



الخليل للمathematics

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

تقويم تشخيصي

+

[تصحيح نموذجي مقترح]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[19 سبتمبر 2021]

www.dzexams.com

تقويم تشخيصي

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{2x - 2}$$

حيث α و β عددين حقيقيين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 ♦ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 و $f(0) = -1$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = -2$ و $\beta = 2$:

1 احسب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2 احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3

أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 2}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(2x - 2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

6 ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + m \dots (E)$$

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب:

$$h(x) = f(|x|)$$

1 ادرس شفعية الدالة h .

2 وضح كيف يمكن المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .

تصحيح نموذجي (مقترح)

(I) تعيين α و β حتى يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 و -1 : $f(0) = -1$

لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناه: $f'(0) = 0$

نعين أولا $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(2x - 2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0 \Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha = 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \text{ : ومنه}$$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

① حساب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

② حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) \\
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

3

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x - 2} \\
&= \frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x - 2b + c}{2x - 2}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = -2 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}} \quad \text{إذن:}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2x-2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x - 2 = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	$\parallel$	$+$

ومنه:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 1[$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$

4

أ/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2 - 2x + 2)}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}
 \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:
لدينا:

$$\begin{aligned}
 2x(x-2) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$	

5

أ/ إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:
نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ) :

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1; 0)$

ب/ تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ معناه: $x < 1$ أو $x > 1$
معناه: $(-x) < -1$ أو $(-x) > -1$ معناه: $(2(1) - x) < 1$ أو $(2(1) - x) > 1$
معناه: $(2(1) - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ معناه: $(2(1) - x) \in D_f$
• ولدنا:

$$f(2(1) - x) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 \frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 \\ &= 2(0) \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1; 0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega \Rightarrow f'(a)(1 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} a + \frac{a^2 - 2a + 2}{2a - 2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2 - 2a + 2)(2a - 2)}{(2a - 2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0$$

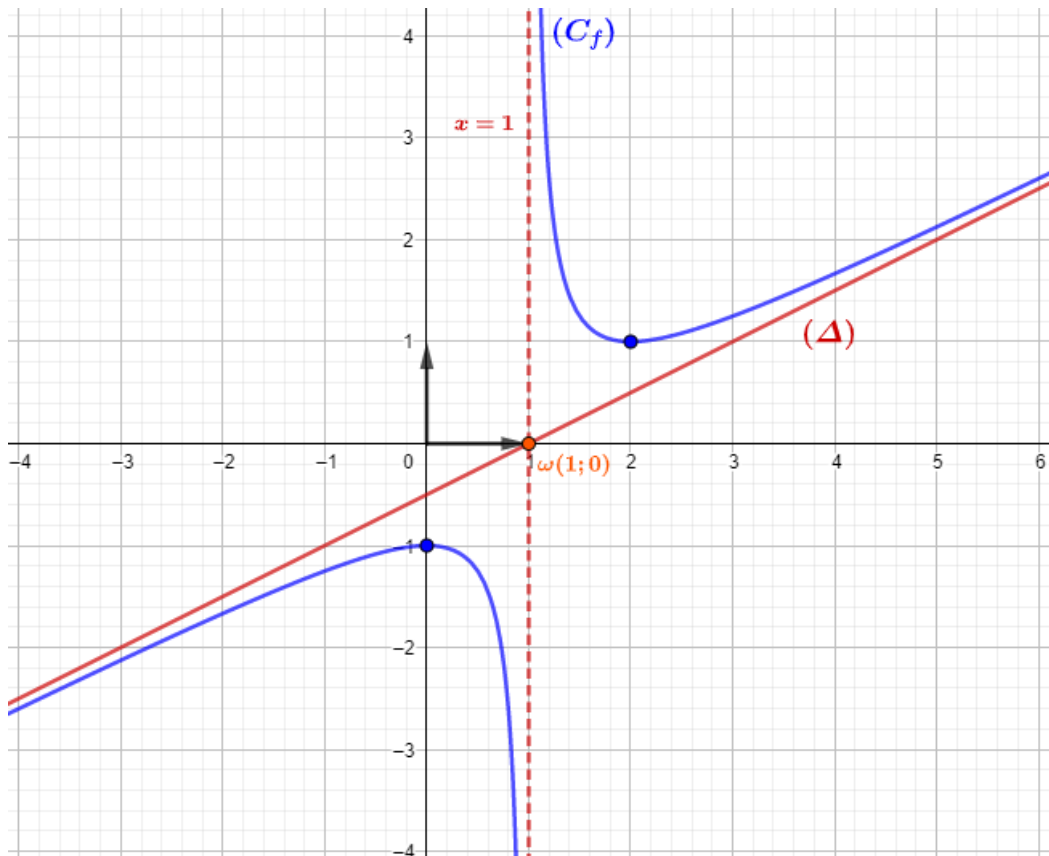
$$\Rightarrow 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

6 رسم كل من (Δ) و (C_f) :



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty; -1[$	للمعادلة حل موجب
لما	$m = -1$	للمعادلة حل معدوم
لما	$m \in]-1; -\frac{1}{2}[$	للمعادلة حل سالب
لما	$m = -\frac{1}{2}$	المعادلة لا تقبل حولا
لما	$m \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$	للمعادلة حل موجب

(III)

1 دراسة شفعية الدالة h :

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

2 توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h):

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶