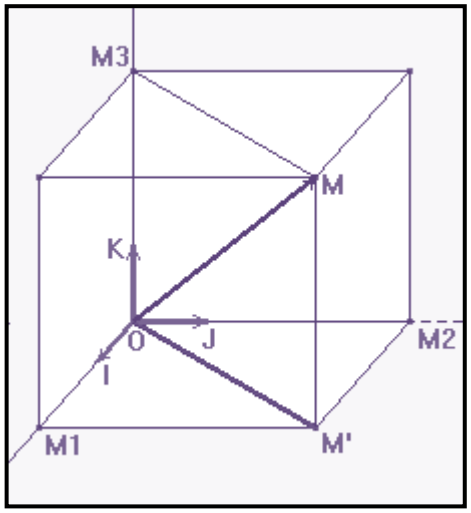
www.dzexams.com

حالات خاصة: نرمز إلى محور الفواصل بـ (Ox)، إلى محور التراتيب بـ (Oy) وإلى محور الرواقم بـ (Oz) الجدول التالي يحدد الشروط الكافية و اللازمة التي يجب أن تحققها (x,y,z) إحداثيات نقطة M لكي تنتمي إلى المحور المعني:

المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$y=z=0$	$z=x=0$	$x=y=0$

6. المسافة بين نقطتين

أ. العبارة التحليلية لطويلة شعاع



$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. نعتبر الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$

و لتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. نعلم أن $\|\vec{u}\|=OM$.

نعتبر M_1، M_2، M_3 و M' النقط المعرفة كما يلي:

$\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$، $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{j}$، $\overrightarrow{OM_3}=z\vec{k}$ و $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OMM' نحصل على:

$OM^2=OM'^2+MM'^2$ و بما أن $MM'^2=OM_3^2$ فإن:

$$OM^2=OM'^2+OM_3^2$$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OM_1M' نحصل على: $OM'^2=OM_1^2+M_1M'^2$ و بما أن: $M_1M'^2=OM_2^2$ فإن:

$OM'^2=OM_1^2+OM_2^2$ نجد هكذا أن: $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2$ و منه:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{أي} \quad OM^2=x^2+y^2+z^2$$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب طويلة الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ بـ: $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال: طويلة الشعاع $\vec{u}(-2,1,3)$ هي $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}$ و منه $\|\vec{u}\|=\sqrt{14}$.

ب. المسافة بين نقطتين

علما أن $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$ و بتطبيق المبرهنة السابقة على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب المسافة بين النقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ بـ:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(0,-2,3)$ هي $AB=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$

www.dzexams.com

ملاحظة: عند إجراء الحسابات غالبا ما يفضل مربع المسافة على المسافة.

3.معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم:

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. α عدد حقيقي موجب تماما. $\left(S\right)$ سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α. لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة كيفية من الفضاء.

$M\in\left(S\right)$ يعني $OM=\alpha$ أي $OM^2=\alpha^2$ و هذا يعني $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

إذن $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ هي معادلة لسطح الكرة $\left(S\right)$ التي مركزها O و نصف قطرها α.

www.dzexams.com

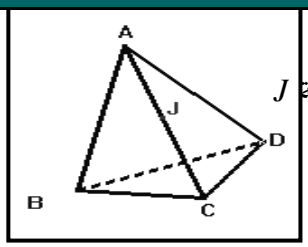
تمارين

رقم	نص التمرين

1

$ABCD$ رباعي وجوه . J نقطة من الحرف $[AC]$

أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) الذي يمر من النقطة J و الموازي للمستقيمين (AB) و (CD) محددا طبيعته.



2

$ABCD$ رباعي وجوه. I ، J و K ثلاث نقط تنتمي عل الترتيب إلى الأحرف $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AD]$.

المستقيمان (JK) و (CD) غير متوازيين.

1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الوجهين ABC و ACD.
2. بين أن المستقيمين (JK) و (CD) يتقاطعان في نقطة M و حيث أن المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD). أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK).

3

$ABCDEFGH$ مكعب. لتكن النقط I ، J و K حيث I منتصف $[FG]$، $4\overrightarrow{FJ}=3\overrightarrow{FE}$ و $2\overrightarrow{DK}=3\overrightarrow{DC}$

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{FG}$.
2. بين أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (IJ) و (AK) ؟

4

$ABCD$ رباعي وجوه. I منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل الوجه ABC. نعتبر النقطتين H و K المعرفتين بِـ

$\overrightarrow{DH}=\frac{3}{7}\overrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$.

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AG}$.
2. بين أن النقط A ، H و K في استقامية.

5

نعتبر على المكعب $ABCDEFGH$ النقطتين M و N المعرفتين بِـ $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{DB}$.
2. هل الأشعة $\overrightarrow{MN}$ ، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي؟

6

$ABCD$ رباعي وجوه. لتكن النقط I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل المثلث ABC.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$ مرة بدلالة $\overrightarrow{DG}$ و مرة أخرى بدلالة الشعاع $\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$.
2. بين أن النقط D ، G ، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.

7

$ABCDEFGH$ مكعب. P منتصف $[EH]$، Q منتصف $[AB]$ و R منتصف $[CG]$.

www.dzexams.com

1. بين أن $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و أن $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)$.
2. بين أن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.
3. بين أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو سداسي منتظم.

8 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. O مركز الوجه $EFGH$ و P مركز الوجه $ABCD$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OP}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{GB}$.
2. نهتم فيما يلي بالهرم الذي رأسه O و قاعدته $ABCD$ و لتكن النقط Q، K، L و M حيث:

Q مركز ثقل المثلث (ODC)، K منتصف $[AB]$، M منتصف $[CD]$ و $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$.

- أثبت أن النقط O، K، M، P، Q و L تنتمي على نفس المستوي.
- أثبت أن $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقط Q، K و L ؟

9 $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A(2,1,-3)$، $B(2,5,1)$، $C(4,0,-2)$ و $H\left(5,-\frac{15}{2},-\frac{17}{2}\right)$.

1. عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. بين أن النقط I، D و H في استقامية علما أن النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

10 $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم ديكارتي للفضاء. نعتبر النقط $A(1,-2,2)$، $B\left(2,-1,\frac{3}{2}\right)$ و $C(-1,-4,3)$.

1. عين معادلات للمستقيم (AC).
2. هل تنتمي النقط O، A، B و C إلى نفس المستوي ؟

11 نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(8,5,2)$، $B(4,8,2)$ و $C(5,1,2)$.

1. احسب المسافات AB، AC و BC.
2. بين أن المثلث ABC قائم و متقايس الساقين.

12 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(3,-2,2\sqrt{3}\right)$، $B(4,3,0)$ و $C(1,5,2)$.

1. عين معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة O و تشمل النقطة A.
2. هل تنتمي النقطتان B و C إلى سطح الكرة (S) ؟
3. عين إحداثيات نقط تقاطع سطح الكرة (S) مع محور الرواقم (Oz).

13 نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A(3,0,-3)$ و $B(2,0,-2)$.

1. عين إحداثيات النقطة G بحيث $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطتين A و B ؟
2. نرفق بكل نقطة $M(x,y,z)$ العدد الحقيقي $f(M)$ المعرف بـ $f(M)=-2MA^2+3MB^2$

و لتكن (Γ_k) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $f(M)=k$ حيث k عدد حقيقي.

- عبر عن $f(M)$ بدلالة x، y و z ثم عين المجموعتين (Γ_4) و (Γ_{-12}).
- ناقش حسب قيم k طبيعة المجموعة (Γ_k).

www.dzexams.com

1 نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $E\left(0,0,-1\right)$ ، $A\left(0,0,2\right)$ ، $B\left(0,0,-4\right)$ ،

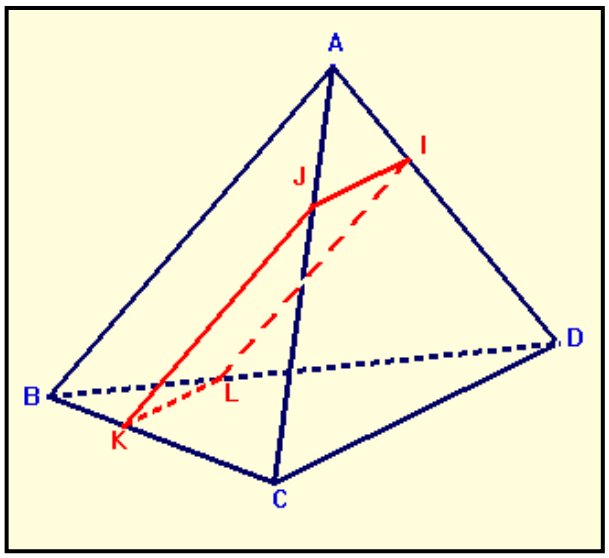
4 $C\left(\sqrt{5},0,1\right)$ و $D\left(\sqrt{5},0,-3\right)$. ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها E ونصف قطرها 3.

1. هل تنتمي النقط A ، B ، C و D إلى نفس المستوي ؟
2. ما هي معادلة (S) ؟ تحقق أن A ، B ، C و D تنتمي إلى (S).عين نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.
3. أدرس حسب قيم العدد الحقيقي a الأوضاع النسبية للسطح (S) و المستوي (P_a) ذو المعادلة $z=a$.
4. عين مركز و نصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}).

www.dzexams.com

حلول مقترحة

حل التمرين 1:



بما أن المستويين (P) و (ABC) يوازيان المستقيم (AB)

فهما يتقاطعان وفق مستقيم (JK) يوازي المستقيم (AB).

نرسم المستقيم (JK) الموازي للمستقيم (AB) مع $K \in [BC]$

بإتباع نفس المنهجية نرسم المستقيم (IJ) الموازي لِـ (CD)

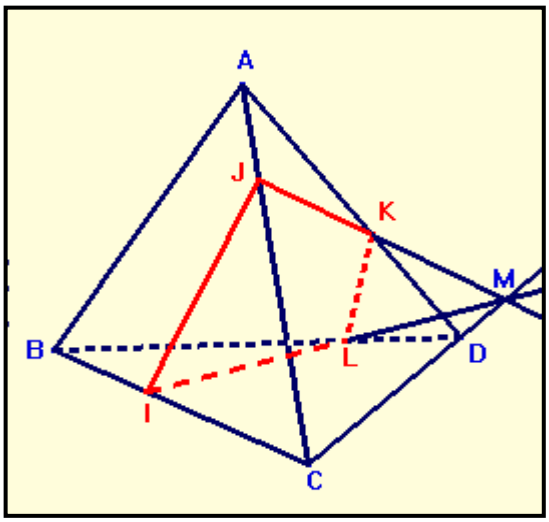
حيث I نقطة من $[AD]$.مقطع رباعي الوجوه $ABCD$

بالمستوي (P) هو إذن الرباعي $IJKL$.

بما أن (IL) يوازي (AB) و (KL) يوازي (CD) فإن

المقطع $IJKL$ متوازي أضلاع.

حل التمرين 2:



1. المستوي (IJK) يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[IJ]$
و الوجه ACD وفق القطعة $[JK]$.

2. المستقيمان (JK) و (CD) ينتميان إلى المستوي ACD
و بما أنهما غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة M. النقطة I

تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD). كذلك النقطة M

تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) لأنها تنتمي إلى

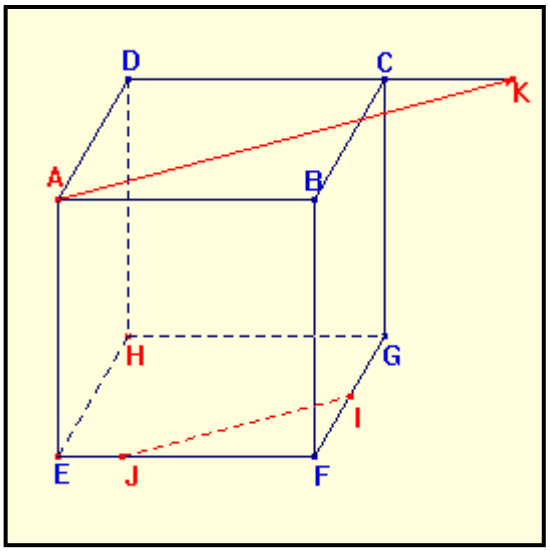
المستقيمين (JK) و (CD). و منه المستقيم (IM) محتوى في

المستويين (IJK) و (BCD).

3. يتقاطع المستقيمان (IM) و (BD) في نقطة L. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو إذن الرباعي $IJKL$.

www.dzexams.com

حل التمرين 3:



1. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}+\frac{3}{4}\overrightarrow{FE}$

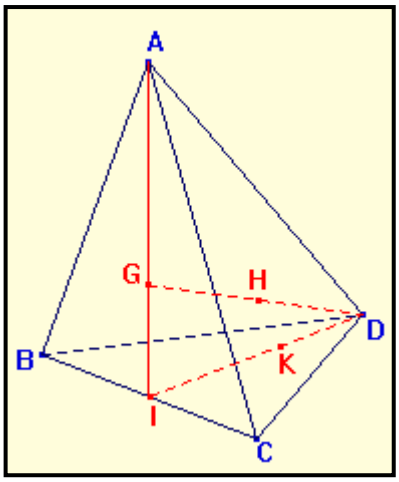
و بما أن: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{FE}$ فإن: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{FG}-\frac{3}{2}\overrightarrow{FE}$

2. لدينا مما سبق: $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ و منه فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا.

نستنتج هكذا أن المستقيمين (IJ) و (AK) متوازيان.

حل التمرين 4:



1. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{7}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}\right)$

و منه: $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AG}$

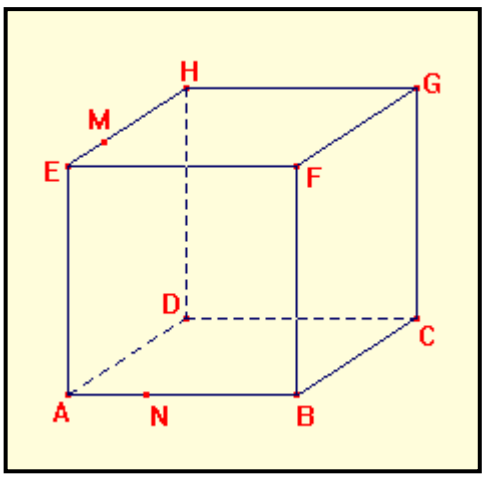
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)$

نعلم أن: $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ و منه: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

نجد هكذا: $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

2. نلاحظ أن: $\overrightarrow{AK}=\frac{7}{6}\overrightarrow{AH}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. إذن A، H و K في استقامية.

حل التمرين 5:



1. لدينا باستعمال علاقة شال: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN}$

و بما أن $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$، $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ فإن:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$ أي $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

و هكذا نجد $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

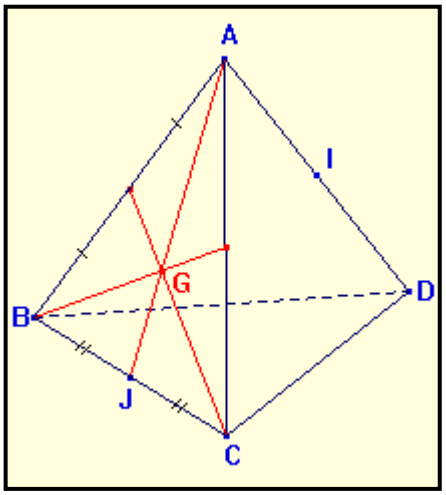
2. لدينا باستعمال علاقة شال: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HD}$

و بما أن $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{EA}$ فإن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{EA}\right)$

www.dzexams.com

نجد هكذا $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$ و منه فالأشعة $\overrightarrow{MN}$ ، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ **من نفس المستوي.**

حل التمرين 6:



1. لدينا من جهة باستعمال علاقة شال وعلما أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$$

لدينا من جهة ثانية $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DJ}$ و منه:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DJ}\right)$$

2. من السؤال الأول نجد: $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$. نستنتج أن النقط D ، G ، I و J تنتمي إلى نفس المستوي.

حل التمرين 7:

1. لدينا باستعمال علاقة شال $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$ و بما أن $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ فإن:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$$. نعلم أن $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ و بتعويض $\overrightarrow{AC}$ بـ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

و علما أن $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)$. و بما أن $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$

فإن $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. علما أن $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ نستنتج هكذا أن: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (1)

لدينا $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GR}\right)$. و بما أن:

$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}\right)$ فإن: $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{GR}\right)=\vec{0}$ و $\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

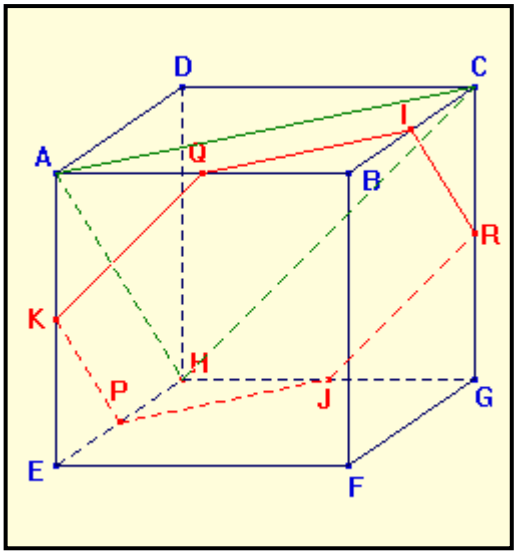
نعلم أن $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right)$ (2)

2. من العلاقة (1) نستنتج أن المستقيم (PQ) يوازي المستوي (ACH) و من العلاقة (2) نستنتج أن المستقيم (QR) يوازي المستوي (ACH) . و علما أنه يتوازى مستويان إذا و فقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كل منهما يوازي المستوي الآخر فإن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.

3. المستوي (ABC) يقطع المستويين المتوازيين (PQR) و (ACH) وفق مستقيمين متوازيين (AC) و (QI) و منه فإن

النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ و $QI=\frac{1}{2}AC$. لدينا كذلك:

www.dzexams.com



J منتصف $[GH]$ و K منتصف $[AE]$ حيث:

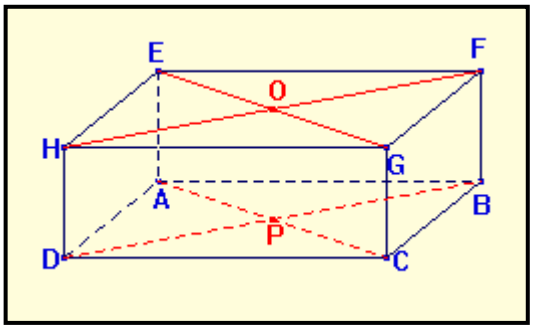
$JR=\frac{1}{2}CH$ و $KP=\frac{1}{2}AH$.

و بما أن أقطار أوجه المكعب متقايسة فإن:

$QI=IR=RJ=JP=PK=KQ$

لدينا كذلك $QJ=IP=KR$ (متوسطات للمكعب). نستنتج مما سبق أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو السداسي المنتظم $QIRJPK$.

حل التمرين 8:



1. لدينا: $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EA}$ و منه $GCAE$ متوازي أضلاع إذن $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{PC}$ و منه $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}$.

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$

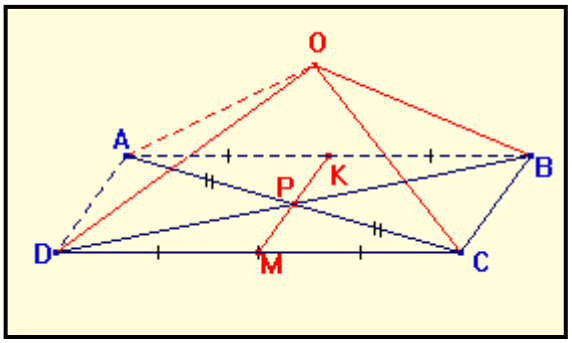
و بما أن: $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$ فإن:

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ED}$

نجد هكذا $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{ED}\right)$

2.

- لإثبات أن النقط O، K، M، P، Q و L من نفس المستوي يكفي مثلا إثبات أن النقط P، Q و L تنتمي إلى المستوي (OKM).



لدينا: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$

و منه: $(KM)//(AD)//(BC)$.

يمر إذن المستقيم (KM) من النقطة P. $\left(\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

نستنتج أن النقطة P تنتمي إلى المستوي (OKM).

لدينا: النقطة Q تنتمي إلى المستقيم (OM) $\left[\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}\right]$ و منه فالنقطة Q تنتمي إلى المستوي (OKM).

www.dzexams.com

لدينا: النقطة L تنتمي إلى المستقيم (OP) و بما أن $\left[\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}\right]$ المستقيم (OP) محتوى في المستوي (OKM)

فإن النقطة L تنتمي إلى المستوي (OKM).

- نثبت باستعمال علاقة شال انطلاقا من العلاقة $\overrightarrow{OL}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$ و العلاقة $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ أن:

$\overrightarrow{KL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{KQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ و منه: $5\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$.

نستنتج هكذا أن النقط Q، K و L في استقامية.

حل التمرين 9:

1. القول أن $ABCD$ متوازي أضلاع يعني (مثلا) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $(2,-5,-3)$

إذا فرضنا أن إحداثيات النقطة D هي (x,y,z) فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $(x-2,y-1,z+3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يعني $x-2=2$ و $y-1=-5$ و $z+3=-3$ أي $x=4$ و $y=-4$ و $z=-6$

إحداثيات النقطة D هي إذن $(4,-4,-6)$

2. إحداثيات النقطة I هي $(2,3,-1)$، إحداثيات $\overrightarrow{IH}$ هي $\left(3,-\frac{21}{2},-\frac{15}{2}\right)$ و إحداثيات $\overrightarrow{ID}$ هي $(2,-7,-5)$.

لدينا: $\overrightarrow{IH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{ID}$ و منه النقط I، D و H في استقامية.

حل التمرين 10:

1. من الواضح أن الشعاع $\overrightarrow{AC}(-2,-2,1)$ شعاع توجيه للمستقيم (AC).

القول أن النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) يعني وجود عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AC}$

أي أن $x-1=-2\alpha$ و $y+2=-2\alpha$ و $z-2=\alpha$ أي $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-2}=z-2$

لينا مثلا: $\begin{cases}x-y-3=0\\x+2z-5=0\end{cases}$ معادلات للمستقيم (AC).

2. القول أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن الأشعة $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ من نفس المستوي.

هل يوجد إذن عددان حقيقيان x و y يحققان مثلا: $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ ؟ أي: $\begin{cases}x+2y=-1\\-2x-y=-4\\2x+\frac{3}{2}y=3\end{cases}$

نجد بعد حل الجملة: $x=3$ و $y=-2$. نستنتج أن النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس المستوي.

www.dzexams.com

حل التمرين 11:

1. لدينا: $AB=\sqrt{(4-8)^2+(8-5)^2+(2-2)^2}$ و منه $AB=5$
بإتباع نفس الطريقة نجد: $AC=5$ و $BC=\sqrt{50}$

2. لدينا من جهة: $AB=AC$ و منه المثلث ABC متقايس الساقين.
لدينا من جهة ثانية: $AC^2+AB^2=BC^2$ $\left(5^2+5^2=\left(\sqrt{50}\right)^2\right)$ و منه المثلث ABC قائم في النقطة A.

نستنتج مما سبق أن المثلث ABC قائم في النقطة A و متساوي الساقين.

حل التمرين 12:

1. من الواضح أن نصف قطر سطح الكرة (S) هي المسافة OA و لدينا: $OA=5$.
سطح الكرة (S) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $OM=OA$ أي $OM^2=OA^2$

و منه معادلة سطح الكرة (S) **هي:** $x^2+y^2+z^2=25$

2. بما أن: $OB^2=4^2+3^2+0=25$ فإن النقطة B تنتمي إلى سطح الكرة (S).
لدينا: $1^2+5^2+2^2=30$ و $30\neq 25$. و بما أن إحداثيات النقط C لا تحقق معادلة سطح الكرة (S) نستنتج أن النقطة C لا تنتمي إلى سطح الكرة (S).

3. نعلم أن معادلة المحور (Oz) هي: $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

و بالتالي القول أن $M(x,y,z)$ نقطة مشتركة بين (S) و (Oz) يعني: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=0\\y=0\end{cases}$

تقبل هذه الجملة حلين هما $(0,0,5)$ و $(0,0,-5)$.

و هكذا يتقاطع سطح الكرة (S) مع محور الرواقم (Oz) في النقطتين $E(0,0,5)$ و $F(0,0,-5)$.

حل التمرين 13:

1. يمكن إتباع عدة طرق. نقترح فيما يلي الطريقة التالية: نفرض أن إحداثيات G هي (x,y,z).
إحداثيات الشعاع $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$ هي إذن $(-x,-y,-z)$ و منه $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $x=y=z=o$

إذن: $G(0,0,0)$ النقطة G هي إذن النقطة O مبدأ المعلم.

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;3)\}$.

2. • لدينا: $MA^2=(x-3)^2+(y-0)^2+(z+3)^2$ و $MB^2=(x-2)^2+(y-0)^2+(z+2)^2$
و منه: $MA^2=x^2+y^2+z^2-6x+6z+18$ و $MB^2=x^2+y^2+z^2-4x+4z+8$

www.dzexams.com

نجد هكذا: $f(M)=x^2+y^2+z^2-12$

(Γ_4) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M)=4$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=4$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=16$ و هي معادلة سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 4.

(Γ_{-12}) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M)=-12$ أي: $x^2+y^2+z^2-12=-12$

و هذا يعني أن: $x^2+y^2+z^2=0$ أي $x=y=z=o$ ومنه $(\Gamma_{-12})=\{O\}$

- $f(M)=k$ يعني $x^2+y^2+z^2-12=k$ أي $x^2+y^2+z^2=k+12$

بما أن $x^2+y^2+z^2\geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $(k+12)$

k	$-\infty$		-12		$+\infty$
إشارة $k+12$		$-$	0	$+$	

نميز إذن ثلاث حالات:

الحالة1: $k<-12$

المجموعة (Γ_k) هي مجموعة خالية.

الحالة2: $k=-12$

المجموعة (Γ_k) هي المجموعة $\{O\}$.

الحالة3: $k>-12$

المجموعة (Γ_k) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها $\sqrt{k+12}$

حل التمرين 14:

1. تنتمي النقط A، B، C و D إلى نفس المستوي إذا و فقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (مثلا) من نفس المستوي. لدينا $\overrightarrow{AB}(0,0,-6)$، $\overrightarrow{AC}(\sqrt{5},0,-1)$ و $\overrightarrow{AD}(\sqrt{5},0,-5)$.

هل يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ ؟

$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ يعني $\begin{cases}x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=0\\-x-5y=-6\end{cases}$. نجد بعد حل الجملة السابقة: $x=-\frac{3}{2}$ و $y=\frac{3}{2}$.

نستنتج أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

2. معادلة (S) هي: $x^2+y^2+(z+1)^2=9$

لدينا(مثلا): $EA^2=EB^2=EC^2=ED^2=9$ و منه النقط A، B، C و D تنتمي إلى (S).

www.dzexams.com

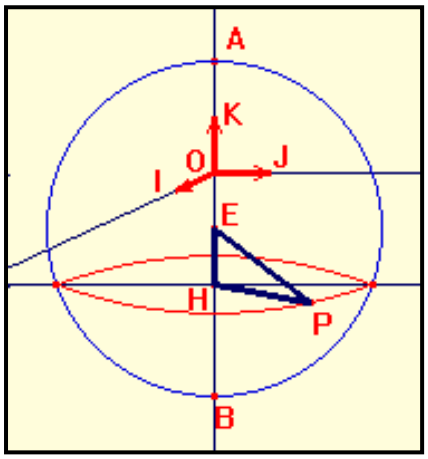
تكون $M(x,y,z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المحور (Ox) يعني $\begin{cases} x^2+y^2+(z+1)^2=9 \\ y=z=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x^2=8 \\ y=z=0 \end{cases}$

نجد بعد حل هذه الجملة نقطتين مشتركتين إحداثياتهما $(2\sqrt{2},0,0)$ و $(-2\sqrt{2},0,0)$.

يتقاطع السطح (S) مع (Oy) في النقطتين $(0,2\sqrt{2},0)$ و $(0,-2\sqrt{2},0)$ و يتقاطع مع (Oz) في النقطتين A و B.

3. نلاحظ أن المستوي (P_a) يوازي مستوي الإحداثيات $P\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نميز إذن ثلاث حالات:

- إذا كان $a\in]-\infty;-4[\cup]2;+\infty[$ يكون السطح (S) و المستوي (P_a) منفصلين.
- إذا كان $a\in\{-4;2\}$ يكون المستوي (P_a) مماسا للسطح (S) في النقطتين A و B.
- إذا كان $a\in]-4;2[$ فإن المستوي (P_a) يقطع سطح الكرة (P_a) وفق دائرة مركزها ينتمي إلى المحور (Oz).



4. (-2) ينتمي إلى $]-4;2[$ و منه المستوي (P_{-2}) يقطع سطح الكرة (S) و ذلك وفق دائرة نرمز إلى مركزها بـ H.

بما أن النقطة تنتمي إلى كل من المحور (Oz) و المستوي $(P_{-2}):z=-2$

فإن إحداثيات النقطة H هي $(0,0,-2)$.

النقطة P تنتمي إلى السطح (S) و منه $EP=3$. بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في

المثلث EHP يكون لدينا: $EP^2=EH^2+HP^2$. نجد بعد الحساب $HP=2\sqrt{2}$.

مقطع (S) بالمستوي (P_{-2}) هي الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $2\sqrt{2}$

www.dzexams.com

4

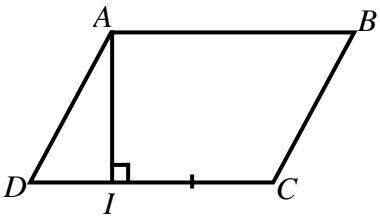
نموذج اختبار

مرفقة بالتصحيح

الفصل الثالث

www.dzexams.com

❑ التمرين الأول:



$ABCD$ متوازي أضلاع في المستوي والنقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (DC)

نفرض أن $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

1. h هو التحاكي ذو المركز I ويحوّل D إلى C.

أ. اكتب الشعاع $\overrightarrow{IC}$ بدلالة $\overrightarrow{ID}$

ب. استنتج نسبة التحاكي h

2. E صورة A بالتحاكي h و M نقطة من القطعة $[AD]$ و N صورة M بالتحاكي h.

أ. بيّن أنّ النقط C، E و N في استقامية.

ب. ما القول عن النقطة N إذا كانت M منتصف القطعة $[AD]$؟

3. نفترض أن $DC=a\sqrt{3}$ و $AD=a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

أ. احسب بدلالة a الجداء السلّمي $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$

ب. بين أن $\cos ADC=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

جـ. باستعمال علاقة الكاشي احسب بدلالة a الطول AC.

❑ التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0=2$ واساسها $r=4$.

1) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
2) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب u_2 و u_{39}.
3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$
4) احسب المجموع S' حيث: $S'=u_2+u_3+\cdots+u_{39}$

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

حل التمرين الأول:

$ABCD$ متوازي أضلاع في المستوي والنقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (DC)

نفرض أن $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

1. h هو التحاكي ذو المركز I ويحوّل D إلى C.

أ. كتابة الشعاع $\overrightarrow{IC}$ بدلالة $\overrightarrow{ID}$: $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ معناه $3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}$ ومعناه $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{ID}$

ب. نسبة التحاكي h هي -2.

2. E صورة A بالتحاكي h و M نقطة من القطعة $[AD]$ و N صورة M بالتحاكي h.

أ. تبيان أنّ النقط C، E و N في استقامية:

لدينا $h(D)=C$ ، $h(A)=E$ و $h(M)=N$ ولدينا $M\in[AD]$ إذن D، A و M في استقامية وبما أن التحاكي يحافظ على الاستقامية فإنّ النقط C، E و N في استقامية.

ب. التحاكي يحافظ على المرجح وبصفة خاصة على المنتصف ، فإذا كانت M منتصف القطعة $[AD]$ فإن N تكون منتصف $[EC]$.

3. نفرض أن $DC=a\sqrt{3}$ و $AD=a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

أ. حساب بدلالة a الجداء السلّمي $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$: $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}^2=\frac{3a^2}{3}=a^2$

ب. تبيان أن $\cos ADC=\frac{\sqrt{3}}{3}$: $\cos ADD=\frac{\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}}{DC\times DA}=\frac{a^2}{\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

جـ. باستعمال علاقة الكاشي حساب بدلالة a الطول AC :

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\times DC\cos D=4a^2-2\sqrt{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{3}=2a^2$ ومنه $AC=a\sqrt{2}$.

حل التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=2$ واساسها $r=4$.

1. عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

نعلم أن الحد العام لمتتالية حسابية متتالية بالشكل: $u_n=u_0+nr$ نعوض في العبارة نجد: $u_n=2+4n$

2. حساب u_2 و u_{39}.

$r=4, r\succ 0$ اذن المتتالية متزايدة تماما بما أن أساس هذه المتتالية موجب

www.dzexams.com

حساب: u_2 و u_{39}. عين عبارة الحد العام بدلالة n

$$u_2 = 2 + 4(2) = 2 + 8 = 10$$
$$u_{39} = 2 + 4(39) = 2 + 156 = 158$$

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{2 + 2 + 4n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{4 + 4n}{2}\right) \\ &= (n+1)(2 + 2n) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 \end{aligned}$$

4) احسب المجموع S' حيث: $S' = u_2 + u_3 + \cdots + u_{39}$

$$\begin{aligned} S_n' &= u_2 + u_3 + \ldots + u_{39} \\ &= (39 - 2 + 1)\left(\frac{158 + 10}{2}\right) = 3192 \end{aligned}$$

انتهى التصحيح

www.dzexams.com

❑التمرين الأول:

➢في هذا التمرين يوجد ستة أسئلة كلها مستقلة

❶.ادرس اتجاه تغيّر كلّ من المتتاليات المعرفة كما يلي:

أ) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=\frac{1}{2}(n^2+1)$ ب) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، $u_n=\frac{n}{5^n}$

ج) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=2n^2+2n-5$

❷.من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الحسابية:

أ) $u_n=-5n+12$ ب) $u_n=n^2+n+1$ ج) $\begin{cases}u_0=4\\2u_{n+1}-2u_n=3\end{cases}$

❸.(u_n) متتالية حسابية حيث $u_5=4$ و $u_{10}=-11$. عيّن هذه المتتالية.

❹. من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الهندسية:

أ) $u_n=2^n$ ب) $u_n=-3\times 7^n$ ج) $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=3u_n+1\end{cases}$

❺.(u_n) متتالية هندسية بحيث $u_3=24$ و $u_5=96$. عيّن هذه المتتالية.

❻.(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0=1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث: $S=1+8+15+...+603$.

أحسب S علما أن: $u_{86}=603$

❑التمرين الثاني:

يتوزع سكان ولاية معينة سنة 2020 كما يلي:

- 450000 نسمة يسكنون المدن.
- 250000 نسمة يسكنون الريف.

نفرض أنّ عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% وأنّ عدد سكان الريف يزيد بـ 10000 نسمة كلّ سنة.

1. احسب عدد سكان كلّ فئة بعد 5 سنوات.
2. في أية سنة يتجاوز عدد سكان الولاية مليون نسمة.

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

حل الموضوع الأول:

❶ نطبّق الطريقة 1.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left[(n+1)^2+1\right]-\frac{1}{2}(n^2+1)=n+\frac{1}{2}$ لدينا

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}-u_n\geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ب) نبيّن أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأدنى بالطريقة 2.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\frac{n+1}{5^{n+1}}\times\frac{5^n}{n}=\frac{n+1}{5n}$ لدينا

من أجل كلّ $n\geq 1$، $n+1\leq 5n$. ومنه $\frac{n+1}{5n}\leq 1$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

ج) نستنتج أنّ المتتالية (u_n) محدودة. 3. نبيّن بالطريقة 3 أنّ $u_n=f(n)$ حيث $f(x)=2x^2+2x-5$

الدالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4x+2$.

ندرس إشارة $f'(x)$ ونجد:

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-5,5$	↗

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-0,5]$، $f'(x)>0$ على المجال $[-0,5;+\infty[$ متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

وبالتالي، المتتالية (u_n) متزايدة.

❷ أ) نبيّن بالتراجع أنّ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=u_0+nr$ حيث $u_0=12$ و $r=-5$.

وبالتالي، (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل 12 وأساسها -5.

ب) لدينا: $u_0=1$ ، $u_1=3$ ، $u_2=7$ نلاحظ أنّ $u_1-u_0\neq u_2-u_1$.

وبالتالي، (u_n) ليست متتالية حسابية.

ج) نبيّن أنّ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $2u_{n+1}-2u_n=3$ وبالتالي $u_{n+1}=u_n+\frac{3}{2}$.

www.dzexams.com

لاختلافي تحقق: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n+r$.

(u_n) تمثيل حسابية ذات أساس $\frac{3}{2}$.

❸ تعيين r أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأوّل.

لدينا $u_{10}=u_5+(10-5)r$ أي $-11=4+5r$.

وهذه $r=-3$ أساس المتتالية (u_n) هو -3.

لدينا أيضا $u_5=u_0+5\times(-3)$ أي $u_0-15=4$.

وهذه $u_0=19$ حدّها الأوّل المتتالية هو 19.

نستنتج أنّ (u_n) هي المتتالية التي حدّها الأوّل 19 وأساسها -3.

وبرهان آخر، من أجل كلّ n عدد طبيعي، $u_n=19-3n$.

❹ أ) حساب الحدّ العام $u_n=u_0q^n$ للمتتالية الهندسية (u_n) علما أنّ $u_0=1$ و $q=2$.

ب) استنتاج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 2.

ج) برهان بطريقة أخرى أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 7.

د) هل المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1}=3u_n+1$ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ متتالية هندسية؟ (يكفي أن نعطي مثالا يبرّر الإجابة).

هـ) برهان أنّه إذا كان $u_{n+1}=qu_n$ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ($q\neq 0$) فإنّ (u_n) متتالية هندسية.

❺ تعيين q أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأوّل.

لدينا $u_5=u_3q^{5-3}$ أي $96=24q^2$ ومنه $q^2=4$.

وهذه $q=-2$ أو $q=2$.

- من أجل $q=-2$، لدينا أيضا $u_3=u_0\times(-2)^3$ أي $24=u_0\times(-2)^3$.
وهذه $u_0=-3$.

- من أجل $q=2$، لدينا أيضا $u_3=u_0\times 2^3$ أي $24=u_0\times 2^3$.
وهذه $u_0=3$.

نستنتج أنّ توجد متتاليتان هندسيتان حيث $u_3=24$ و $u_5=96$:

المتتالية التي أساسها -2 وحدّها الأوّل -3 والمتتالية التي أساسها 2 وحدّها الأوّل 3.

❻ (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0=1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث: $S=1+8+15+...+603$

حساب S. علما أن: $u_{86}=603$

نلاحظ أنّ أساس هذه المتتالية هو 7 لكن لمّا نضيف 7 إلى الحدّ الموالي لأي حدّ نلاحظ أنّ الباقي لا يتغيّر وهو 1 و $u_n=1+7n$: لكل n باستعمال برهان بالتراجع.

www.dzexams.com

$$S = 1+8+\ldots+603 = (86-0+1)\left(\frac{u_{86}+u_0}{2}\right)$$ اذن:
$$= 87\left(\frac{603+1}{2}\right) = 26274$$

حل الموضوع الثاني:

1. n عدد طبيعي. R_n عدد كراسي القاعة، و U_n عدد كراسي المدرجات و T_n العدد الإجمالي للكراسي في السنة $(2005+n)$.

لدينا $U_0 = 450$ و $R_0 = 250$.

- بما أنّ عدد كراسي المدرجات يزيد سنويا بـ 5% كل سنة، إذن:
$$U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,05 = 1,05 \times U_n$$

المتتالية (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ حيث q يحقق العلاقة التالية:

$$U_n = U_0 q^n = 450 \times 1,05^n.$$

ومنه $U_5 = 450 \times 1,05^5 \approx 574$.

- بما أنّ عدد كراسي القاعة يزيد بـ 10 كراسي كل سنة، إذن:
$$R_{n+1} = R_n + 10$$

المتتالية (R_n) متتالية حسابية أساسها $r = 10$ حيث r يحقق العلاقة التالية:

$$R_n = R_0 + nr = 250 + 10n$$

ومنه $R_5 = 250 + 10 \times 5 = 300$.

2. نجد أنّ عدد كراسي القاعة سيتجاوز عدد كراسي المدرجات في السنة $(2005+9)$ أي 2014.

انتهى التصحيح

www.dzexams.com

التمرين الأول :

I. المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن $A(-1,2), B(-2,1), C(2,-1)$ ثلاث نقط من المستوي

برهن ان المثلث ABC قائم.

II. 1. أوجد الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي معادلته $3x-y+5=0$.

2. ماهي وضعية (D) بالنسبة للمستقيم (D') الذي معادلته $2x+6y-12=0$.

3. أكتب معادلة المستقيم $(D")$ الذي يشمل المبدأ و يوازي (D).

التمرين الثاني :

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1. أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2. بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-8$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

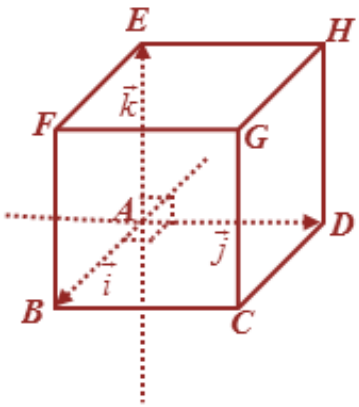
ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين الثالث :

$ABCDEFGH$ مكعب في الفضاء.

نضع $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=\vec{k}$ ؛ ونزود الفضاء بالمعلم $(A,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.



1. عيّن إحداثيات النقط C ، F ، G و H في المعلم $(A,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BH) ثمّ عيّن معادلتين له.

3. لتكن النقطة $L(4,-3;-3)$

أ. بين أن النقط B ، H و L في استقامية

ب. اكتب معادلة للمستوي (p) الذي يشمل النقطة L ويوازي المستوي $p(A,\vec{j};\vec{k})$.

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

حل التمرين الأول:

I. لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3+3=0$ و منه: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ أي: المثلث ABC قائم اذن

II. 1. ايجاد الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي معادلته $3x-y+5=0$.

الشعاع الناظمي هو: $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$

2. وضعية (D) بالنسبة للمستقيم (D') الذي معادلته $2x+6y-12=0$.

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D') هو $\vec{u}=-6\vec{i}+2\vec{j}$ و منه: $\vec{u}//\vec{v}$ ينتج عليه: $(D)//(D')$

و بالتالي (D) و (D') مستقيمان متوازيان.

3. أكتب معادلة المستقيم $(D")$ الذي يشمل المبدأ و يوازي (D).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستقيم $(D")$. و منه $\overrightarrow{OM}//\vec{v}$ (يشمل المبدأ) أي: $\begin{vmatrix}x&3\\y&-1\end{vmatrix}$

$$(-1)x-(3)y=0$$
يعني: $$-x-3y=0$$
$$x+3y=0$$

و بالتالي معادلة المستقيم $(D")$ هي: $x+3y=0$.

حل التمرين الثاني:

لتكن المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

$u_1=\frac{3}{4}u_0+2=\frac{3}{4}\times1+2=\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$ ، $u_2=\frac{3}{4}u_1+2=\frac{3}{4}\times\frac{11}{4}+2=\frac{33}{16}+2=\frac{65}{16}$ و $u_3=\frac{323}{64}$

2) يبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما: ما من أجل كل n طبيعي: $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ه

3. (v_n) المتتالية العددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-8$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-8=\frac{3}{4}u_n+2-8=\frac{3}{4}u_n-6=\frac{3}{4}u_n-\frac{3\times8}{4}=\frac{3}{4}(u_n-8)=\frac{3}{4}v_n$$

أي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$. إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $v_0=u_0-8=-7$.

ب ـ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=-7\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

www.dzexams.com

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 8$ و منه : $u_n = v_n + 8$. إذن : $u_n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

ج- - أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[-7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8\right] = 8$ ألن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (الحظ أن : $0 < \frac{3}{4} < 1$) .

2) حساب المجموع S_n بدلالة n :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right] = -7\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)}\right]$ ، إذن : $S_n = 28 \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$

حل التمرين الثالث:

1. إحداثيات النقط $C(1;1;0)$ ، $F(1;0;1)$ ، $G(1;1;1)$ و $H(0;1;1)$

2. لدينا $B(1;0;0)$ و $H(0;1;1)$ إذن $\overrightarrow{BH}(-1;1;1)$ ومنه (BH) : $\begin{cases} x = 1 - 1k \\ y = 0 + 1k \\ z = 0 + 1k \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$ مع $k \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

3. أ - $\overrightarrow{BL}(3,-3;-3)$ ومنه $\overrightarrow{BL} = -3\overrightarrow{BH}$ إذن النقط B ، H و L في استقامية.

ب - معادلة للمستوي (p) هي $x = 4$

www.dzexams.com

التمرين الأول :

اختر الاجابة الصحيحة مع التعليل في كل ما يلي :

1) C, B, A ثلاثة نقط من المستوي حيث : $A(-2;1)$, $B(4.5)$, $(1;3)$

التحاكي h الذي مركزه A ويحول C الى B نسبته :

أ) $k=-2$ ب) $k=2$ ج) $k=\frac{1}{2}$

2) من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا :

أ) $cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ب) $cos^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ج) $cos^2\alpha = \frac{1+2\cos\alpha}{2}$

3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي :

أ) محور القطعة $[AB]$ ب) الدائرة التي قطرها AB ج) المستقيم (AB).

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0=-1$ واساسها $r=2$.

5) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

6) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب u_4 و u_{119} .

7) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

8) احسب المجموع S' حيث : $S' = u_4 + u_3 + \cdots + u_{119}$

التمرين الثالث :

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(3;2)$, $B(2;-2)$, $H\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$.

(Δ) المستقيم الذي يمر بالنقطة B , $\vec{u}\binom{1}{-1}$ شعاع ناظمي له .

1) علم النقط C, B, A والمستقيم (Δ) في المعلم السابق.

2) بين ان $x-y-4=0$ معادلة للمستقيم (Δ).

3) احسب المسافة بين النقطة والمستقيم (Δ) .

4) بين ان النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

5) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

6) عين معادلة للدائرة (C) التي مركزها A وطول نصف قطرها 3 .

www.dzexams.com

7) نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[AB]$, عين ثم انشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

التمرين الأول:

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، m وسيط حقيقي

(Δ_m) مستقيم معادلته: $(m+1)x+(2m-3)y+5=0$.

1.عين قيمة m حتى تكون المسافة بين النقطة $A(5;1)$ و المستقيم (Δ_m) معدومة.

2. عين قيمة m حتى تكون المسافة بين النقطة $B(1;5)$ و المستقيم (Δ_m) تساوي4.

التمرين الثاني:

الأعداد a، b، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية. عيّن هذه الأعداد علما أنّ: $\begin{cases} ac=10b \\ a+b+c=35 \end{cases}$

التمرين الثالث:

(S) سطح كرة مركزها $\omega(2;3;4)$ و نصف قطرها 5.

1.اكتب معادلة سطح الكرة (S).

2.اكتب معادلة المستقيم (D) الذي يشمل النقطة O و شعاع توجيهه $\vec{k}$.

3.أوجد نقطة تقاطع (D) مع (S).

التمرين الرابع:

أراد شخص إيداع مبلغ 50000 دينار. فعرض عليه البنك كيفيتين:

1. الإيداع بفوائد بسيطة قدرها $5,5\%$ في السنة، حيث يستفيد كلّ سنة بمبلغ ثابت يساوي $5,5\%$ من المبلغ الابتدائي، أي 2750 دينارا.
2. الإيداع بفوائد مركبة قدرها 5% في السنة، حيث يزيد رصيده كلّ سنة بمبلغ يساوي 5% من المبلغ المدخر في السنة الجارية. فالزيادة في هذه الحالة ليست ثابتة.

I. الكيفية الأولى: نسمي S_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب S_0 و S_1 و S_2 و S_3.
2. أ) احسب S_{n+1} بدلالة S_n.

ب) استنتج طبيعة المتتالية (S_n).

جـ)عبّر عن S_n بدلالة n.

II. الكيفية الثانية: نسمي C_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب C_0 و C_1 و C_2 و C_3.

www.dzexams.com

2. أ) احسب C_{n+1} بدلالة C_n.

ب) استنتج طبيعة المتتالية (C_n).

جـ)عبّر عن C_n بدلالة n.

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

حل التمرين الأول:

(Δ_m) مستقيم معادلته: $(m+1)x+(2m-3)y+5=0$.

1- تعيين قيمة m حتى يكون المستقيم (Δ_m) والمستقيم $A(5;1)$ نقطة من (Δ_m).

$A\in(\Delta_m)$ أي: $\begin{matrix}5(m+1)+(2m-3)+5=0\\7(m+1)=0\Rightarrow m=-1\end{matrix}$

اذن من أجل $m=-1$ يكون المستقيم (Δ_m) والمستقيم $A(5;1)$ نقطة من (Δ_m).

2- تعيين قيمة m حتى يكون المستقيم (Δ_m) والمستقيم $B(1;5)$ نقطة تبعد عن (Δ_m) بـ 4 وحدات.

$$d\left((\Delta_m),B\right)=\frac{|11m-9|}{\sqrt{(m+1)^2+(2m-3)^2}}=4$$

$$\left(\frac{|11m-9|}{\sqrt{(m+1)^2+(2m-3)^2}}\right)^2=(4)^2$$

$$(11m-9)^2=16\left[(m+1)^2+(2m-3)^2\right]$$

$$41m^2-38m-79=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\m=\dfrac{79}{41}\end{cases}$$

وبالتالي: قيمة m حتى يكون المستقيم $B(1;5)$ والمستقيم (Δ_m) نقطة تبعد عن (Δ_m) بـ 4 وحدات هي: $\begin{cases}m=-1\\m=\dfrac{79}{41}\end{cases}$ أو

حل التمرين الثاني:

a ، b ، c أعداد تشكل بهذا الترتيب حدود متتالية لمتتابعة هندسية أساسها q من $\mathbb{R}^*$. عيّن هذه الأعداد علما أن: $\begin{cases}ac=10b\\a+b+c=35\end{cases}$

بحساب $a.c=b^2$ نجد: $\begin{cases}ac=10b\Rightarrow b^2=10b\Rightarrow b=10\\a+b+c=35\end{cases}$ بالتالي:

بما أن a ، b ، c هي حدود متتالية لمتتابعة هندسية: يعني $a=\dfrac{b}{q}$ / $c=b.q$ بالتعويض نجد:

$$a+b+c=\frac{b}{q}+b+b.q=35$$

$$\frac{10}{q}+10+10q=35$$

يعني q هي حل المعادلة بالمجهول q التالية:

أي: $10+10q+10q^2=35q$ نجد: $10q^2-25q+10=0$

اذن: $q=\dfrac{1}{2}$ او $q=2$ نأخذ $q=2$ ونجد:

$$a=\frac{b}{q}=\frac{10}{2}=5$$

$$c=b.q=2*10=20$$

و منه: $a=5,b=10,c=20$

حل التمرين الثالث:

www.dzexams.com

5. اوضع طريقة لتعيين مستقيم (D) يشمل النقطة O و يعامد المستوي (P) الذي يشمل النقطة $\omega(2;3;4)$ و يعامد سطح الكرة (S).

1. عين معادلة سطح الكرة (S) : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$

2. عين معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة O و شعاع توجيه له هو $\vec{k}$ و هو متجه ناظمي للمستوي $(O;\vec{k})$ و هو محور الحوامل لمعلم الفضاء $(O;\vec{i},\vec{k})$ و $(O;\vec{j},\vec{k})$: اذن: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ معادلة له.

3. تحقق أن (D) يقطع (S) في نقطتين $(z-4)^2=25 \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ z=9 \end{cases}$

و عين إحداثيات نقطتي تقاطع (D) مع (S) $A(0;0;-1), B(0;0;9)$.

حل التمرين الرابع:

I. الجزء الأول:

1. لنبين أن:

$S_0=50000$ ، $S_1=52750$ ، $S_2=55500$ ، $S_3=58250$

2. أ) بالتعرف في الحدود S_0 و S_1 و S_2 و S_3 نلاحظ أن كل حد من هذه الحدود يساوي الحد الذي يسبقه مباشرة مضافا إليه $2\,750$ ، وهذا يعني أن:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_{n+1}=S_n+2\,750$

ب) نستنتج أن (S_n) متتالية حسابية حدها الأول $S_0=50000$ وأساسها $r=2\,750$.

ج) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=S_0+nr=50000+2750n$.

II. الجزء الثاني:

1. لنبين أن:

$C_0=50000$ ، $C_1=52\,500$ ، $C_2=55125$ ، $C_3=57881,25$

2. أ) بالتعرف في الحدود C_0 و C_1 و C_2 و C_3 نلاحظ أن كل حد من هذه الحدود يساوي الحد الذي يسبقه مباشرة مضافا إليه $1,05$ ، وهذا يعني أن:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $C_{n+1}=C_n+\frac{5}{100}\times C_n=1,05\times C_n$

ب) نستنتج أن (C_n) متتالية هندسية حدها الأول $C_0=50000$ وأساسها $q=1,05$.

ج) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $C_n=C_0\times q^n=50000\times(1,05)^n$.

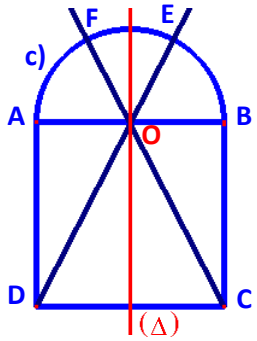
انتهى التصحيح

www.dzexams.com

التمرين الأول :

$ABCD$ مربع طول ضلعه $1cm$. (c) نصف دائرة قطرها $[AB]$ مركزها O خراج المربع.

المستقيمان (OD) و (OC) يقطعان (c) في النقطتين E و F على الترتيب (أنظر الشكل) .



1) أ) برهن أن (Δ) محور القطعة $[AB]$ هو محور تناظر للشكل .

ب) استنتج أن المستقيمين (DC) و (EF) متوازيان .

2) h التحاكي الذي مركزه O ويحول النقطة D إلى النقطة E .

أ) ما هي صورة C بالتحاكي h .

ب) برهن أن نسبة التحاكي h هي : $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3) لتكن النقطتان H و K المسقطين العموديين للنقطتين E و F على $[AB]$.

أ) بين أن $H=h(A)$ و استنتج صورة K .

ب) برهن أن الرباعي $EFKH$ مربع .

ج) قارن بين مساحتي المربعين $ABCD$ و $EFKH$.

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس نعتبر النقط: A(2 ;1) , B(5.7) , C(3,-1)

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=27$ و (C) هي دائرة قطرها $[B]$

1.حسب الأطوال AB و AC ثم أحسب $\vec{B}.\overrightarrow{AC}$; استنتج قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية $\widehat{BAC}$

2.أكتب معادلة لكل مجموعة (E) و (C) (سمي N مركز الدائرة (C))

3.أدرس وضعية (E) و (C)

4.اكتب معادلة المماس للدائرة (C) عند النقطة B

التمرين الثالث :

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;2;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1;-1;2)$ ، وليكن المستقيم (Δ) المعرف بـ : $\begin{cases} x-y+z-10=0 \\ 2x+y-z+4=0 \end{cases}$.

1) عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

2) عين تقاطع (D) مع (Δ) .

اقلب الصفحة

www.dzexams.com

❑ التمرين الرابع :

(v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \left(a^2 - 3\right)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

انتهى الموضوع

www.dzexams.com

تجدون هذا الملف في صفحة الأستاذ شعبان الرسمية: 5min Maths

5minmaths

www.dzexams.com