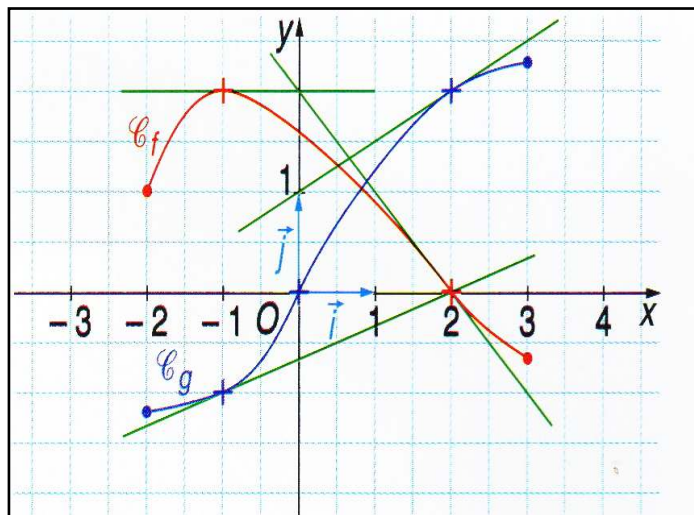


مجلة العبقرى في الرياضيات (الاشتقاقية والاسنمارية)
الدروس // الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقنى رياضي.

دروس: حول الاشتقاقية والاسنمارية // التحضري الجيد للبيكالوريا // الشعبة: 03 ع؛ ث.

1 الاشتقاقية:

① منافسة النشاط 01 ص 40:



1. حساب الأعداد المشتقة:

نعلم أن العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي يُمثل معامل توجيه المماس عند هذا العدد.

بطاقة عامة:

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند ذات الفاصلة x_0 ، ولحسابه نختار نقطتين من المماس مثلاً:

$$f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \text{ نجد: } B(x_B; y_B) \text{ و } A(x_A; y_A)$$

$$f'(-1) = 0$$

$$g'(-1) = \frac{0+1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$f'(2) = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

$$g'(2) = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$(f + g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = \frac{1}{3}$$

$$(f \cdot g)'(2) = f'(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot f(2) = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{-3f'(-1)}{[f(-1)]^2} = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{[g(2)]^2} = -\frac{1}{2}$$

2. حساب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$ حيث من أجل $x \in [0; 2]$

لدينا $h(x) = f(2x - 1)$

لدينا: $h'(x) = 2f'(2x - 1)$

$$h'(0) = 2f'(-1) = 0$$

$$h'\left(\frac{3}{2}\right) = 2f'(2) = -2$$

② العدد المشتق - الدالة المشتقة:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

x_0 و $x_0 + h$ عدنان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند x_0 ، ونرمز

لها بالرمز $f'(x_0)$.

ملاحظات:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ العدد المشتق:}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ بوضع } x = x_0 + h \text{ نجد:}$$

إذا قبلت f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I

نقول أنها تقبل الاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي

$$f': x \mapsto f'(x)$$

مثال: (حل التمرين 01 ص 58)

f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

ألتحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$f(1+h) = \sqrt{(1+h)^2 + 3} = \sqrt{h^2 + 2h + 4}$$

$$f(1) = \sqrt{1^2 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{h^2+2h+4}-2)(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

$$= \frac{h^2+2h+4-4}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

$$= \frac{h^2+2h}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

$$= \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

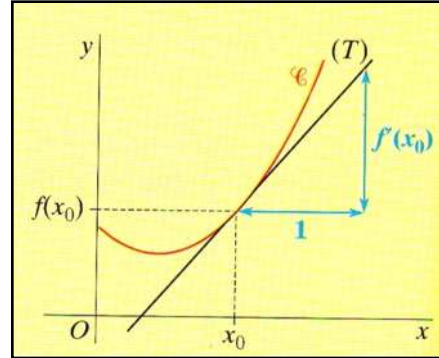
إذن: f قابلة للاشتقاق عند 1، وعددها المشتق عند 1 هو:

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

③ التفسير البياني (ماس منحنى دالة):

تعريف وخاصية:

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند x_0 ، فإن منحنىها البياني يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



مثال 01: (● حل التمرين 04 ص 58)

لدينا: f معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0، أي:

$$l = f'(0) \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = l \in \mathbb{R}$$

1) تحديد $f(0)$ و $f'(0)$:

المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ ، هو مماس للمنحنى (C_f)

عند النقطة $A(0; 2)$ معناه: $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = f'(0)(x - 0) + f(0) \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = f'(0) \times x + f(0) \end{cases} \text{ ومنه:}$$

$$\begin{cases} f'(0) = -3 \\ f(0) = 2 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد:}$$

2) تفسير هندسيا العدد $\frac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x \neq 0$:

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{f(x)-2}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \text{ إذن: } \frac{f(x)-2}{x} \text{ هي}$$

نسبة تزايد الدالة f بين العددين x و 0.

3) تبرير وجود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = -3$$

لأن: f قابلة للاشتقاق عند 0.

مثال 02:

(● دراسة قابلية اشتقاق دالة عند قيمة من اليسار ومن اليمين)

f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = |x^2 - 4|$.

لدينا: $f(x) = |x^2 - 4|$

$$= \begin{cases} x^2 - 4; & x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4); & x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4; & x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ -x^2 + 4; & x \in [-2; 2] \end{cases}$$

✕ لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند (-1) :

بمأن: $-1 \in [-2; 2]$ ، فإن: $f(x) = -x^2 + 4$

$$\text{لدينا: } f(-1) = -(1)^2 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4 - 3}{x + 1} \text{ ومنه:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 2 = f'(-1)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق عند (-1) ، وعددها المشتق عند (-1)

$$\text{هو: } f'(-1) = 2.$$

2) التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماساً عند النقطة ذات الفاصلة (-1) ،

$$\text{معامل توجيهه: } f'(-1) = 2;$$

ومعادلته: $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$

$$\text{أي: } y = 2x + 5.$$

✕ لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 2:

أ. على المجال $[-2; 2]$ ، لدينا: $f(x) = -x^2 + 4$

$$\text{لدينا: } f(2) = -(2)^2 + 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4 - 0}{x - 2} \text{ ومنه:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [-(2+x)] = -4 = f'_g(2)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق عند 2 من اليسار، وعددها المشتق عند 2

$$\text{من اليسار هو: } f'_g(2) = -4.$$

ب. على المجال $[2; +\infty[$ ، لدينا: $f(x) = x^2 - 4$

$$\text{لدينا: } f(2) = (2)^2 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} \text{ ومنه:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 = f'_d(2)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق عند 2 من اليمين، وعددها المشتق عند 2

$$\text{من اليمين هو: } f'_d(2) = 4.$$

نتيجة:

بمأن: $f'_g(2) \neq f'_d(2)$ ، فإن: f غير قابلة للاشتقاق عند

2) التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 2، وتسمى هذه النقطة نقطة زاوية للمنحنى (C_f) .

معامل توجييه كل منهما: $f'_g(2) = -4$ و $f'_d(2) = 4$. ومعادلة كل منهما:

$$\text{أي: } \begin{cases} x \leq 2 \\ y = f'_g(2)(x-2) + f(2) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ y = f'_d(2)(x-2) + f(2) \end{cases}$$

$$\text{أي: } \begin{cases} x \leq 2 \\ y = -4x + 8 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 4x - 8 \end{cases}$$

تمارين: 04؛ 07؛ 08 ص 58.

2) الاستمرارية:

نشاط مقترح من طرف الأستاذ:

نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على المجال $[-2; 2]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & x \in [-2; 0[\\ x^2 + 1; & x \in [0; 2] \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = |x| + 1$$

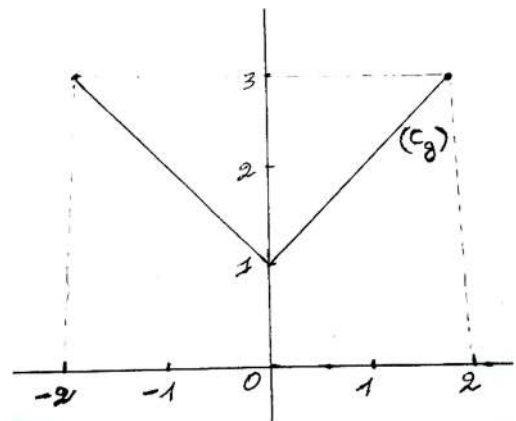
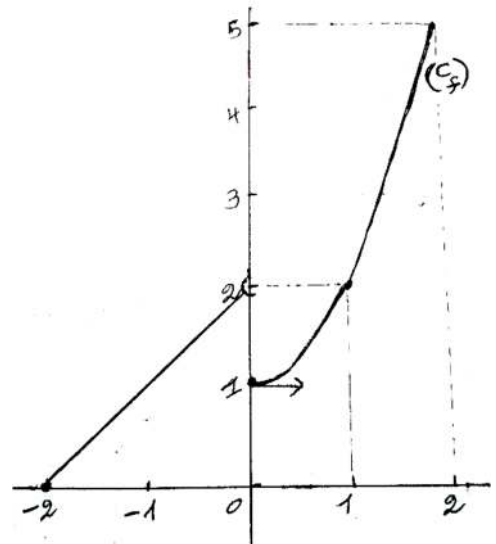
وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب.

1) أنشئ في معلمين مختلفين (C_f) و (C_g) .

2) هل يمكنك إنشاء المنحنيين (C_f) و (C_g) بدون رفع القلم (اليد)؟

حل النشاط:

1) إنشاء (C_f) و (C_g) :



2) لا يمكن رسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2; 2]$ بدون رفع القلم (اليد)، بينما يمكن رسم المنحنى (C_g) على المجال $[-2; 2]$ بدون رفع القلم (اليد).

الخلاصة:

- الدالة f غير مستمرة على مجال $[-2; 2]$.
- الدالة g مستمرة على مجال $[-2; 2]$.

① الاستمرارية:

التفسير البياني:

تكون الدالة f مستمرة على مجال I ، عندما يمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

② خواص (نقبل دون برهان):

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوي والمُحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء؛ ومركب دوال مستمرة هو دالة مستمرة.

مثال: (● حل التمرين 47 ص 29)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 - x) \sin x$.
 ☒ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لأنها عبارة عن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ ؛ وهما الدالة $\sin$ و $x \mapsto x^2 - x$.

تمارين: 49 ص 29. (النظر على الدالة الجزء الصحيح)

③ مبرهنة القيمة المتوسطة:

حل النشاط 4 ص 7:

1. الدالتان f و g مستمرتان على المجال $[-1; 2]$ ، أما h فهي غير مستمرة على المجال $[-1; 2]$.

2. بواسطة قراءة بيانية تحديد، حسب قيم العدد

الحقيقي k ، عدد حلول كل معادلة:

بطقة عامة:

حلول المعادلة $f(x) = k$ بيانياً هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = k$.

بالنسبة للمعادلة $f(x) = k$ (1)

من أجل	فإن المعادلة
$-2 \leq k \leq 3$	تقبل حل وحيد.

بالنسبة للمعادلة (2) $g(x) = k$

صـ أـ جـ ل	فـ اـ نـ اـ جـ ل
$1 < k \leq 3$ أو $-2 \leq k < 0$	تقبل حل وحيد.
$k = 1$ أو $k = 0$	تقبل حلين.
$0 < k < 1$	تقبل ثلاث حلول.

بالنسبة للمعادلة (3) $h(x) = k$

صـ أـ جـ ل	فـ اـ نـ اـ جـ ل
$2 < k \leq 3$ أو $-2 \leq k \leq 0$	تقبل حل وحيد.
$0 < k \leq 2$	لا تقبل حلول.

3. ثمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2; 3]$ ، صورتني

القيمتان -1 و 2 حدود المجال $[-1; 2]$.

4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2; 3]$ ،

المعادلتان $f(x) = k$ و $g(x) = k$ تقبلان حلا على

الأقل في المجال $[-1; 2]$ ، أما المعادلة $h(x) = k$ فلا.

المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$[-1; 2]$ ، أما المعادلتان $g(x) = k$ و $h(x) = k$ فلا.

① مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان):

مبرهنة:

f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث

$f(c) = k$.

② التفسير البياني:

f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ ، وليكن (C)

منحناها البياني في معلم $(0; I; J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

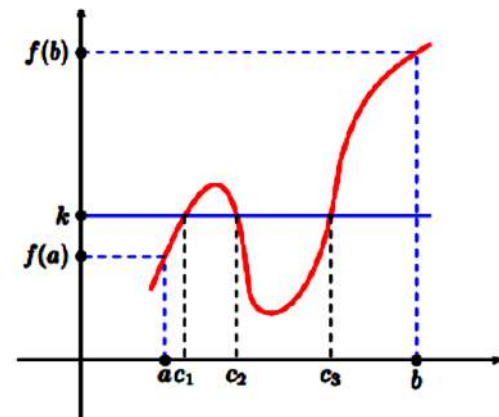
المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة

واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a

و b .

(بالنسبة للشكل التالي (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط

فواصلها على الترتيب c_1 ، c_2 و c_3).

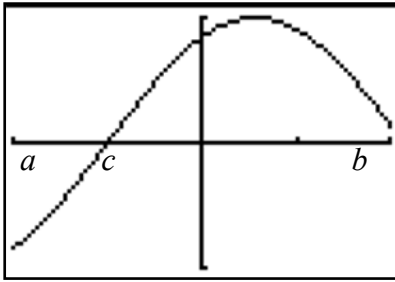


حالة خاصة:

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ ،

وكان $f(a) \times f(b) < 0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)، فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$.

أما أن: f تتعدم على الأقل مرة واحدة على مجال $[a; b]$.



③ المعادلة $f(x) = k$:

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ ، فإنه

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين

a و b .

ملاحظة:

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل

للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها

فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: (حل النمرين 50 ص 29)

طريقة:

لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a; b]$ باستعمال

مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

• نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.

• نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$.

• نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة

$-2 = x^3 - 4x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3; -2]$:

الطريقة الأولى: يمكن كتابة المعادلة $-2 = x^3 - 4x$ على

الشكل $f(x) = -2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $f(x) = x^3 - 4x$.

• الدالة f دالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$

ومن ثم على $[-3; -2]$.

• لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -15 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$ ، كما نلاحظ أن العدد -2

محصور بين العددين $f(-2)$ و $f(-3)$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3 - 4x = -2$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3; -2]$.

الطريقة الثانية: يمكن كتابة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ على

الشكل $f(x) = 0$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$.

الطريقة الثانية: يمكن كتابة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ على

الشكل $f(x) = 0$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$.

الطريقة الثانية: يمكن كتابة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ على

الشكل $f(x) = 0$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$.