

الإحتمال :

02

01 - احتمال حادثة:

يرمز لاحتمال تحقق الحادثة A بـ: $P(A)$ حيث: $0 \leq P(A) \leq 1$

$$1. \text{ إذا كان } A = \{a_1, \dots, a_k\} \text{ فإن } P(\{a_1\}) = \frac{1}{k}$$

$$2. \text{ إذا كان } A = \{a_1, \dots, a_k\} \text{ فإن } P(A) = P(\{a_1\}) + \dots + P(\{a_k\})$$

3. في حالة احتمال متساوي التوزيع يكون احتمال الحادثة

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \text{ المركبة } A \text{ هو}$$

ملاحظة 01: نقول عن تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال، نقول أيضا أن الاحتمال متساوي التوزيع.

ملاحظة 02: نعبر عن تساوي الاحتمال بعبارات مثل: زهر نرد غير مزيف، قطعة نقود متوازنة، كرات لا نفرق بينها باللمس، ...

مثال: نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

الحادثة A الحصول على رقم أكبر من 3 أي: $A = \{4; 5; 6\}$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

احتمال الحادثة:

$$P(A) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

02 - قانون احتمال: نعتبر تجربة عشوائية، Ω مجموعة النتائج

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل إمكانية e_i (مخرج)

بعدد موجب P_i مع $1 \leq i \leq n$

بحيث يتحقق ما يلي: $0 \leq P_i \leq 1$ ، $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

مثال:

e_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

خواص: A و B حادثتان .

$$1. P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, P(\bar{A}) = 1 - P(A), 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. \text{ إذا كانت الحادثة } A \text{ جزء من الحادثة } B \text{ فإن } P(A) \leq P(B)$$

$$3. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$4. \text{ إذا كانت } A \text{ و } B \text{ غير متلائمتين فإن } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

معارف أولية و قوانين أساسية:

01

01 - التجربة العشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل

تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة Ω .

مثال 01: رمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6،

تجربة عشوائية مجموعة النتائج الممكنة هي: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

02 - الحوادث أو الأحداث :

تعريف: كل جزء A من مجموعة الإمكانيات Ω يسمى حدث أو صائفة .

أنواع الحوادث:

▲ **الحدث الأولي:** إذا احتوى الجزء A عنصرا واحدا فقط يسمى حدث أولي: "صائفة أولية".

▲ **الحدث الأكيد:** مجموعة الإمكانيات Ω يسمى أيضا الحدث الأكيد .

▲ **الحدث المستحيل:** $\emptyset$ تسمى الحدث المستحيل أي جزء خالي .

▲ **الحدث العكسي:** حدث من Ω و $\bar{A}$ الحدث العكسي له و الذي يحوي كل عناصر Ω والتي غير موجودة في A .

أمثلة: حسب المثال 01 السابق نعتبر الأحداث التالية:

الحدث A : "الأرقام الفردية" أي $A = \{1; 3; 5\}$.

الحدث B : "الحصول رقم مضاعف لـ 4" أي $B = \{4\}$.

الحدث C : "الحصول رقم أكبر من 7" أي $C = \emptyset$.

الحدث $\bar{A}$: "الحصول على الأرقام الزوجية" أي $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.

أ - العمليات على الأحداث أو الحوادث: A و B حدثين من Ω

▲ **تقاطع حدثين:** هي حدث نرمز له بـ $A \cap B$ عناصرها هي العناصر المشتركة بين الحدثين A و B .

▲ **تقاطع حدثين:** هي حدث نرمز له بـ $A \cup B$ عناصرها هي عناصر A أو B .

▲ **حدثين غير متلائمين:** إذا كان $A \cap B = \emptyset$ عناصرها نقول عندئذ أن A و B غير متلائمتين .

ملاحظة: حرف $\cap$ ومعناه التقاطع و يعني أيضا الجداء .
كلمة **أو** ومعناه الاتحاد $\cup$ و يعني أيضا الجمع .

مثال: نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

الحادثة A الحصول على رقم أكبر من 3 أي: $A = \{4; 5; 6\}$

الحادثة B الحصول على رقم فردي أي $B = \{1; 3; 5\}$

الحادثة $A \cap B$ الحصول على رقم أكبر من 3 أو فردي أي $B = \{5\}$

الحادثة $A \cup B$ الحصول على رقم فردي أو أكبر من 3 أي

$$A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$$



03_ الأمل الرياضي ،التباين و الانحراف المعياري

لقانون احتمال:

تعريف: لمجموعة إمكانيات تجربة عشوائية قيمها أعداد حقيقية $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

P احتمالاً على Ω حيث: $P_i = P(e_i)$

– أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث: $E = \sum_{i=1}^n e_i p_i$

– تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث:

$$V = \sum_{i=1}^n (e_i - E)^2 p_i \quad \text{وأيضا} \quad V = \sum_{i=1}^n e_i^2 p_i - E^2$$

– الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد: $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية، إذا اعتبرنا أن قيم الطبع هي عناصر Ω و التواترات النظرية هي قيم P_i .

تمرين 01: نرمي زهرة نرد مغشوشة بحيث: احتمال الحصول على

الرقمين 4 و 5 متساو وهو ضعف احتمال الحصول على احد الرقمين 2 و 3 وهو $2/3$ احتمال الحصول على احد الرقمين 1 و 6.

ما احتمال الحصول على رقم زوجي؟

تمرين 02: يحتوي وعاء على 4 كرات صفراء و 8 خضراء لا نميز

بينها باللمس

نسحب بطريقة عشوائية كرتان (02) على التوالي دون إرجاع.

– استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيات السابقة ثم احسب:

– احتمال الحصول على: A "كرة صفراء ثم كرة خضراء" B

كرة خضراء ثم كرة صفراء C "اللونين معا".

* ليكن X المتغير العشوائي المعروف كما يلي:

إذا حصلنا على كرية صفراء نربح 4 دج وإذا حصلنا على كرية خضراء نخسر 2 دج .

(1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

(2) اوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ؟

(3) احسب الأمل الرياضي E و الانحراف المعياري .

تمرين 03: عين الاقتراح الصحيح الوحيد من الاقتراحات الآتية

في كل حالة مما يلي :

1 / A و B حدثين من Ω إذا كان :

$$P(A) = 0.4 \quad \text{و} \quad P(B) = 0.5 \quad \text{و} \quad P(\overline{A \cap B}) = 0.55 \quad \text{فإن:}$$

$$\text{أ- } P(\overline{A \cap B}) = 0.2, \quad \text{ب- } P(\overline{A \cap B}) = 0.45, \quad \text{ج- } P(\overline{A \cap B}) = 0.9$$

2 / الجدول الموالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية :

x_i	-2	-1	α	3
$P(X = x_i)$	0.12	0.5	β	0.30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

يساوي 0.32 هما :

$$\text{أ- } \alpha = 1 \quad \text{و} \quad \beta = 0.08 \quad \text{ب- } \alpha = 2 \quad \text{و} \quad \beta = 0.3 \quad \text{ج- } \alpha = 2 \quad \text{و} \quad \beta = 0.08$$

04_ الاحتمال الشرطي:

تعريف: A و B حادثتان من مجموع المخارج Ω حيث $p(A) \neq 0$.

نعرف على Ω احتمالاً جديداً يرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$

$$\text{حيث: } p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

p_A يسمى **الاحتمال الشرطي** لـ B علماً أن A محققة.

ونقرأ: **احتمال B علماً أن A محققة** أو احتمال علماً أن B علماً أن A.

تمرين 04: في قسم سنة ثالثة علوم تجريبية أجريت دراسة

على 38 تلميذ منهم: 25 تلميذ يمارسون لعبة الشطرنج .

من بين 27 ذكر 19 يمارسون لعبة الشطرنج.

1_ أنقل ثم أكمل الجدول الإحصائي الموالي :

المجموع	إناث	ذكور
...	...	19
...	...	...
38	...	...

2_ نختار عشوائياً تلميذاً واحداً من القسم بإعطاء النتيجة على شكل

كسر غير قابل للاختزال

أ_ احسب احتمال الأحداث التالية :

الحدث F: "التلميذ أنثى"

الحدث A: "التلميذ يمارس لعبة الشطرنج"

الحدث $F \cap A$: "التلميذ بنت تدرس تمارس لعبة الشطرنج"

ب_ إذا كان التلميذ أنثى ما احتمال أن تكون تمارس الشطرنج؟

$$\text{ج_ عرف الاحتمال } P_A(F) \text{ ثم احسبه.}$$

د_ إذا كان التلميذ لا يمارس اللعبة، ما احتمال أن يكون ذكراً؟

05_ شجرة الإمكانيات:

المخطط = الجدول السابق = المقابل يسمى **شجرة الإمكانيات** وإذا

أثقلنا أو أرفقنا فروعها بالاحتمالات

المواتية تسمى **شجرة**

الاحتمالات.

1_ أنقل الشجرة وأكملها. ثم

استنتج خصائصها.

2_ عرف الحدث $F \cap A$ ثم احسب

احتماله بالاعتماد على المخطط.

3_ ما عدد المسالك التي تؤدي إلى الحدث A ؟ احسب $P(A)$.

تمرين 05: U_1, U_2, U_3 ثلاث صناديق يحتوي كل منها على 12

كرية بين صفراء و خضراء حيث:

U_1 به 2 صفراء و U_2 به 3 صفراء و U_3 به 4 صفراء.

نختار عشوائياً احد الصناديق و نسحب منه عشوائياً كرية واحدة :

1. استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة التجربة السابقة.

2. ما احتمال الحصول على: A "الكريّة المسحوبة صفراء" ؟

3. ما احتمال أن تكون الكرية صفراء علماً أنها من الصندوق U_1 ؟

4. إذا كانت الكرية صفراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

الأحداث المستقلة:

A و B أنهما مستقلتان معناه حدوث أحدهما لا يؤثر في حدوث الثانية .
مثال : A "نجاح عبد الله" و B "نجاح أنيس" في شهادة البكالوريا . لاحظ أن نجاح عبد الله لا يؤثر في نجاح أنيس والعكس .
 نقول أن A و B مستقلتان

مثال : A "فوز فريق عبد الله" و B "فوز فريق أنيس" في مقابلة نهائية أجريت بين الفريقين . لاحظ أن فوز فريق عبد الله يؤثر على فوز فريق أنيس والعكس . أي A و B غير مستقلتين .

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

تمرين 06 صندوق يحتوي على 12 كرية 3 حمراء و 7 خضراء لا نفرق بينها باللمس .

الجزء الأول : نسحب عشوائيا كرتين على التوالي و دون إرجاع .
 نعتبر الأحداث التالية :

R_1 : "الكرية الأولى حمراء" والحدث R_2 : "الكرية الثانية حمراء" .

V_1 : "الكرية الأولى خضراء" والحدث V_2 : "الكرية الثانية خضراء" .

1- عرف ثم احسب : $P(R_1 \cap V_2)$

2- هل $P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \times P(V_2)$ ماذا تستنتج؟

الجزء الثاني : نسحب الآن عشوائيا كرتين على التوالي مع إرجاع الكرية قبل السحب الثاني :

اجب على السؤالين الواردين في الجزء الأول .

ملاحظة : يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات .

ملاحظة : ليكن P احتمال A و B حدثين احتمال كل منهما غير معدوم . المساويات الثلاثة الآتية متكافئة:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \dots (1) \quad \text{و} \quad P_A(B) = P(B) \dots (2)$$

$$\text{و} \quad P_B(A) = P(A) \dots (3)$$

تمرين 07 برهن صحة المساويات الثلاثة السابقة.

تمرين 08 نرمي قطعة نقدية متوازنة أي احتمال ظهور الوجه

يساوي احتمال ظهور الشعار ، n مرة متتالية :

تعتبر الحدثين M و N حيث:

M : "الحصول أوجه و شعارات" N : "الحصول على وجه على الأكثر" .

1/ إذا كان $n = 2$ هل الحدثين مستقلان؟

2/ إذا كان $n = 3$ هل الحدثين مستقلان؟

تمرين 09 A و B حدثين حيث:

الجزء الأول: $P(A) = 0.4$ و $P_A(B) = 0.7$ و $P_B(A) = 0.2$.

1/ أنشئ شجرة الإمكانيات المثقلة بالاحتمالات.

2/ احسب: $P(A \cap B)$ و $P(B)$.

الجزء الثاني: $P(A) = 0.4$ و $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.2$.

2/ احسب: $P_A(B)$ و $P_B(\bar{B})$.