

# العقري في الرياضيات

## السؤال العمدة

### الثالثة ثانوي

الشعب: علوم تجريبية؛

تقني رياضي؛

رياضيات.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

**مجلة العبقري في الرياضيات (الدوال العددية)**  
**الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.**

**ملخص: حول الدوال العددية // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج؛ تر.**

**1 المستقيمات المقاربة:**

| المستقيم المقارب<br>$\mathbb{P}$ | النهاية                                             | التفسير الهندسي                                                                      |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| ① العمودي                        | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$              | المستقيم ذو المعادلة $x = a$ (الموازي لمحور الترتيب) مقارب لـ $(C_f)$ .              |
| ② الأفقي                         | $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$              | المستقيم ذو المعادلة $y = b$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ $(C_f)$ عند $\infty$ . |
| ③ المائل                         | $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ | المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $\infty$ .               |

ملاحظة: إذا كان:  

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \end{cases}$$

فإن: المستقيم ذو المعادلة  $y = ax + b$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $\infty$ .

**2 الدالة الزوجية، والدالة الفردية:**

| الدالة $f$ $\mathbb{P}$ | معناه                                                                                                                                 | ويكون                                    |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| ① الزوجية               | (1) $D_f$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر<br>(أي: من أجل كل $x$ من $D_f$ ، فإن $-x$ من $D_f$ )<br>(2) $f(-x) = f(x)$                        | منحناها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب. |
| ② الفردية               | (1) $D_f$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر<br>(أي: من أجل كل $x$ من $D_f$ ، فإن $-x$ من $D_f$ )<br>(2) $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$ | منحناها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.  |

**3 مركز التناظر، ومحور التناظر:**

|                |                                                                                                                                                    |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ① محور التناظر | المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى $(C_f)$ ، معناه:<br>$f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$                |
| ② مركز التناظر | النقطة $\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ ، معناه:<br>$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$ |

## 4 تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الترتيب، ومع حامل محور الفواصل:

| ونكتب                                             | الطريقة                              | م                                                       |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $(C_f) \cap (yy') = \{A(0; \dots)\}$              | ■ نحسب $f(0)$ .                      | ① تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الترتيب $(C_f) \cap (yy')$ |
| $(C_f) \cap (xx') = \{A(\dots; 0); B(\dots; 0)\}$ | ■ نحل المعادلة $f(x) = 0$ في $D_f$ . | ② تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل $(C_f) \cap (xx')$ |

## 5 المماس:

هناك ست (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس  $x_0$  هي المفتاح للإجابة على أي منها كما سنرى:

| الصيغة م                | الطرح                                                                                              | كيفية الإجابة                                                                                                                                                    |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| الصيغة الأولى (العادية) | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ .                                  | نكتب الدستور: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض $x_0$ بقيمتها المُعطاة.                                                                                   |
| الصيغة الثانية          | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الترتيب $y_0$ .                                  | نحلّ المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، وعند تعيين قيمة $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).                                                                  |
| الصيغة الثالثة          | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ ميله (أو معامل توجيهه) يساوي $\alpha$ .              | نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).<br><u>ملاحظة:</u> عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات. |
| الصيغة الرابعة          | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ يُوازي المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$ . | نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، عُدنا إلى الحالة الثانية.<br><u>ملاحظة:</u> مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.                                         |
| الصيغة الخامسة          | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$ . | نحلّ المعادلة $\alpha \times f'(x_0) = -1$ .<br><u>ملاحظة:</u> مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيهيهما يساوي $(-1)$ .                                           |
| الصيغة السادسة          | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة ذات الإحداثي $(x_M; y_M)$ .              | نحلّ المعادلة $y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)$ وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).                                      |

## 6 وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $ax + b$ : $(\Delta)$ :

| الطريقة م                          | إشارة الفرق                                                                   | الوضعية النسبية                                                                                 |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$ | ■ $f(x) - (ax + b) > 0$<br>■ $f(x) - (ax + b) < 0$<br>■ $f(x) - (ax + b) = 0$ | ■ $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ .<br>■ $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ .<br>■ $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ . |

## 7 النهايات:

(أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

| توجد            | الجمع                             | الجداء                      | حاصل القسمة                              |
|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|
| أربع (04) أشكال | $(+\infty) + (-\infty)$<br>والعكس | $0 \times \infty$<br>والعكس | $\frac{\infty}{\infty}$<br>$\frac{0}{0}$ |

(ب) نهاية # دالة كثير حدود عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ :

○ النهاية عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

|                                                                            |                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $g(x) = x^2 - 2x^3 + 1$                                                    | $f(x) = x^3 + x - 2$                                                     |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3)$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$ |

(ج) نهاية # دالة ناطقة عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ :

○ النهاية عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

○ لحساب نهايات # دالة ناطقة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ نتذكر أن:  $\frac{l}{0} = \infty$  ويُحدّد بدراسة إشارة المقام على اليمين واليسار وحسب مجموعة التعريف.

| المقام من الشكل / حيث                    | $n$ فردي                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $n$ زوجي                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^n$<br>( $n \in \mathbb{N}^*$ )        | إشارة $x^n$ من إشارة $x$<br>النهاية عند 0<br>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left( \frac{l}{0^+} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left( \frac{l}{0^-} \right)$                                                                                                   | إشارة $x^n$ موجب ( $x^n \geq 0$ )<br>النهاية عند 0<br>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left( \frac{l}{0^+} \right)$                                            |
| $(ax + b)^n$<br>( $n \in \mathbb{N}^*$ ) | إشارة $(ax + b)^n$ من إشارة $(ax + b)$<br>النهاية عند $-\frac{b}{a}$<br>$\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left( \frac{l}{0^+} \right)$ عكس إشارة $0^+ a$<br>و $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left( \frac{l}{0^-} \right)$ عكس إشارة $0^- a$ | إشارة $(ax + b)^n$ موجب ( $(ax + b)^n \geq 0$ )<br>النهاية عند $-\frac{b}{a}$<br>$\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left( \frac{l}{0^+} \right)$ |
| $ax^2 + bx + c$                          | ندرس إشارة $ax^2 + bx + c$ باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                      |

(د) إشارة  $ax + b$  ( $a \neq 0$ ):

|          |               |                |               |
|----------|---------------|----------------|---------------|
| $x$      | $-\infty$     | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$     |
| $ax + b$ | مثل إشارة $a$ | عكس إشارة $a$  | مثل إشارة $a$ |

(ج) إشارة  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ):

| المميز               | حلول المعادلة                                                                                                       | إشارة $P(x)$ |                                                                                                                                                                                                               | تحليل $P(x)$                 |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\Delta = b^2 - 4ac$ | $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$                                                                                          |              |                                                                                                                                                                                                               |                              |
| $\Delta < 0$         | $S = \emptyset$                                                                                                     | $x$          | $-\infty$ $+\infty$                                                                                                                                                                                           | لا يُمكن تحليل $P(x)$        |
|                      |                                                                                                                     | $P(x)$       | مثل إشارة $a$                                                                                                                                                                                                 |                              |
| $\Delta = 0$         | $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$                                                                                  | $x$          | $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$                                                                                                                                                                           | $P(x) = a(x - x_0)^2$        |
|                      |                                                                                                                     | $P(x)$       | مثل إشارة $a$  مثل إشارة $a$                                                                                                 | $(x_0 = -\frac{b}{2a})$      |
| $\Delta > 0$         | $S = \{x_1; x_2\}$<br><u>حيث:</u><br>$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x$          | $-\infty$ $x_1$ $x_2$ $+\infty$                                                                                                                                                                               | $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |
|                      |                                                                                                                     | $P(x)$       | مثل إشارة $a$  عكس إشارة $a$  مثل إشارة $a$ |                              |
|                      |                                                                                                                     |              | $a$ $a$ $a$                                                                                                                                                                                                   | (نفرض أن $x_1 < x_2$ )       |

## 8 الاشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

| مجالات قابلية الاشتقاق          | $f'(x) =$             | $f(x) =$                                               |
|---------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                    | 0                     | $(k \in \mathbb{R}) k$                                 |
| $\mathbb{R}$                    | 1                     | $x$                                                    |
| $\mathbb{R}$                    | $nx^{n-1}$            | $(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) x^n$           |
| $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ | $-\frac{1}{x^2}$      | $\frac{1}{x}$                                          |
| $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$  | $(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x^n}$ |
| $]0; +\infty[$                  | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$                                             |
| $\mathbb{R}$                    | $-\sin x$             | $\cos x$                                               |
| $\mathbb{R}$                    | $\cos x$              | $\sin x$                                               |

ب. المشتقات والعمليات على الدوال:  $u$  و  $v$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $k$  عدد حقيقي.

| $\frac{u}{v}$ (الدالة $v$ لا تنعدم على $I$ ) | $\frac{1}{v}$   | $uv$        | $ku$  | $u + v$   | الدالة  |
|----------------------------------------------|-----------------|-------------|-------|-----------|---------|
| $\frac{u'v - v'u}{v^2}$                      | $-\frac{v'}{v}$ | $u'v + v'u$ | $ku'$ | $u' + v'$ | المشتقة |

## ناتج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ ، فإنّها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة  $v \circ u$ :  $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدالة  $x \mapsto u(ax + b)$  ( $a \neq 0$ )

$$f(x) = u(ax + b) \quad f'(x) = au'(ax + b)$$

مشتقة الدالة  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

مشتقة الدالة  $x \mapsto [u(x)]^n$  ( $n \geq 2$  عدد طبيعي يحقق)

$$f(x) = [u(x)]^n \quad f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

مشتقة الدالة  $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$  ( $n \geq 1$  عدد طبيعي يحقق)

$$f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n} \quad f'(x) = \frac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$$

## 9 الإستمرارية:

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ ، إذا كانت  $f$  مستمرة على  $I$  فإن تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: أنه يمكن رسم منحناها البياني على  $I$  دون رفع القلم (اليد).

نتائج:

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود؛ " $\cos$ " و " $\sin$ " هي دوال مستمرة على  $\mathbb{R}$ .
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دوال مستمرة هي دوال مستمرة.

مبرهنة القيم المتوسطة:

| مبرهنة القيم المتوسطة (ثقب دون برهان)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | التفسير البياني (أو الهندسي)<br>"لمبرهنة القيم المتوسطة"                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>الحالة العامة (<math>k \in \mathbb{R}</math>)</li> </ul> <p>إذا كانت <math>f</math> دالة معرفة ومستمرة على المجال <math>[a; b]</math>، من أجل كل عدد حقيقي <math>k</math> محصور بين <math>f(a)</math> و <math>f(b)</math>، فإن: المعادلة <math>f(x) = k</math> تقبل حلا على الأقل في المجال <math>[a; b]</math>.</p>                              | <p>المنحنى <math>(C_f)</math> يقطع المستقيم ذو المعادلة <math>y = k</math> على الأقل في نقطة واحدة في المجال <math>[a; b]</math>.</p>                   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>الحالة الخاصة (<math>k = 0</math>)</li> </ul> <p>إذا كانت <math>f</math> دالة معرفة ومستمرة على المجال <math>[a; b]</math>، وكان <math>0</math> محصور بين <math>f(a)</math> و <math>f(b)</math>، أي: <math>f(a) \times f(b) &lt; 0</math>، فإن: المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلا على الأقل في المجال <math>[a; b]</math>.</p>              | <p>المنحنى <math>(C_f)</math> يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة واحدة في المجال <math>[a; b]</math>.</p>                                         |
| وحدانية الحل                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>الحالة العامة (<math>k \in \mathbb{R}</math>)</li> </ul> <p>إذا كانت <math>f</math> دالة معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على المجال <math>[a; b]</math>، من أجل كل عدد حقيقي <math>k</math> محصور بين <math>f(a)</math> و <math>f(b)</math>، فإن: المعادلة <math>f(x) = k</math> تقبل حلا وحيدا <math>\alpha</math> في المجال <math>[a; b]</math>.</p> | <p>المنحنى <math>(C_f)</math> يقطع المستقيم ذو المعادلة <math>y = k</math> في نقطة واحدة فاصلتها <math>\alpha</math> في المجال <math>[a; b]</math>.</p> |

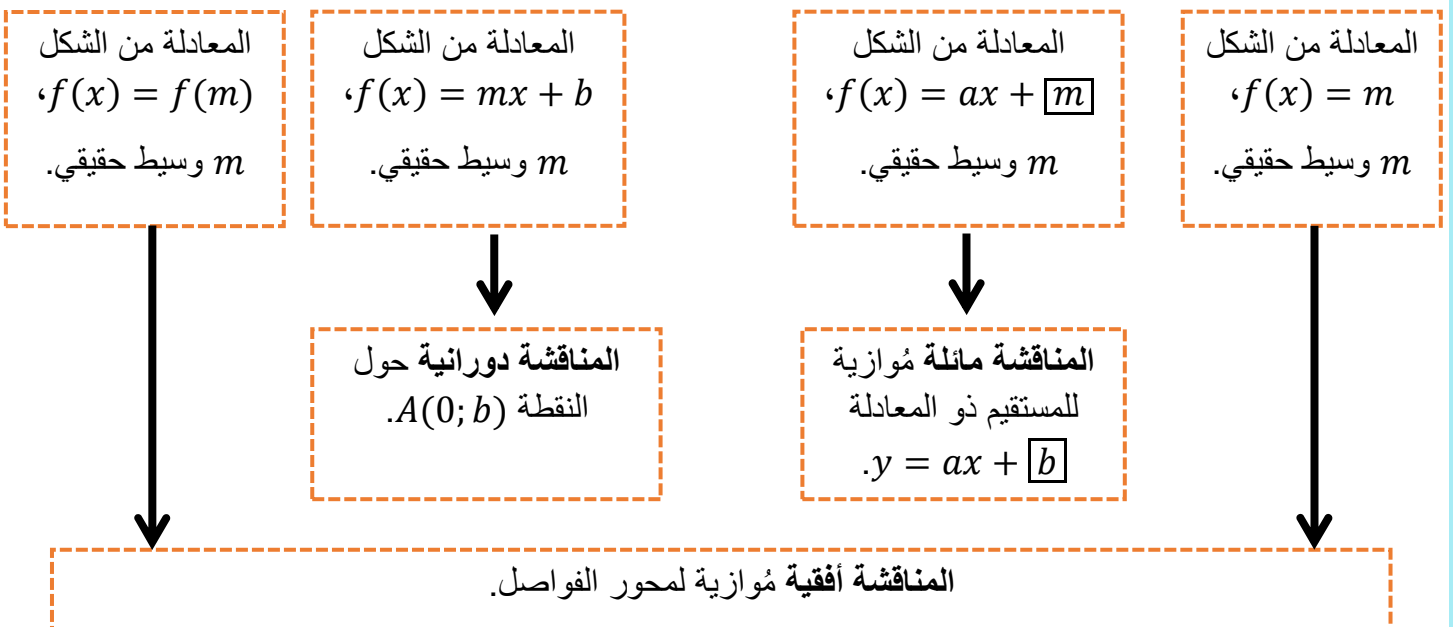
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>الحالة الخاصة (<math>k = 0</math>)</p> <p>إذا كانت <math>f</math> دالة معرفة ومستمرة ورتبية تماماً على المجال <math>[a; b]</math>، وكان 0 محصور بين <math>f(a)</math> و <math>f(b)</math>، أي: <math>f(a) \times f(b) &lt; 0</math>، فإن: المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلاً وحيداً <math>\alpha</math> في المجال <math>[a; b]</math>.</p> | <p>المنحنى (<math>C_f</math>) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها <math>\alpha</math> في المجال <math>[a; b]</math>.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

طُرُق إثبات "وُجُود" حلول معادلة في مجال  $[a; b]$  باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

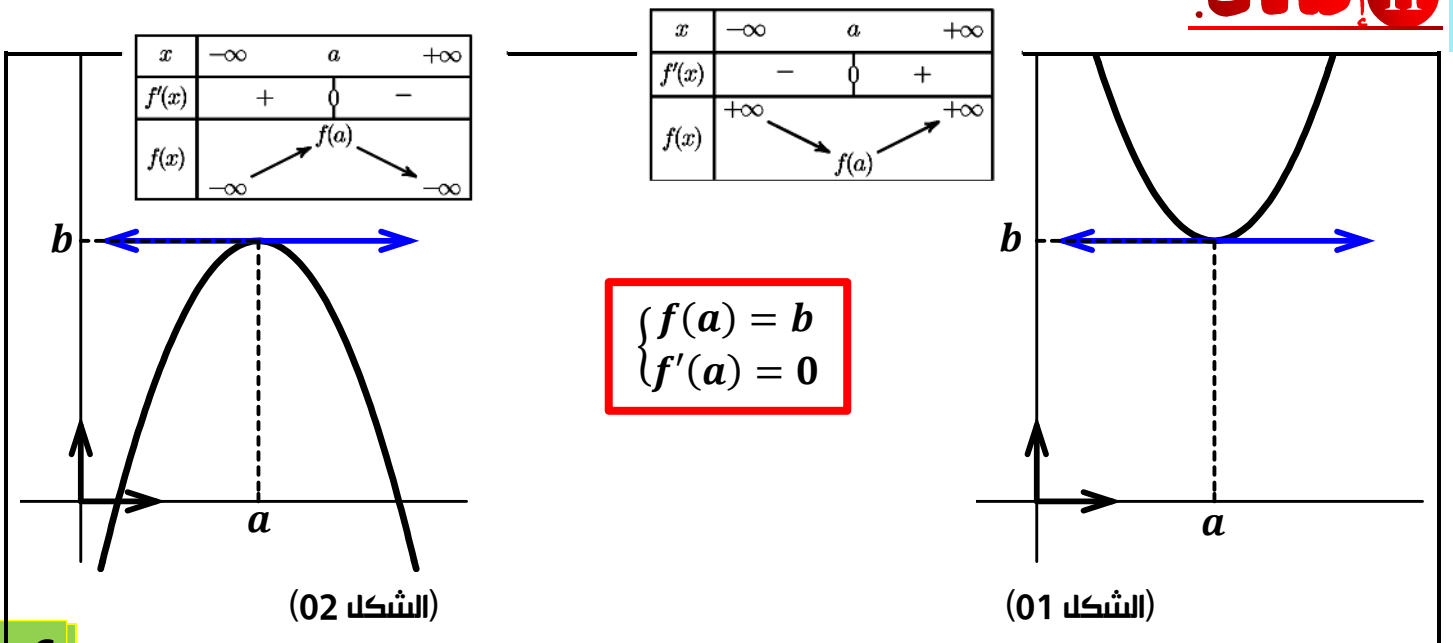
| الحالة الخاصة ( $k = 0$ )                                                                                                                                                                                                                 | الحالة العامة ( $k \in \mathbb{R}$ )                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1/ نكتب المعادلة من الشكل <math>f(x) = 0</math> (إن لم تُعطى لنا)</p> <p>2/ نتحقق من استمرارية الدالة <math>f</math> على المجال <math>[a; b]</math>.</p> <p>3/ نتحقق من أن <math>f(a) \times f(b) &lt; 0</math>، وذلك بعد حسابهما.</p> | <p>1/ نكتب المعادلة من الشكل <math>f(x) = k</math> (إن لم تُعطى لنا)</p> <p>2/ نتحقق من استمرارية الدالة <math>f</math> على المجال <math>[a; b]</math>.</p> <p>3/ نتحقق من أن <math>k</math> محصور بين <math>f(a)</math> و <math>f(b)</math>، وذلك بعد حسابهما.</p> |

**ملاحظة:** تقبل المبرهنات السابقة عدة تمديدات في حالة الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماماً على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

## 10 المناقشة البيانية:



## 11 إضافات:



## 12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء  $(C_f)$ ، قد يُطلب منا أن نستنتج منحياً آخر  $(C_h)$  -مثلاً- لدالة  $h$ ؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

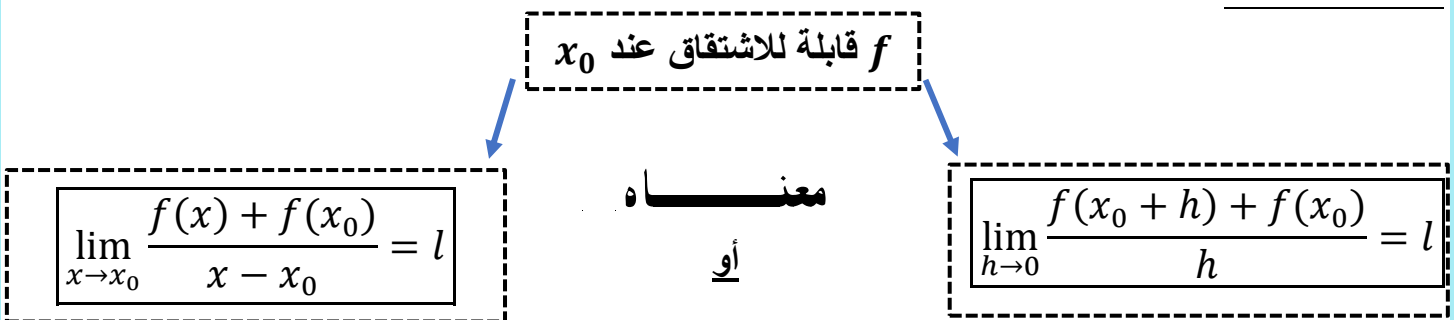
| الصيغة         | الطـُـرـد                                                                                                          | كيفية الإجابة                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| الصيغة الأولى  | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) =  f(x) $                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>على المجالات التي تكون فيها <math>f(x) \geq 0</math> (أي يكون فيها <math>(C_f)</math> على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على <math>h(x) = f(x)</math>؛ ومنه <math>(C_h)</math> ينطبق على <math>(C_f)</math>.</li> <li>على المجالات التي تكون فيها <math>f(x) \leq 0</math> (أي يكون فيها <math>(C_f)</math> على محور الفواصل أو تحته) نحصل على <math>h(x) = -f(x)</math>؛ ومنه يكون <math>(C_h)</math> نظير <math>(C_f)</math> بالنسبة إلى محور الفواصل.</li> </ul> |
| الصيغة الثانية | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) = f( x )$<br>ملاحظة: عادةً ما يُطلب منا أولاً أن نُثبت أن $h$ زوجية.  | <ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كان <math>x \geq 0</math> و <math>x \in D_f</math> أي <math>x \in D_f \cap [0; +\infty[</math> (<math>x</math> ينتمي إلى الجزء الموجب من <math>D_f</math>) نحصل على <math>h(x) = f(x)</math>؛ ومنه <math>(C_h)</math> ينطبق على <math>(C_f)</math>.</li> <li>تُكمل الجزء المتبقي من <math>(C_h)</math> بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن <math>h</math> زوجية.</li> </ul>                                                                               |
| الصيغة الثالثة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) = f(- x )$<br>ملاحظة: عادةً ما يُطلب منا أولاً أن نُثبت أن $h$ زوجية. | <ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كان <math>x \leq 0</math> و <math>x \in D_f</math> أي <math>x \in D_f \cap ]-\infty; 0]</math> (<math>x</math> ينتمي إلى الجزء السالب من <math>D_f</math>) نحصل على <math>h(x) = f(x)</math>؛ ومنه <math>(C_h)</math> ينطبق على <math>(C_f)</math>.</li> <li>تُكمل الجزء المتبقي من <math>(C_h)</math> بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن <math>h</math> زوجية.</li> </ul>                                                                               |
| الصيغة الرابعة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) = -f(x)$                                                              | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(C_h)</math> هو نظير <math>(C_f)</math> بالنسبة إلى محور الفواصل.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| الصيغة الخامسة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) = f(-x)$                                                              | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(C_h)</math> هو نظير <math>(C_f)</math> بالنسبة إلى محور الترتيب.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| الصيغة السادسة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$<br>حيث: $h(x) = -f(-x)$                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(C_h)</math> هو نظير <math>(C_f)</math> بالنسبة إلى مبدأ المعلم.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| الصيغة السابعة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$ التي تحقق:<br>$h(x) = f(x + b) + k$                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>نستنتج <math>(C_h)</math> من <math>(C_f)</math> بالانسحاب ذي الشعاع <math>\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}</math> (أي <math>(C_h)</math> صورة <math>(C_f)</math> بالانسحاب الذي شعاعه <math>\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}</math>)</li> </ul>                                                                                                                                                                                       |
| الصيغة الثامنة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$ التي تحقق:<br>$h(x) = f(x) + k$                                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة <math>b = 0</math>.</li> <li><math>(C_h)</math> صورة <math>(C_f)</math> بالانسحاب الذي شعاعه <math>k\vec{j}</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| الصيغة التاسعة | استنتج $(C_h)$ منحى الدالة $h$ التي تحقق:<br>$h(x) = f(x + b)$                                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة <math>k = 0</math>.</li> <li><math>(C_h)</math> صورة <math>(C_f)</math> بالانسحاب الذي شعاعه <math>-b\vec{i}</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

|                |                                                                                     |                                                                                                                       |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| الصيغة العاشرة | استنتج $(C_h)$ منحنى الدالة $h$ التي تحقق:<br>$h(x) = kf(x)$ ؛ $k \in \mathbb{R}^*$ | ■ نحصل على نقطة من $(C_h)$ ذات الفاصلة $x$ بضرب ترتيب النقطة $M$ في العدد $k$ ؛ حيث $M$ نقطة من $(C_f)$ فاصلتها $x$ . |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### 13 قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

|                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| تكون $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ إذا وفقط إذا كانت                                                                                                                                                            | $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} = l$ |
| حيث $f'(x_0) = l \in \mathbb{R}$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ . وتفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المنحنى $(C_f)$ يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، ومعادلته من الشكل: | $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$                                                                                            |

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)



$l$  يسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$ ، ونرمز له بالرمز  $f'(x_0)$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

نكتب:

### التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $A(x_0; y_0)$ ، حيث  $y_0 = f(x_0)$ . بصيغة أخرى: يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .

### القراءة البيانية للعدد المشتق:

إذا كان المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  مُوازيا لمحور الفواصل فإن معامل توجيهه معدوم أي  $f'(x_0) = 0$  وتكون معادلته من الشكل  $y = f(x_0)$ .

يُمكن إيجاد بيانيا بأخذ نقطتين  $A$  و  $B$  من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد:

$$f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

## 14 نقطة زاوية:

إذا كان:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$ ، حيث  $l_1$  و  $l_2$  عدنان حقيقيان.

فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  من اليسار وعددها المشتق هو  $f'_g(x_0) = l_1$ .

و  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  من اليمين وعددها المشتق هو  $f'_d(x_0) = l_2$ .

في حالة ( $l_1 \neq l_2$ )، نقول أن  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $x_0$ .

ويكون التفسير الهندسي هو أن النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ : نقطة زاوية للمنحنى ( $C_f$ ).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$

ملاحظة 02: المنحنى ( $C_f$ ) يقبل نصفي مماسين عند نقطة الزاوية معادلتهما:

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

تنبيه: تبقى النقطة الزاوية موجودة حتى لو كانت إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً والأخرى  $\infty$ .

## 15 نقطة الانعطاف:

بصفة عامة، لتعيين نقطة الانعطاف؛ نقوم بما يلي:

▪ نحسب المشتق الثاني  $f''(x)$ ، وندرس إشارته، فإذا وجدنا  $f''(x)$  انعدم عند قيمة  $x_0$  من  $D_f$ ، مُغيّراً إشارته،

تكون النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  نقطة انعطاف لـ ( $C_f$ )؛ أي:  $E(x_0; f(x_0))$ .

▪ حالة خاصة:

في بعض الحالات، يُمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني  $f''(x)$ ، وذلك إذا انعدم المشتق

الأول  $f'(x)$  عند قيمة  $x_0$  من  $D_f$ ، ولم يُغيّر إشارته، فتكون النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  نقطة انعطاف لـ ( $C_f$ )؛ أي:

$$E(x_0; f(x_0))$$

▪ ملاحظة:

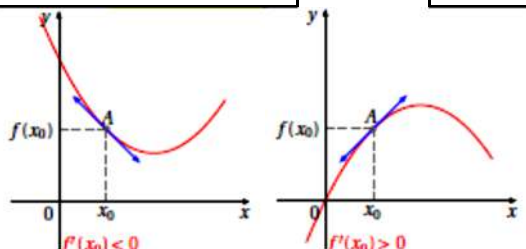
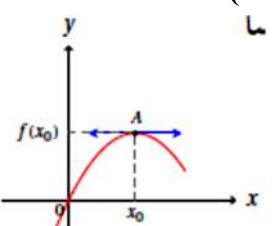
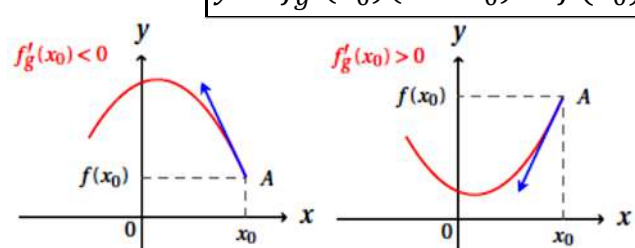
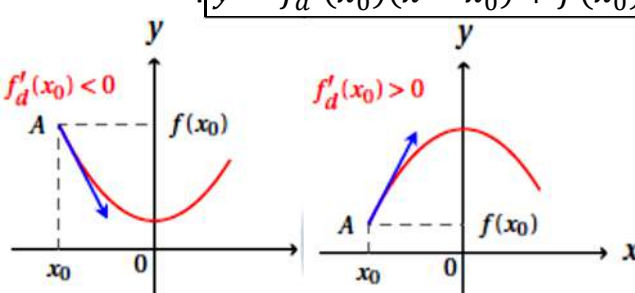
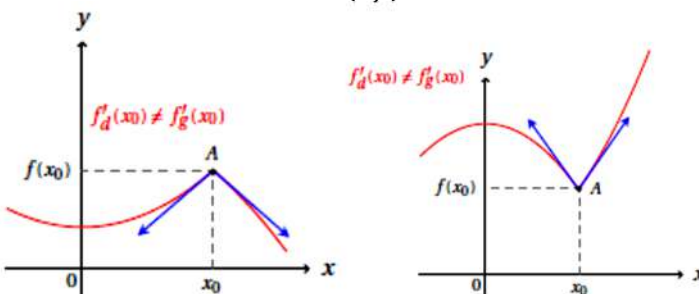
في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعين نقطة الانعطاف بالكيفية التالية:

يُطلب منا أن ندرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ ، فإذا وجدنا أن ( $C_f$ )

غير وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس) نستنتج أن النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  نقطة انعطاف لـ ( $C_f$ )؛

$$E(x_0; f(x_0))$$

## 16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

| النهاية                                                                                                                      | الاستنتاج                                                                          | التفسير البياني (أو الهندسي)                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$<br>أو<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$     | الذالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ ، وعددها المشتق هو $f'(x_0) = l$               | المنحنى $(C_f)$ يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ ، معامل توجيهه (ميله) $f'(x_0) = l$ ، ومعادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .<br>   |
| $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$<br>أو<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$     | الذالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ ، وعددها المشتق هو $f'(x_0) = 0$               | المنحنى $(C_f)$ يقبل مماس (موازي لمحور الفواصل) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ ، معامل توجيهه (ميله) $f'(x_0) = 0$ ، ومعادلته: $y = f(x_0)$ .<br> |
| $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$<br>أو<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ | الذالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ على اليسار، وعددها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ ، معادلته: $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .<br>                                 |
| $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$<br>أو<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$ | الذالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ على اليمين، وعددها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$ | المنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ ، معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .<br>                                |
| $l_1 \neq l_2$                                                                                                               | الذالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0$ .                                          | المنحنى $(C_f)$ يقبل نصفين مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ ، تسمى هذه النقطة: نقطة زاوية للمنحنى $(C_f)$ .<br>                           |

## مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: علوم تجريبية.

### التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يأتي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- (أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيّرات الدالة  $g$  وحدّد  $g(0)$  وإشارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$ .

(ب) علّل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $\left]0; \frac{1}{2}\right[$  يُحقّق:  $g(\alpha) = 0$ .

(ج) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

2-  $f$  هي الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث  $f'$  هي الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

(ب) عيّن دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسّر النتيجة بيانياً.

(ج) احسب:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$  وفسّر النتيجتين بيانياً.

(د) شكل جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

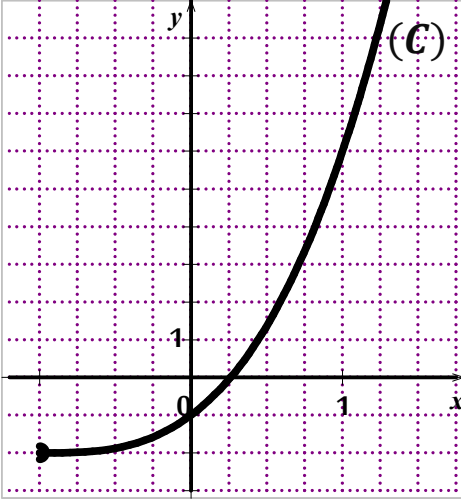
3- نأخذ  $\alpha \simeq 0,26$

(أ) عيّن مُدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$ .

(ب) أرسم المنحنى  $(\Gamma)$ .

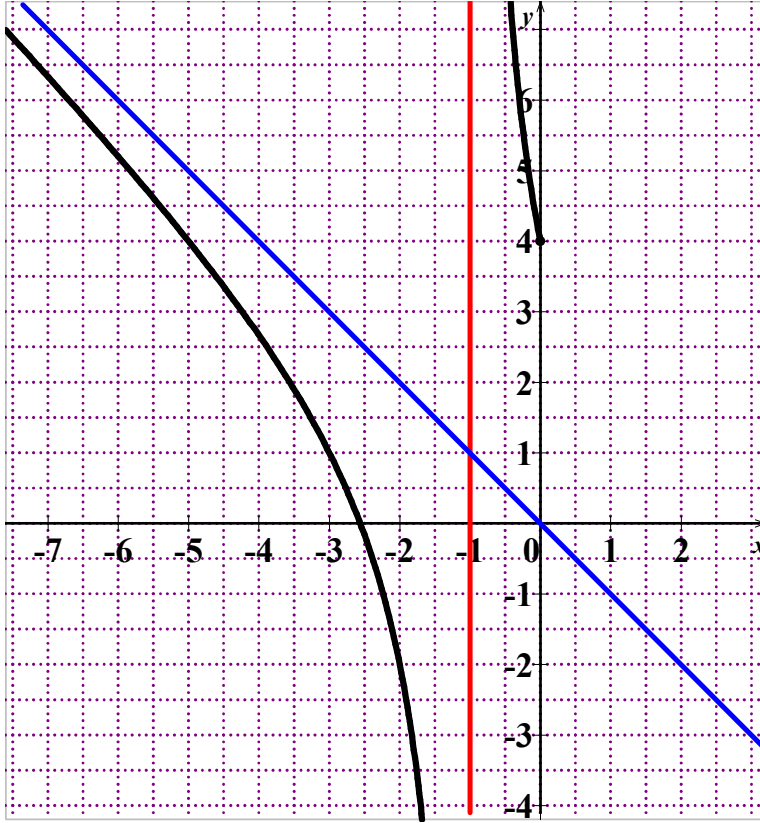
4- (أ) أكتب  $f(x)$  على الشكل:  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

(ب) عيّن  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تُحقّق:  $F(1) = 2$ .



## التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  :  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



( $C_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$ .  
ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات  $f$  شكّل جدول تغيراتها.

(2)  $g$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  
 $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

( $C_g$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$ .  
(ب) تحقّق من أنّ ( $C_g$ ) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً ( $\Delta$ ) عند  $+\infty$  يُطلب تعيين معادلة له.  
(ج) أدرس تغيرات  $g$ .  
(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

(1) أ) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ماذا تستنتج؟  
ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين ( $\Delta_1$ ) و ( $\Delta_2$ ) عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$ .

(3) أرسم ( $\Delta_1$ )، ( $\Delta_2$ ) و ( $C_k$ ).

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى ( $C_k$ ) والمستقيمتين التي معادلاتها:  $x = \frac{1}{2}$ ،  $y = 0$

$$\text{و } x = -\frac{1}{2}$$

## التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I) -لنكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ .

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) -نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{i}; \vec{j}$ ).

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$(2) \text{ أ) بيّن أنّه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

$$(3) \text{ أ) بيّن أنّه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \text{ حيث } f' \text{ مشتقة الدالة } f.$$

ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$ . (نأخذ  $f(\alpha) \simeq -0,1$ )

4) احسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .

5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

$$(6) \text{ لتكن } h \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} : h(x) = f(x) - 2$ .

ب) استنتج أنّ  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئ  $(C_h)$ .

**مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)**  
الحلول // الشعبة: علوم تجريبية.

**حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.**

لدينا: المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يأتي،  
 $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

**1-أ) بقراءة بيانية:**

**تشكيل جدول تغيّرات الدالة  $g$ ؛ وتحديد  $g(0)$  وإشارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$ :**

|        |    |     |          |               |           |
|--------|----|-----|----------|---------------|-----------|
| $x$    | -1 | $0$ | $\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -2 | -   | -        | +             | $+\infty$ |

$g(0) = -1$  و  $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

**ب) تعليل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $0; \frac{1}{2}[$  يُحقق،  $g(\alpha) = 0$ :**

- $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $0; \frac{1}{2}[$  (لأنّها متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$ )
- ولدينا:  $\begin{cases} g(0) = -1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$ ، أي:  $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $0; \frac{1}{2}[$  يُحقق،  $g(\alpha) = 0$ .

**ج) استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1; +\infty[$ :**

نُلخص إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1; +\infty[$  في الجدول التالي:

|        |    |          |           |
|--------|----|----------|-----------|
| $x$    | -1 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -  | ○        | +         |

**2-لدينا:  $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$  و  $D_f = ]-1; +\infty[$ ؛ التمثيل البياني لـ  $f$  في معلم متعامد  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ .**

**أ) التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ :**

**معرفّة وقابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$ ، ولدينا:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2 - 2(1)(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{[(x+1)^2]^2} \\ &= \frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)(x+1)^3} \\ &= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

(ب) تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وتفسير النتيجة بيانياً:

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = \frac{0}{(\alpha+1)^3} = 0$

التفسير البيانى: المنحنى  $(\Gamma)$  يقبل عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$ ؛ مماساً معامل توجيهه معدوم أي: يوازي حامل محور الفواصل.

(ج) حساب،  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$  وتفسير النتيجة بيانياً:

■ بمأن:  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 = 0^+$ ، فإن:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

التفسير البيانى: المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  (الموازي لمحور الترتيب) مقارب لـ  $(\Gamma)$ .

■ لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) - (x + 1)(x + 1)^2}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + 1)^2} = 0$

التفسير البيانى: المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لـ  $(\Gamma)$  عند  $+\infty$ .

(د) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$  ومنه: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ، فإن:  $(x + 1)^3 > 0$

إذن: إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1; +\infty[$ ؛ ويكون:

| $x$     | $-1$      | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $\ominus$   | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

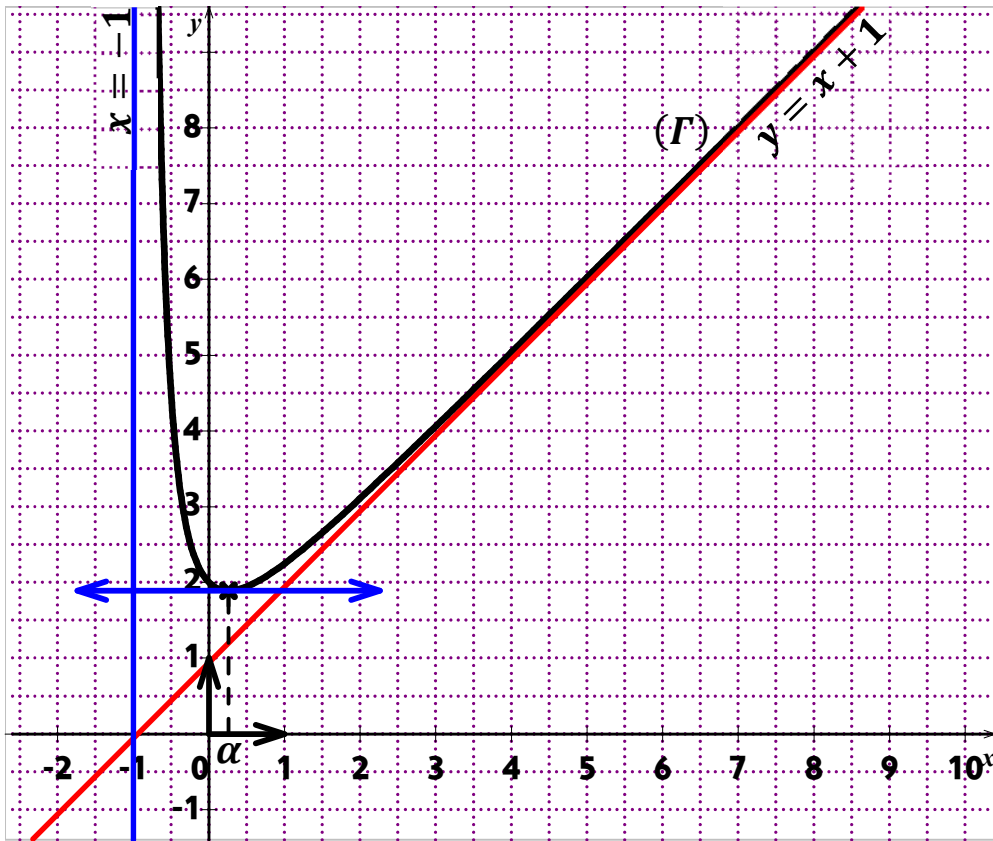
حيث:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3- بأخذ  $\alpha \simeq 0,26$

(أ) تعيين مُدَوْر  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$ :

نلاحظ أن:  $f(x) = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$ ، إذن:  $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} \simeq 1,89$

(ب) رسم المنحنى  $(\Gamma)$ :



أ-4 كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان:

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2} \text{ لدينا:}$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2} \text{ بالمطابقة نجد: } \begin{cases} a+2=3 \\ 2a+1=3 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}} \text{ إذن:}$$

ب) تعيين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تُحقق،  $F(1) = 2$ :

$$\text{لدينا: } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ ومنه: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + c \text{ حيث } c \text{ عدد حقيقي ثابت؛}$$

$$F(1) = 2 \text{ معناه: } \frac{1}{2}(1)^2 + 1 - \frac{1}{1+1} + c = 2 \text{ وبالتالي: } c = 1$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1} \text{ إذن:}$$

## حل التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: علوم تجريبية.

$$f \text{ دالة معرفة على } ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \text{ بـ } f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

أ) حساب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$ :

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

(ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات  $f$ ، تشكيل جدول تغيراتها:

|         |           |           |     |
|---------|-----------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$ |
| $f'(x)$ | -         |           | -   |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $4$ |

$g$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ .

(أ) حساب نهاية  $g$  عند  $+\infty$ :

■ بمأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ ، فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

(ب) التحقق من أن  $(C_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  عند  $+\infty$  يُطلب تعيين معادلة له:

■ بمأن:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ ، أي:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 0$ .

فإن: المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  (المنصف الأول) مقارب مائل للمنحنى  $(C_g)$  عند  $+\infty$ .

(ج) دراسة تغيرات  $g$ :

$g$  معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(x-1)$  على المجال  $[0; +\infty[$ ؛ لأن:  $\frac{(x+3)}{(x+1)^2} > 0$  على  $[0; +\infty[$ .

|         |     |         |           |
|---------|-----|---------|-----------|
| $x$     | $0$ | $1$     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -   | $\circ$ | +         |

إذن:  $g$  متناقصة تماما على المجال  $[0; 1]$ ، ومتزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

|         |     |         |           |
|---------|-----|---------|-----------|
| $x$     | $0$ | $1$     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -   | $\circ$ | +         |
| $g(x)$  | $4$ | $3$     | $+\infty$ |

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$ .

(1) حساب:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h-4)(h+1)+4}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h - 4h - 4 + 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

ومنه: الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق عند  $0$  من اليمين وعددها المشتق من اليمين عند  $0$  هو  $k'_d(0) = -3$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-(h+4)(h+1)+4}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - h - 4h - 4 + 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

ومنه: الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق عند  $0$  من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند  $0$  هو  $k'_g(0) = -5$ .

### الاستنتاج:

بمّا:  $k'_g(0) \neq k'_d(0)$ ، فإنّ الدّالة  $k$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

### ب) التفسير الهندسي:

النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية؛ والمنحنى  $(C_k)$  يقبل نصفي مماسين.

(2) كتابة معادلتى المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$ :

■ معادلة  $(\Delta_1)$  من الشكل  $y = k'_g(0)(x - 0) + k(0)$  ومنه:  $(\Delta_1): y = -5x + 4$ .

■ معادلة  $(\Delta_2)$  من الشكل  $y = k'_d(0)(x - 0) + k(0)$  ومنه:  $(\Delta_2): y = -3x + 4$ .

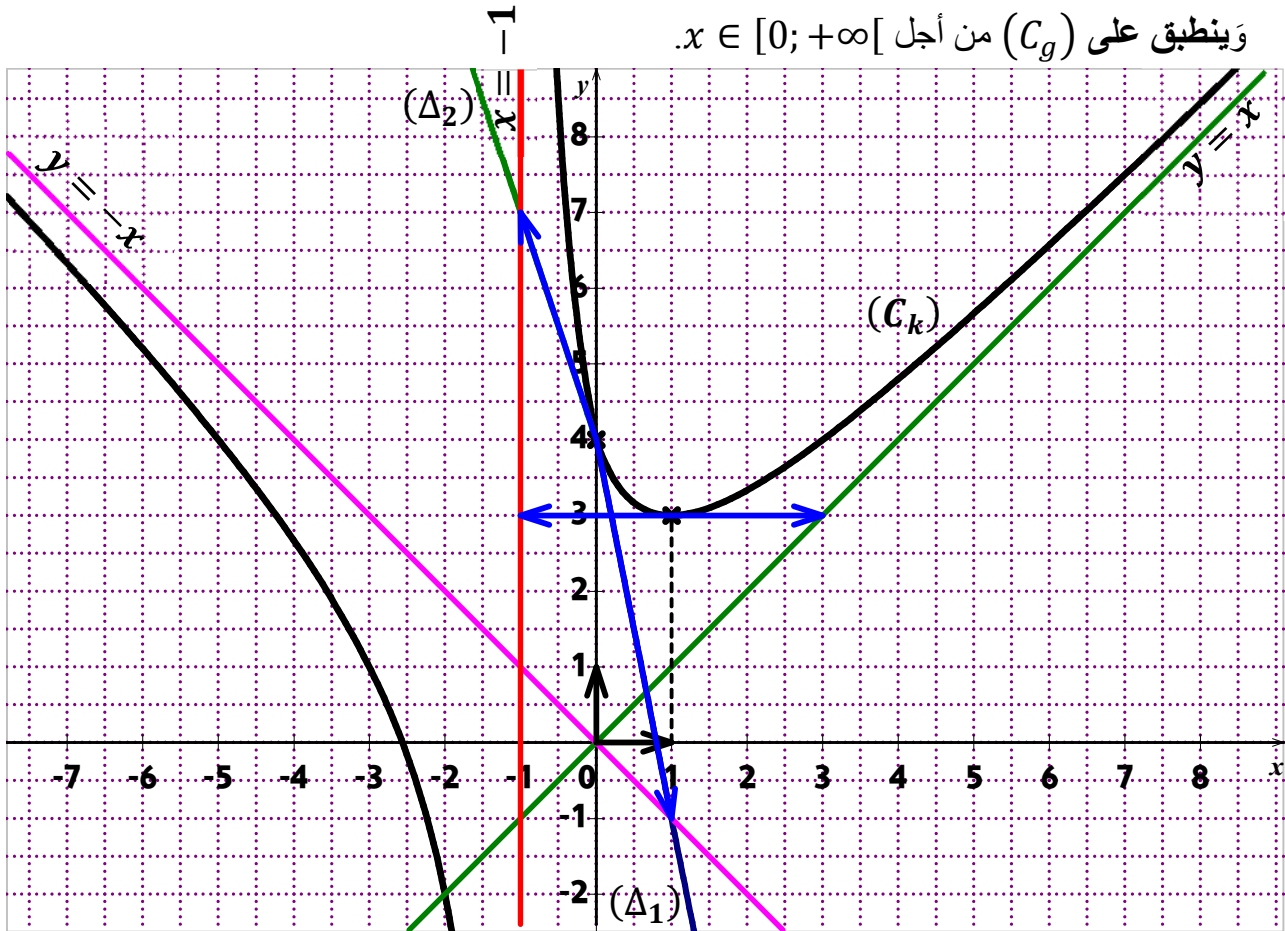
(3) رسم  $(\Delta_1)$ ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$ :

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1}; & x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1}; & x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$k(x) = \begin{cases} g(x); & x \in [0; +\infty[ \\ f(x); & x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \end{cases} \quad \text{أي:}$$

إذن:  $(C_k)$  ينطبق على  $(C_f)$  من أجل  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$ ؛

و ينطبق على  $(C_g)$  من أجل  $x \in [0; +\infty[$ .



(4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  والمستقيمتين التي معادلاتها  $x = \frac{1}{2}$ ،  $y = 0$

$$\text{و } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا: } A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

$$.A = \left[ -\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{4} + 4 \ln 3 \right) ua \text{ ومنه:}$$

### حل التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: علوم تجريبية.

(I) -لدينا:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$  و  $D_g = ]-\infty; +\infty[$

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا:  $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

ولدينا:  $6x^2 - 8x + 7 > 0$  (لأن مميزه سالب تماما  $\Delta = (-8)^2 - 4(6)(7) = -104 < 0$ )

وبالتالي: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) > 0$ .

إذن: الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +        |           |
| $g(x)$  | $-\infty$ |          | $+\infty$ |

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ :

لدينا:  $g$  مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $[0,7; 0,8]$  (لأنها متزايدة تماما على المجال  $\mathbb{R}$ )

ولدينا:  $\begin{cases} g(0,7) = -0,374 \\ g(0,8) = +0,064 \end{cases}$  أي:  $g(0,7) \times g(0,8) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[0,7; 0,8]$ .

(ب) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ :

من جدول التغيرات وحسب السؤال (2) أ) نجد:

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         |          | +         |

(II) -لدينا:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ ،  $D_f = ]-\infty, +\infty[$

و  $(C_f)$  التمثيل البياني لـ  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

▪  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} x \right) = -\infty$

▪  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} x \right) = +\infty$

(2) أ) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

لدينا:  $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x+1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} &= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} = f(x) \end{aligned}$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

إذن:

(ب) استنتاج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4x} = 0$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$

إذن: المستقيم  $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  مُقارب

مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

(ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ : (ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ )

لدينا:  $f(x) - y = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ولدينا:  $2x^2 - 2x + 1 > 0$  (لأن مميزه سالب تماما  $\Delta = (-2)^2 - 4(2)(1) = -4 < 0$ )

وبالتالي: إشارة الفرق  $f(x) - y$  من إشارة البسط  $(1-3x)$

| $x$          | $-\infty$                  | $\frac{1}{3}$           | $+\infty$                  |
|--------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $1-3x$       | +                          | ○                       | -                          |
| $f(x) - y$   | +                          | ○                       | -                          |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

(3) أ) تبيان أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ :

لدينا:  $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1) - (4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \end{aligned}$$

إذن:  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

(ب) استنتاج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :  $f(\alpha) \simeq -0,1$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط  $xg(x)$  وهي ملخصة في الجدول التالي:

|         |           |            |            |           |
|---------|-----------|------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$        | $\alpha$   | $+\infty$ |
| $x$     | -         | $\bigcirc$ | +          |           |
| $g(x)$  |           | -          | $\bigcirc$ | +         |
| $f'(x)$ | +         | $\bigcirc$ | -          | +         |

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

|         |           |            |             |           |
|---------|-----------|------------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$        | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | $\bigcirc$ | -           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1$        | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

(4) حساب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ :

لدينا:  $f(1) = \frac{(1)^3 - 2(1) + 1}{2(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{0}{1} = 0$  ■

■  $f(x) = 0$  معناه:  $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1} = 0$

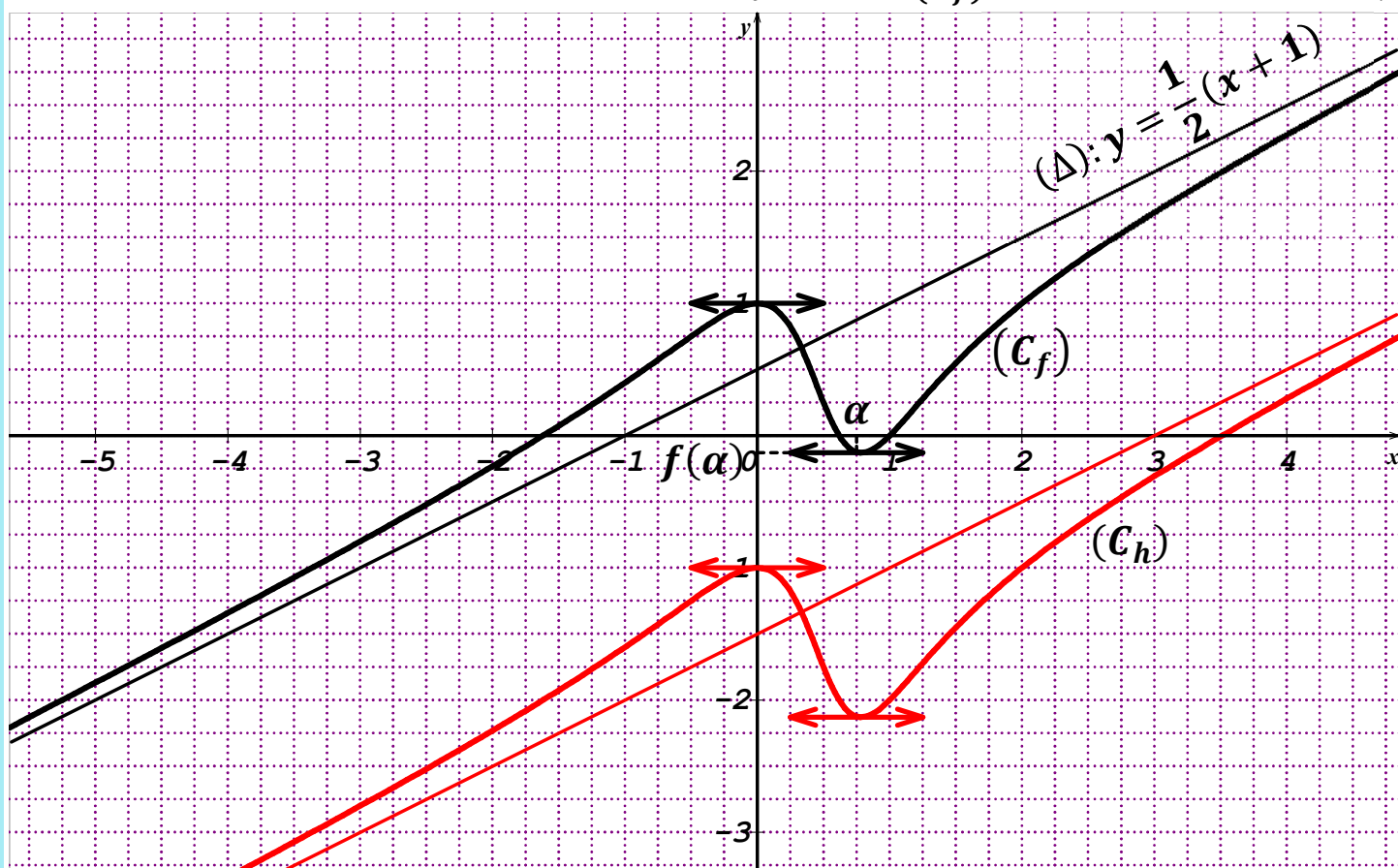
ومنه:  $(x-1)(x^2+x-1) = 0$

وعليه:  $x-1 = 0$  أو  $x^2+x-1 = 0$

وبالتالي:  $x = 1$  أو  $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  أو  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

إذن: حلول المعادلة  $f(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$  هي:  $x = 1$ ؛  $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ؛  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

(5) إنشاء المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  والمنحنى  $(C_h)$ :



(6) لدينا:  $D_h = \mathbb{R}$ ،  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) التحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $h(x) = f(x) - 2$ :

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 \\ &= \frac{x^3 - 2x + 1 - 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x) \end{aligned}$$

إذن:  $h(x) = f(x) - 2$ .

(ب) استنتاج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم إنشاء  $(C_h)$ :  
 بمأن  $h(x) = f(x) - 2$  فإن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{j} - 2$ .

## مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: تقني رياضي.

### التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

1) الف الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

أ- أثبت أن الدالة  $f$  فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .

ج- ادرس تغيّرات الدالة  $f$ .

2) أكتب معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  واستنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

ج- بين أن المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مُقارب للمنحنى  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة  $(d')$  المستقيم المقارب الآخر.

د- أرسم  $(d)$ ؛  $(d')$  و  $(C_f)$  في المعلم السابق.

3) الف الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ .

أ- بين أن الدالة  $g$  زوجية.

ب- انطلاقاً من  $(C_f)$  ارسم  $(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  في نفس المعلم السابق.

### التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017\_01 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = x^3 + 6x + 12$ .

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$ .

2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]-1,48; -1; 47[$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ .

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ .

ثم ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$  وشكل جدول تغيّراتها.

2) أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مُقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

3) بين أن  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$  ثم استنتج حصراً للعدد  $f(\alpha)$ .

4) ارسم المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

5) نرمز بـ  $S$  إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها  $x = 0$ ،  $x = \alpha$  و  $y = 0$ .

أثبت أنّ: من أجل كل  $x \in [\alpha; 0]$ ،  $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$  ثمّ بيّن أنّ:  $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$ .

## مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تقني رياضي.

## حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

لدينا:  $f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$  و  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ و  $(C_f)$  التمثيل البياني لـ  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .(1) أثبات أن الدالة  $f$  فردية:لدينا:  $D_f = \mathbb{R}$  متناظرة بالنسبة إلى الصفر،ولدينا:  $f(-x) = (-x) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} \right) = -x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -f(x)$  إذن:  $f$  دالة فردية.ب-اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا،  $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ لدينا:  $f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 

$$f(x) = 1 + \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

ومنه:

$$= 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{x^2+1} = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ج-دراسة تغيّرات الدالة  $f$ :لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$  لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = +\infty$ وبما أن  $f$  دالة فردية و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، فإن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) > 0$ إذن: الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) كتابة معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = 2 \\ f(0) = 0 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} \right) = 0 \end{cases}$$

معادلة  $(T)$  من الشكل  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ، وبما أن:

$$\text{فإن: } (T): y = 2x$$

ب-دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  واستنتاج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

(ندرس إشارة الفرق  $f(x) - 2x$ )

$$f(x) - 2x = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - 2x = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \right) = x \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$$

■ من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $x^2 \geq 0$  ومنه:  $x^2 + 1 \geq 1$

وعليه:  $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$

$$\text{وبالتالي: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \text{ إذن: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \leq 0$$

إذن: إشارة الفرق  $f(x) - 2x$  عكس إشارة  $x$

|              |                        |                     |                        |
|--------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| $x$          | $-\infty$              | $0$                 | $+\infty$              |
| $x$          | -                      | $\circ$             | +                      |
| $f(x) - 2x$  | +                      | $\circ$             | -                      |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق<br>(T) | $(C_f)$ يقطع<br>(T) | $(C_f)$ يقع تحت<br>(T) |

استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

نلاحظ أن  $(C_f)$  غير وضعيته بالنسبة إلى مماسه  $(T)$  في نقطة التماس وهي النقطة  $O$ ، أي  $(C_f)$  يخترق المماس  $(T)$  في المبدأ  $O$ ، إذن: المبدأ  $O$  هو نقطة انعطاف لـ  $(C_f)$ .

ج-تبيان أن المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مُقارب للمنحنى  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - (x + 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

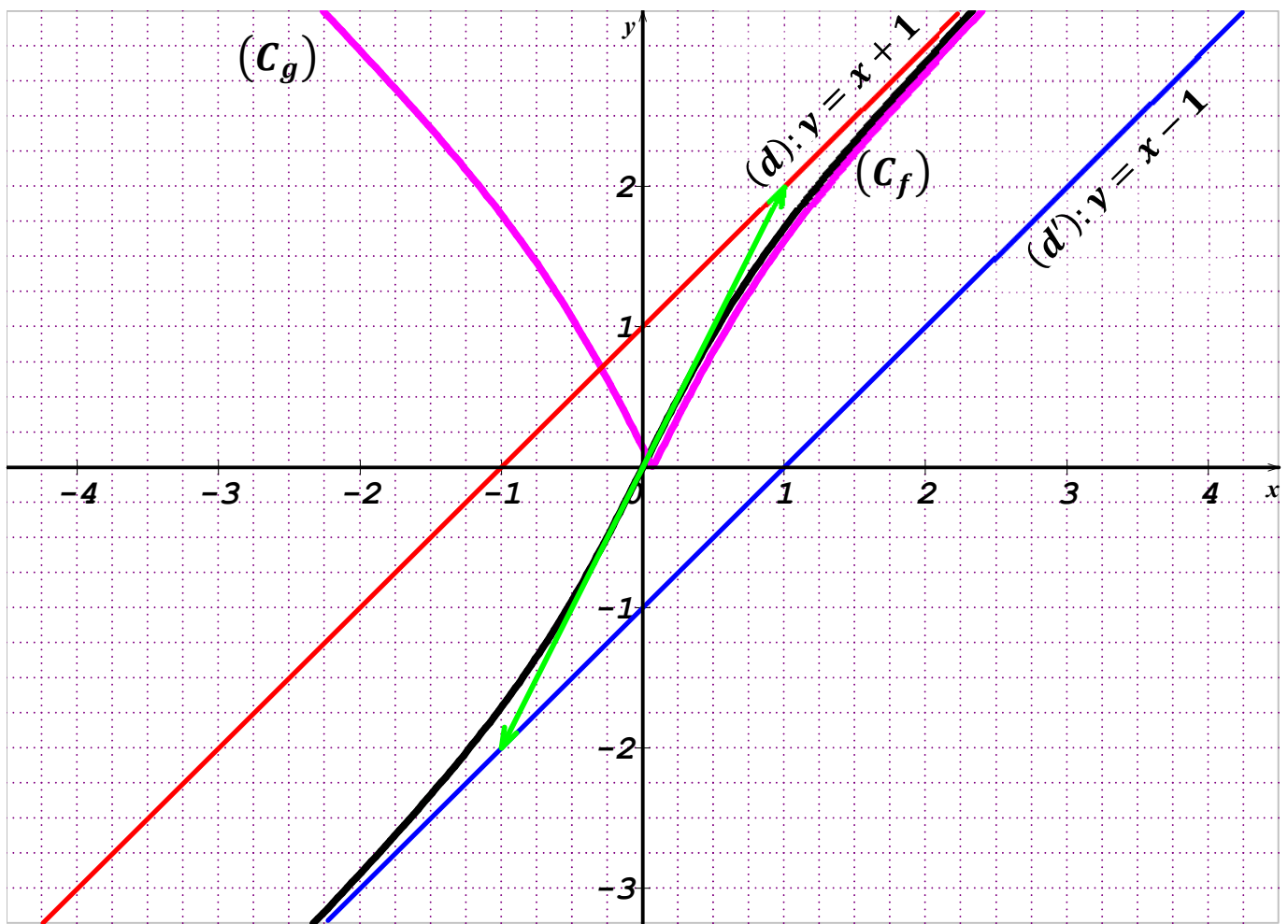
إذن: المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مُقارب للمنحنى  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$ .

استنتاج معادلة  $(d')$  المستقيم المقارب الآخر:

الدالة  $f$  فردية، فالمنحنى  $(C_f)$  متناظر بالنسبة للمبدأ  $O$ ؛ وبما أن  $(C_f)$  يقبل  $(d)$  كمستقيم مُقارب مائل بجوار  $+\infty$  فإنه يقبل مستقيم مُقارب مائل آخر  $(d')$  بجوار  $-\infty$  وهو نظير  $(d)$  بالنسبة إلى المبدأ  $O$ .

$$\text{لدينا: } y = x + 1 \text{ وبالتالي: } -y = -x + 1 \text{ إذن: } (d'): y = x - 1$$

درسم  $(d)$ ؛  $(d')$  و  $(C_f)$  في المعلم السابق:



تذكير:  $|x| = |-x|$   
 $|x|^2 = x^2$  و  
 $\sqrt{x^2} = |x|$

3) لدينا:  $D_g = \mathbb{R}$  و  $g(x) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

أ- تبيان أن الدالة  $g$  زوجية:

لدينا:  $D_g = \mathbb{R}$  متناظرة بالنسبة إلى الصفر،

ولدينا:  $g(-x) = |-x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} \right) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = g(x)$

إذن:  $g$  دالة زوجية.

ب- انطلاقاً من  $(C_f)$  رسم  $(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  في نفس المعلم السابق:

نلاحظ أن:  $g(x) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}} \right) = f(|x|)$

ومنه: من أجل  $x \in [0; +\infty[$  يكون  $g(x) = f(x)$  وعليه:  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$ ، وهو متناظر إلى محور الترتيب لأن  $g$  دالة زوجية.

## حل التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017\_01 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني ر.

1) لدينا:  $D_g = \mathbb{R}$  و  $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$

لدينا: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ ، إذن: الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

2) (تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  (1) تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]-1, 47; -1, 48[$ )

■ لدينا:  $g$  مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال  $[-1, 47; -1, 48]$  لأنها متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$

ولدينا:  $\begin{cases} g(-1,48) = -0,121792 \\ g(-1,47) = +0,003477 \end{cases}$  أي:  $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]-1,48; -1,47[$ .  
استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ :

|        |           |            |           |
|--------|-----------|------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$   | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | $\bigcirc$ | +         |

(II) لدينا:  $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$  و  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

و  $(C_f)$  التمثيل البياني لـ  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

(ب) تبين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ :

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+6)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط  $xg(x)$  وهي ملخصة في الجدول التالي:

|         |           |            |            |           |
|---------|-----------|------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$   | 0          | $+\infty$ |
| $x$     |           | -          | $\bigcirc$ | +         |
| $g(x)$  | -         | $\bigcirc$ | +          |           |
| $f'(x)$ | +         | $\bigcirc$ | -          | +         |

الدالة  $f$  متزايدة تماماً على كل من المجالين  $]-\infty; \alpha]$  و  $[0; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال  $[\alpha; 0]$ .

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

|         |           |             |    |           |
|---------|-----------|-------------|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | 0  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | $\bigcirc$  | -  | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | -3 | $+\infty$ |

(2) تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3-6}{x^2+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-6}{x^2+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

إذن: المستقيم  $(\Delta): y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

(ب) دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ : (ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x$ )

لدينا:  $f(x) - x = \frac{-2x-6}{x^2+2} = \frac{-2(x+3)}{x^2+2}$

وبالتالي: إشارة الفرق  $f(x) - x$  من إشارة البسط  $-2(x+3)$

|              |                            |                         |                            |
|--------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $x$          | $-\infty$                  | $-3$                    | $+\infty$                  |
| $x + 3$      | -                          | $\circ$                 | +                          |
| $f(x) - y$   | +                          | $\circ$                 | -                          |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

(3) تبيان أن  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$  :

لدينا:  $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2}$

ومنه:  $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2(\alpha^3 - 6) - 3\alpha(\alpha^2 + 2)}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha - 12}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2 + 2)} = 0$

لأن:  $g(\alpha) = 0$

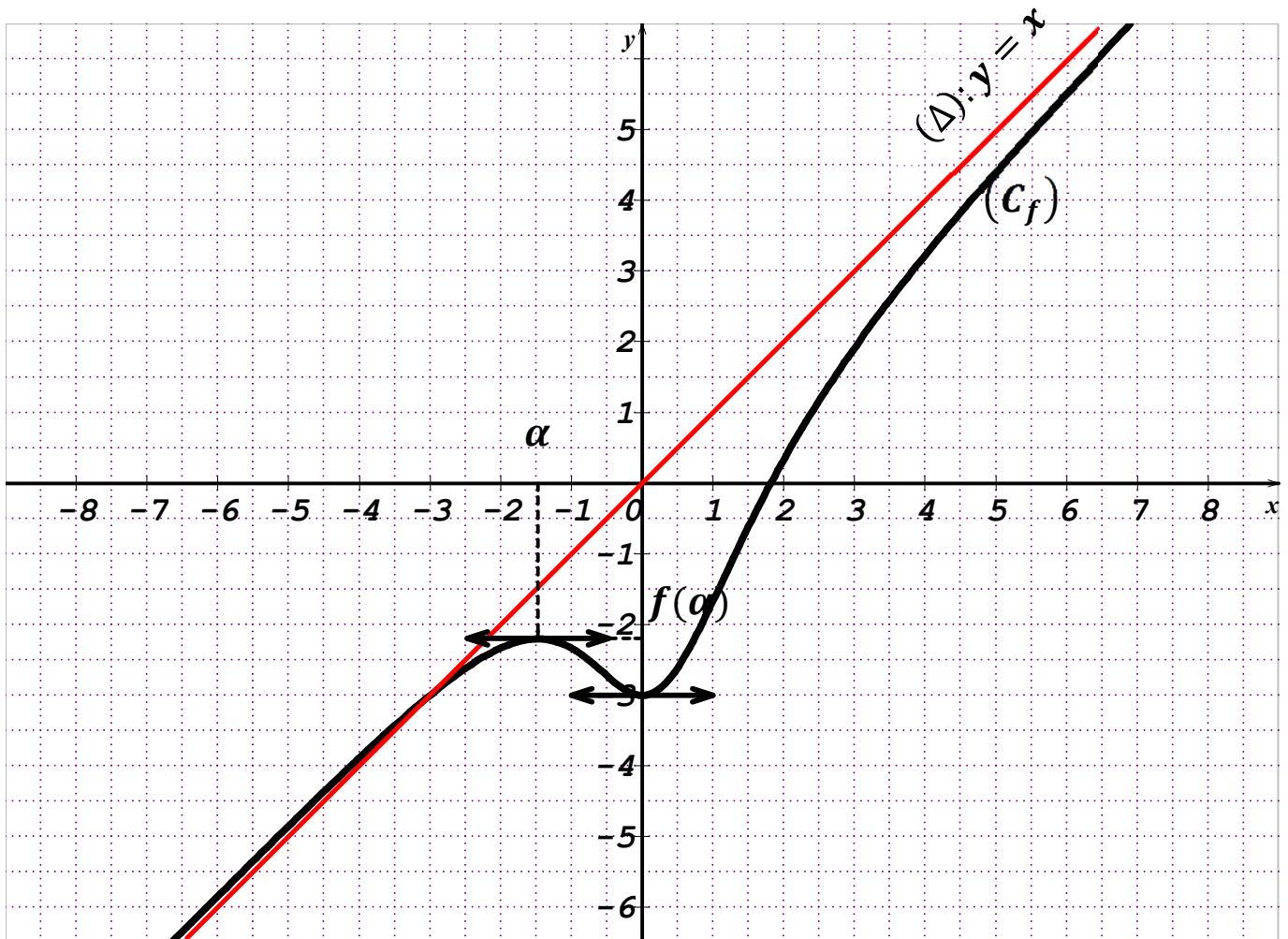
إذن:  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

استنتاج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ :

لدينا:  $-1,48 < \alpha < -1,47$  و  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$  وبالتالي:  $-1,48 \times \frac{3}{2} < \frac{3}{2}\alpha < -1,47 \times \frac{3}{2}$

إذن:  $-2,22 < f(\alpha) < -2,205$

(4) رسم المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ :



$S$  مساحة الحيز المستوي المحدد بـ  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلاتها  $x = \alpha$ ،  $x = 0$  و  $y = 0$ .

لدينا:  $S = \int_{\alpha}^0 -f(x)dx$  لأن  $(C_f)$  يقع تحت محور الفواصل على المجال  $[\alpha; 0]$ .

اثبات أن: من أجل كل  $x \in [\alpha; 0]$ ،  $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ، ثمّ تبيان أن:  $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$ :

من جدول تغيّرات الدّالة  $f$ ، إذا كان:  $\alpha \leq x \leq 0$ ،

فإنّ:  $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$  (لأنّها متناقصة تماماً على المجال  $[\alpha; 0]$ )

وبالتالي:  $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ .

ومنه:  $3 \leq -f(x) \leq -f(\alpha)$  وعليه:  $\int_{\alpha}^0 3dx \leq \int_{\alpha}^0 -f(x)dx \leq \int_{\alpha}^0 -f(\alpha)dx$

وبالتالي:  $- \left[ \frac{3}{2} \alpha x \right]_{\alpha}^0 \leq S \leq [3x]_{\alpha}^0$

إذن:  $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$ .

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: رياضيات.

**التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: رياضيات.**

- $f$  الدّالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يأتي:  $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ .
- (1)  $(C_f)$  منحنى الدّالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
 ادرس تغيّرات الدّالة  $f$ .
- (2) أبين أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما  $(D)$  معادلته:  $y = x$ .  
 ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و  $(D)$ .
- (3) أبين أنّ  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث:  $1,3 < x_0 < 1,4$ .  
 ب- عيّن معادلة  $(\Delta)$  مماسا للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.  
 ج- أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم.
- (4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة  $f$  والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر  $x$ .
- (5)  $g$  الدّالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعبارة:  $g(x) = |f(x)|$ .  
 $(C_g)$  منحنى الدّالة  $g$  في المعلم السابق.  
 -بين كيف يمكن إنشاء  $(C_g)$  انطلاقا من  $(C_f)$ ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق.
- (6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x: g(x) = m^2$ .

**التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: رياضيات.**

## مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية - كالكوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: رياضيات.

## حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: رياضيات.

لدينا:  $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  و  $D_f = ]-1; +\infty[$ . $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .(1) دراسة تغيّرات الدالة  $f$ :

- لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = +\infty$  لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .
- و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = -\infty$  لأن:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ .
- ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ,

$$f'(x) = 1 - 2 \left( \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2} \right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$$

إذن: الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

| $x$     | $-1$      | $x_0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +     |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |       | $+\infty$ |

(2) أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما  $(D)$  معادلته،  $y = x$ :بما أن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، فإنّ المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  (الموازي لمحور الترتيب) مُقارب لـ  $(C_f)$ .لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ .إذن: المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x$  مُقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .بدراسة الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و  $(D)$ : (ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x$ )لدينا:  $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0$  إذن: من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $(C_f)$  يقع تحت المستقيم  $(D)$ .(3) أبين أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث:  $1,3 < x_0 < 1,4$ :لدينا:  $f$  مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال  $]1,3; 1,4[$  (لأنّها متزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$ )ولدينا:  $\begin{cases} f(1,3) = -0,01 \\ f(1,4) = +0,10 \end{cases}$  أي:  $f(1,3) \times f(1,4) < 0$ إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $x_0$  حيث:  $1,3 < x_0 < 1,4$ .أي:  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث:  $1,3 < x_0 < 1,4$ .

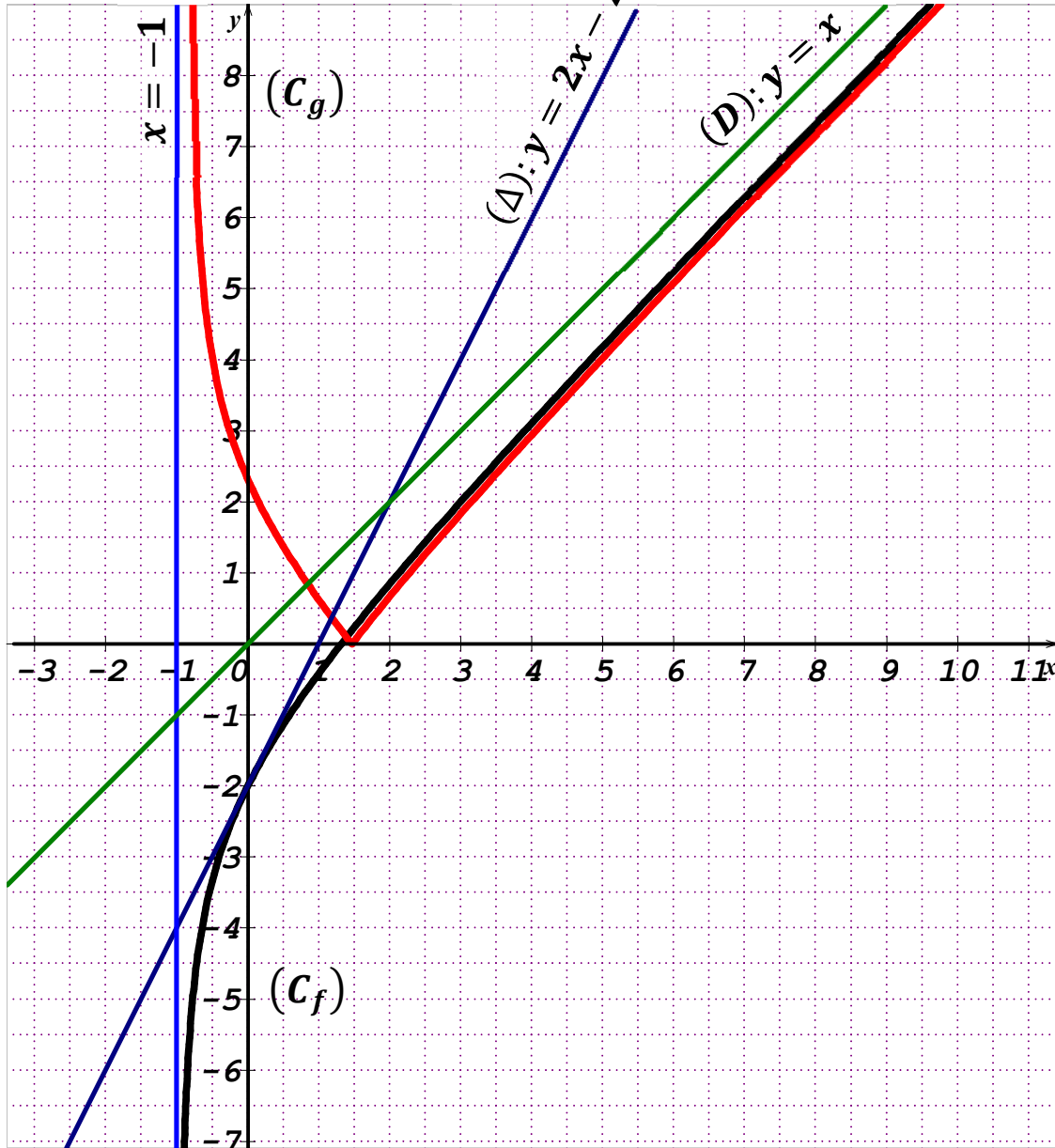
ب-تعيّن معادلة  $(\Delta)$  مماسا للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب:

نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع محور الترتيب فاصلتها 0 إذن:  $(\Delta)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة

$$\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)\sqrt{0+1}} = 2 \\ f(0) = 0 - \frac{2}{\sqrt{0+1}} = -2 \end{cases} \quad 0, \text{ معادلته من الشكل } y = f'(0)(x - 0) + f(0), \text{ وبمّا:}$$

$$\text{فإن: } (\Delta): y = 2x - 2$$

جرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم:



4) إيجاد الدالة الأصلية للدالة  $f$  والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير  $x$ :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  هي الدوال:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c, \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي، ونعلم أن } F(0) = 0 \text{ ومنه: } c = 4$$

$$\text{إذن: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$$

5) لدينا:  $g(x) = |f(x)|$  و  $D_g = ]-1; +\infty[$  منحنى الدالة  $g$  في المعلم السابق.

تبين كيف يمكن إنشاء  $(C_g)$  انطلاقا من  $(C_f)$ ، ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [x_0; +\infty[ \\ -f(x) & ; x \in ]-1; x_0] \end{cases} \text{ أي: } g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

إذن: من أجل  $x \in [x_0; +\infty[$ ، فإن  $g(x) = f(x)$  وبالتالي:  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$ ،

ومن أجل  $x \in ]-1; x_0]$ ، فإن  $g(x) = -f(x)$  وبالتالي:  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل.

(6) مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$ ،  $g(x) = m^2$ :

إذا كان  $m^2 = 0$  أي:  $m = 0$  فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان  $0 < m^2 < 2$  أي:  $m \in ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$  فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.

إذا كان  $m^2 = 2$  أي:  $m = \sqrt{2}$  أو  $m = -\sqrt{2}$  فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.

إذا كان  $m^2 > 2$  أي:  $m \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$  فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

**التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: رياضيات.**