

التمرين الأول :

صندوق به 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس، منها أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 . وثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 2، 2، 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقمين 1، 3 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. نسمي الحادثتين: A: الكرة الأولى تحمل الرقم 1 B: الكرات الثلاث من نفس اللون.

$$1. \text{ بين أن } P(A) = \frac{4}{9} \text{ وأن } P(B) = \frac{5}{84}$$

$$2. \text{ احسب } P(A \cap B) \text{ ثم استنتج } P(A \cup B)$$

لاعب يدفع 5 ديناراً ثم يسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق السابق دفعة واحدة، إذا كانت الكرات تحمل نفس الرقم يحصل على 10 دينار . وإذا كانت كرتان فقط تحملان نفس الرقم يحصل على 5 دينار وإذا كانت الكرات تحمل أرقاماً مختلفة مثلي مثلي لا يحصل على شيء (يخسر مافعه). نسمي X : المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب قيمة الربح الصافي

$$3. \text{ بين أن } P(X=0) = \frac{55}{84}$$

$$4. \text{ عين قيم المتغير العشوائي } X$$

$$5. \text{ اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي } X$$

$$6. \text{ احسب } E(X)$$

$$7. \text{ يعيد شخص هذه اللعبة 2000 مرة بصفة مستقلة. ما هو مجموع الربح المتوقع؟}$$

التمرين الثاني:

(D_1) و (D_2) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $y = \ln(2)x + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$ و $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$1. \text{ احسب فاصلة نقطة تقاطع } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ ثم مثل } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ في المعلم } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بهذا الأول } u_0 \text{ حيث } u_0 = 2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$2. \text{ مثل على محور النواصل الحدود } u_0, u_1, u_2, u_3 \text{ (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)}$$

$$3. \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} < u_n - 1 \text{ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية } (u_n)$$

$$(v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } v_n = 3u_n + \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي.}$$

$$4. \text{ عين قيمة } \alpha \text{ بحيث تكون المتتالية } (v_n) \text{ هندسية.}$$

$$\text{نضع } \alpha = 3$$

$$6. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم عبر عن } u_n \text{ بدلالة } n.$$

7. أحسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

8. هل المتتالية (w_n) متقاربة؟

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x - x$ ، (C_f) منحنيا البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم لمتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -x$ مغارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.
- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) مع المستقيم (D) .
- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- حدد إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.
- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له.
- بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب إحداثياتها.
- ارسم (C_f) والمماس (T) والمستقيم (D) .
- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $e^x = 1 + me^{-x}$.
- g الدالة لمعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- اعتمادا على دراستك لاتجاه تغير الدالة f
 - استنتج -دون حساب- نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
 - شكل جدول تغيرات الدالة g
- $F(x) = e^x \left(\frac{1}{2} e^x - 1 \right) - \frac{1}{2} (x^2 - 1)$ كما يلي:
 - بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
 - استنتج اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. النقط A, B, C لواحقتها على الترتيب: z_A, z_B, z_C

$$z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, \quad z_B = -i\sqrt{3}, \quad z_A = -3 + 2i\sqrt{3}$$

- بين أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث ABC .
- أحسب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
- أحسب لاحقة النقطة D صورة النقطة G بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
- بين أن $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} \right)^{2021} = -1$.
- استنتج أن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلى D .

$$-\ln(2) + \ln\left(\frac{2}{e}\right) < \ln(2)u_{n+1} + \ln\left(\frac{2}{e}\right) < \ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right) \text{ يستقر}$$

$$-1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

استنتاج اتجاه التغير: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4. تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية.

$$v_{n+1} = 3 \left(\ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right) \right) + \alpha \text{ يكافئ } v_{n+1} = 3u_{n+1} + \alpha$$

$$v_{n+1} = 3 \ln(2)u_n + 3 \ln(2) - 3 + \alpha$$

$$v_{n+1} = \ln(2) \left(3u_n + 3 - \frac{3-\alpha}{\ln(2)} \right) \text{ يكافئ}$$

$$\alpha = 3 \text{ لكي أن يكون: } 3 - \frac{3-\alpha}{\ln(2)} = \alpha$$

$$v_n = 9(\ln 2)^n \text{ عبارة الحد العام:}$$

$$u_n = \frac{1}{3}v_n - 1 = \frac{1}{3}(9(\ln 2)^n) - 1 = 3(\ln 2)^n - 1$$

نهاية المتتالية (v_n) و نهاية المتتالية (u_n)

المتتالية (v_n) هندسية أساسها موجب أصغر من 1 فنهايتها 0

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{3}v_n - 1 \right) = -1$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

5. تقارب المتتالية (w_n)

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n = \frac{1}{3}v_0 - 1 + \frac{\frac{1}{3}v_1 - 1}{\ln 2} + \frac{\frac{1}{3}v_2 - 1}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{3}v_n - 1}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n = \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 1 - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} + \dots - \frac{1}{(\ln 2)^n}$$

المتتالية (w_n) مجموع متتاليتين متقاربتين فهي متقاربة

التمرين الثالث:

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 1) - x = +\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - e^x = 0$$

3. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (D) .

$$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1) \text{ حيث } e^{2x} - e^x = 0$$

$$x \in]-\infty, 0[\text{ المنحنى } (C_f) \text{ يقع فوق المستقيم } (D)$$

$$x \in]0, +\infty[\text{ المنحنى } (C_f) \text{ يقع تحت المستقيم } (D)$$

$$x \in]-\infty, 0[\text{ المنحنى } (C_f) \text{ يقطع المستقيم } (D) \text{ في النقطة التي فاصلتها } 0$$

التمرين الأول:

$$R1; R1; R1; R2; B2; B2; B3; V1; V3$$

$$1. \text{ إثبات أن: } P(A) = \frac{4}{9} \text{ وأن } P(B) = \frac{5}{84}$$

$$P(B) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_6^2} = \frac{5}{84} \text{ و } P(A) = \frac{A_4^2 \times A_2^2}{A_6^2} = \frac{4}{9}$$

2. حساب $P(A \cap B)$ ثم استنتاج $P(A \cup B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{31}{63}$$

$$3. \text{ إثبات أن } P(X=0) = \frac{55}{84}$$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = \frac{55}{84}$$

4. قيم المتغير العشوائي X : $X = \{-5, 0, 5\}$

5. قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	-5	0	5
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{5}{84}$

$$6. \text{ حساب } E(X) = \sum p_i x_i = \frac{-95}{84}$$

7. مجموع الربح المتوقع بعد إعادة هذه اللعبة 2000 مرة

$$2000 E(X) = -2262$$

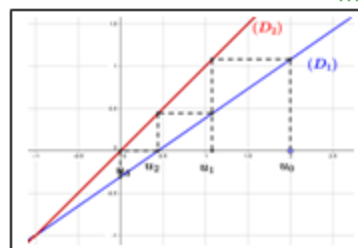
من المتوقع خسارة ما يقارب 2262 ديناراً

التمرين الثاني:

1. فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) : يحل المعادلة

$$x = 2 \text{ نجد: } 3x - 4 = x$$

2. تمثيل (D_1) و (D_2) والحدود



3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $-1 < u_{n+1} < u_n$

بالتراجع:

$$u_1 = \ln(8) - 1 \text{ و } u_0 = 2$$

$$-1 < u_1 < u_0 \text{ فالخاصية محققة من أجل } 0$$

ب- نبرهن صحة الاستنتاج: $-1 < u_{n+1} < u_n$ يستقر

$$-1 < u_{n+2} < u_{n+1} \text{ يستقر } -1 < \ln(2)u_{n+1} < \ln(2)u_n$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$+\infty$	0

12. إثبات أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

ولدينا $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$F'(x) = e^{2x} - e^x - x = f(x)$$

اتجاه تغير الدالة F

f موجبة تماما إذن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

تصريح فريش:

1. إثبات أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{3 + 3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{(1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{-4}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

طبيعة المثلث ABC: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

معناه $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$ و $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$

أي $AB = BC$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متساوي الساقين

2. لاحظ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

3. لاحظ النقطة D : $\frac{z_D - z_G}{z_C - z_G} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_D = z_G e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(i\sqrt{3}) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. إثبات أن: $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2011} = -1$

$$\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2011} = \left(\frac{-3 + 2i\sqrt{3} - \left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3} - \left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^{2011}$$

$$= \left(\frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{3 - 3i\sqrt{3}}\right)^{2011} = (-1)^{2011} = -1$$

استنتاج: $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} = -1$ يعني $\overline{DB} = -\overline{DA}$

فإن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلى D

4. اتجاه تغير الدالة f : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا المشتقة:

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = 2\left(e^x + \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)$$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

5. إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$: f موجبة كلما

المماس (T): (T) يوازي المستقيم (D) يعني $f'(x) = -1$

$$x = -\ln(2) \text{ بكافئ } 2e^{2x} - e^x - 1 = -1$$

6. معادلة المماس: $y = -x - \frac{1}{4}$

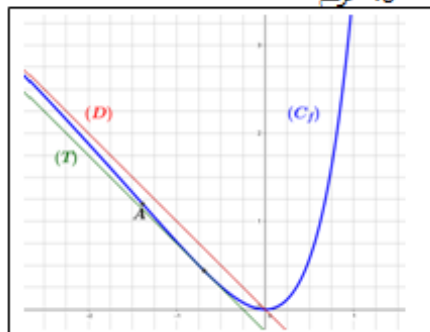
7. نقطة انعطاف المنحني (C): f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1)$$

الدالة f' تتعدم عند $-\ln 4$ وتغير إشارتها فالمنحني (C)

يقبل نقطة انعطاف إحداثياتها: $A(-\ln 4, e^{\frac{1}{4}} - e^{\frac{1}{2}} + \ln 4)$

8. الرسم



9. لمناقشة الجابلية:

$$e^{2x} = e^x + m \text{ تكافئ: } e^x = 1 + me^{-x}$$

$$e^{2x} - e^x - x = -x + m \text{ تكافئ: } m \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[$$

$$m \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\text{ المعادلة لا تقبل حلا}$$

$$m = -\frac{1}{4} \text{ المعادلة تقبل حلا وحيدا}$$

$$m \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right[\text{ المعادلة تقبل حلين مختلفين}$$

$$m \in [0, +\infty[\text{ المعادلة تقبل حلا وحيدا}$$

10. نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :