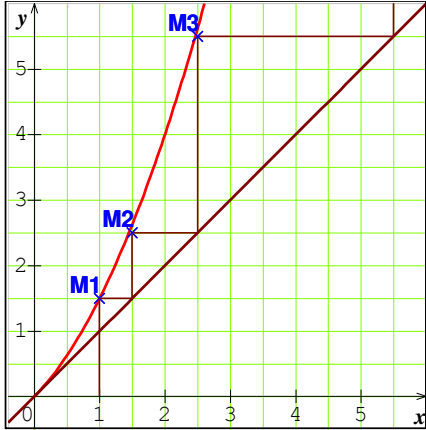
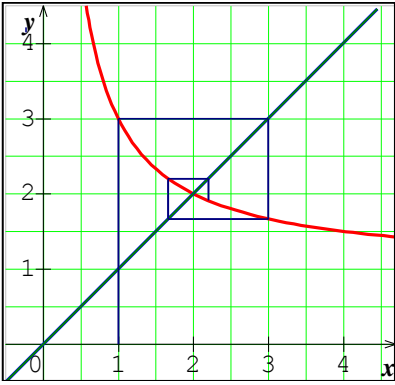


Bac 2019

مجلة

سند المجتهد في الرياضيات المتتاليات



تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية.

أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي π .
في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي **ليونارد فيبو ناتشي** المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، والتي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات .
المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى .

في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .

التحضير لشهادة البكالوريا

Math

من إعداد الاستاذة :
أزرايب جميلة

- شعبة الرياضيات
- شعبة علوم تجريبية
- شعبة تقني رياضي

" لكي تنجح يجب على رغبتك بالنجاح أن تفوق خوفك من الفشل "

ملخص : المتتاليات الحسابية والهندسية

المتتاليات الحسابية
(u_n) متتالية حسابية أساسها r
التعريف (العلاقة التراجعية): $u_{n+1} = u_n + r$
علاقة الحد العام : $u_n = u_0 + nr$: حدها الأول u_0 $u_n = u_1 + (n-1)r$: حدها الأول u_1
حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية: $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $= \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$
اتجاه التغير : لنا $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه $r = 0$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة $r > 0$ معناه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً $r < 0$ معناه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً
العلاقة بين حدين : $u_m - u_p = (m-p)r$
الوسط الحسابي : a ، b و c حدود متتابعة لمتتالية حسابية : $2b = a + c$

المتتاليات الهندسية
(u_n) متتالية هندسية أساسها q
التعريف (العلاقة التراجعية): $u_{n+1} = u_n \times q$
علاقة الحد العام : $u_n = u_0 \times q^n$: حدها الأول u_0 $u_n = u_1 \times q^{n-1}$: حدها الأول u_1
حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية: إذا كان $q \neq 1$: $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $= u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ أو $= u_p \times \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$ إذا كان $q = 1$: معناه المتتالية ثابتة $u_p = u_{p+1} = \dots = u_n$ ومنه : $S = u_p \times (n-p+1)$
اتجاه التغير : إذا كان الحد الأول غير معدوم $q < 0$ معناه المتتالية (u_n) غير رتيبة $q = 1$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة $q > 0$ معناه المتتالية (u_n) رتيبة ولمعرفة اتجاه تغيرها في هذه الحالة نختار طريقة مناسبة لذلك (الفرق أو الدالة المرفقة $u_n = f(n)$ أو المقارنة)
العلاقة بين حدين : $\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$
الوسط الهندسي : a ، b و c حدود متتابعة لمتتالية هندسية: $b^2 = a \times c$

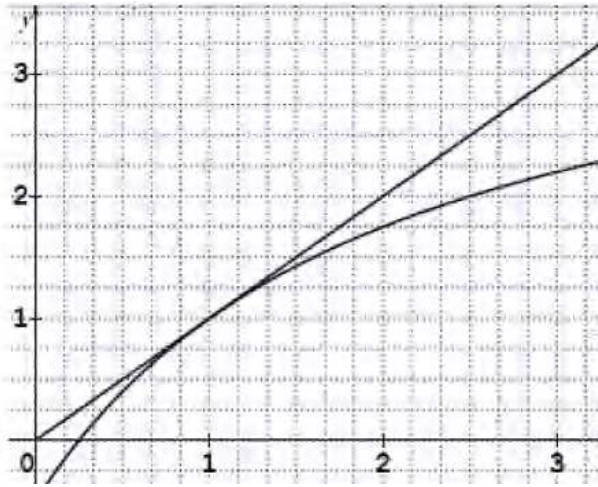
Bac 2019

إذا أنت لم تزرع ورأيت غيرك حاصداً ، ندمت على تقريظك أيام الزرع

تمرين (1):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\square$ ب: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) الشكل المقابل هو تمثيل بياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 5]$ ب: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$



(أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود :

u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها .

(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(ج) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

(د) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ، عين نهايتها

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\square$ ب:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

(أ) أحسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 ، أعط تخمين حول طبيعة المتتالية (v_n) ؟

(ب) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم أكتب v_n بدلالة n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أحسب بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_n \cdot v_n + u_{n+1} \cdot v_{n+1} + u_{n+2} \cdot v_{n+2} + \dots + u_{n+2018} \cdot v_{2018}$

تمرين (2):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي ، من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} \end{cases}$$

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} = \frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$

② برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

③ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

④ (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$ ثم استنتج أن $2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$ ثم اوجد نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين (3):

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان ب: $u_0 = 0$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 1 \leq v_n$ فان

2- بين أن المتتالية (t_n) المعرفة على $\square$ ب: $t_n = v_n - u_n$ هندسية ثم استنتج نهايتها .

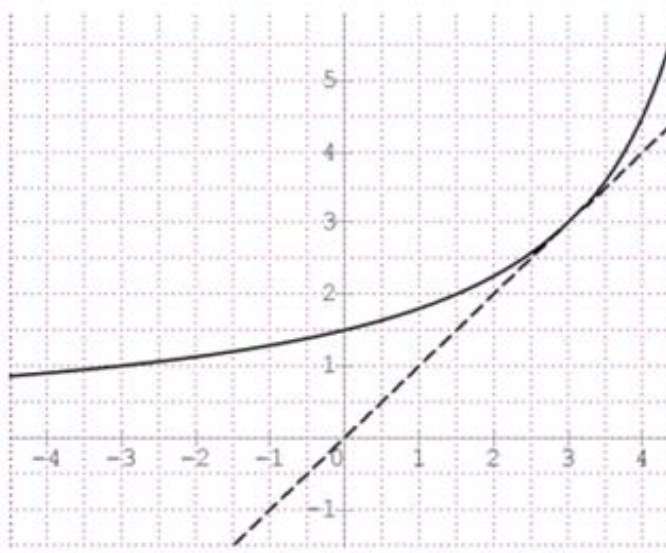
3- أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان و جد نهايتهما المشتركة .

تمرين (4) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 6[$ بـ : $f(x) = \frac{9}{6-x}$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، يعطى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f كما هو مبين في الشكل المقابل .



① أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

③ أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n

ت) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين (5) :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$

① أحسب u_1 و u_2 .

② أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > 2$.

ب - أدرس رقابة المتتالية (u_n) .

③ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقاً ، أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{u_n}{4^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n .

تمرين (6):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

(1) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ أرسم المستقيمين $(D): y = \frac{2}{3}x + 1$ و $(\Delta): y = x$.

أ- مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 . ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 3$

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها.

(2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث : $v_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $v_n = u_n - 3$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = \ln(v_n)$

أ- بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- ليكن المجموع : $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$ ، بين ان : $S_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + n - 1$.

تمرين (7):

f دالة عددية معرفة على $]-3; 6]$ حيث : $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $u_{n+1} = f(u_n)$

① بين ان f متزايدة على المجال $]-3; 6]$

② حل في المجال $]-3; 6]$ المعادلة : $f(x) = x$.

③ أرسم المنحنى (C) .

④ مثل دون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

⑤ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فان : $u_n > -2$

⑥ بين ان المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = \ln(u_n + 3)$

أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n = u_n + 3$

- أحسب بدلالة n الجداء p_n حيث : $p_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n$.

تمرين (8) :

➡ الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(2) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

➡ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) احسب الحدين u_1 و u_2

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$.

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

➡ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1)$$

$$S'_n = (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n)$$

تمرين (9) :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

① تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

② أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ، ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

③ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 6.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

تمرين 10 :

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بحددها الاول } u_0 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وأحسب حددها الاول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{1+3^n}$.

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

د- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

تمرين (11) :

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ : } u_0 = \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$$

I) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة .

II) فيما يلي نفرض أن $u_0 = 3$.

① أحسب u_1, u_2, u_3 ، خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -4$

③ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

④ هل (u_n) متقاربة ؟ حدد نهايتها .

لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + 4$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الاول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

تمرين (12) :

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{Q} \text{ بـ : } u_0 = 6 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

1) أحسب u_1, u_2, u_3

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 4$.

3) بين أن (u_n) متتالية متناقصة . هل (u_n) متتالية متقاربة ؟ عين نهايتها .

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحددها الاول v_0 .

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

تمرين (13):

لنكن f دالة معرفة على المجال $[0; 2]$ كمايلي : $f(x) = -x^2 + 2x$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f .

لنكن (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الاول $u_0 = \frac{1}{8}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$.

① برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $v_n = 1 - u_n$

أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = (v_n)^2$.

ب- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج- أحسب نهاية u_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين (14):

لنكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \\ eu_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq \frac{1}{2}$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة .

لنكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

3) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

4) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

5) أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ب - أحسب المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين (15):

لنكن (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الاول $u_0 = 3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$.

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$.

2) أدرس اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج انها متقاربة .

3) لنكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{R}$: $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$.

أ) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) أحسب بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n$

تمرين (16):

$$(u_n) \text{ متتالية عددية حدها الاول } u_1 = \frac{1}{4} \text{ و من اجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n$$

① أ) احسب الحدود u_2 و u_3 .

ب) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة وأحسب نهايتها .

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي $n : v_n = n.2^n . u_n$

أ- بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأثبت تقارب المتتالية (u_n) .

③ أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

• أحسب الجداء $p_n = u_1 (2u_2) (3u_3) \dots (nu_n)$

تمرين (17):

$$(u_n) \text{ المتتالية المعرفة كمايلي : } u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+2} = \frac{2}{5} u_{n+1} - \frac{1}{25} u_n$$

$$\text{نضع من اجل كل عدد طبيعي } n, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n \text{ و } w_n = 5^n u_n$$

① أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

ب- أكتب v_n بدلالة n .

② بين ان (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 ، ثم عين w_n بدلالة n .

③ أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

④ أكتب u_n بدلالة n .

⑤ أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$

ب- استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين (18):

$$\text{لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على } [0;1] \text{ بـ : } f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

① أ) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;1]$.

ب) استنتج أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فان $f(x) \in [0;1]$.

ج) مثل بيانيا المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 10cm) .

② نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال المنحنى (C) عين على حامل محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2 و u_3

ب) أعط تخميناً حول اتجاه وتقارب المتتالية (u_n)

③ أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$

ب) بين ان : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك .

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n .

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين (19):

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تها على $\mathbb{N}$.

ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n^2 - 1$.

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$.

ب - استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ج - أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n$$

تمرين (20):

لتكن (u_n) متتالية معرفة بدها الاول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

① أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

② أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $u_n \geq 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 5$ ، $u_n \geq n - 3$.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

③ نعرف المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

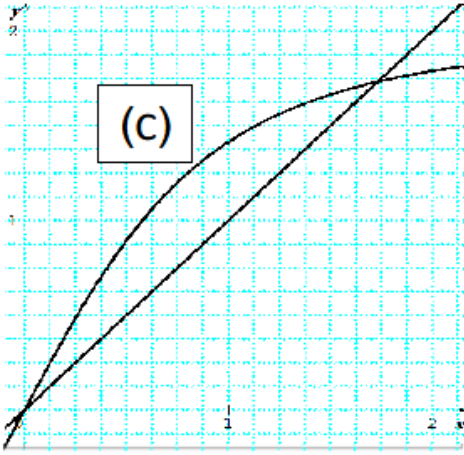
ب) أكتب v_n بدلالة n .

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

④ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

- أجسب بدلالة n المجموع T_n ثم استنتج المجموع S_n بدلالة n .

تمرين (21) :



الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$

ب: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

2- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = f(u_n)$$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) ، مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل — دون حسابها — مبرزا خطوط التمثيل

ب) اعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3- أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5- أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$

تمرين (22) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$ ، α من $\mathbb{R}$

1- عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

لنعتبر في كل ما يأتي $\alpha = -2$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $u_n \geq -2$.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها .

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 2$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين (23):

I - الدالة العددية المعرفة على المجال $[-6; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+6}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- 2- عين نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
- 3 - أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

II - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

- 1- أ- مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل مبرزاً خطوط التمثيل .
ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
- 2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 3$.
- 3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- 4- برر تقارب المتتالية (u_n) ثم احسب نهايتها .
- 5- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|3 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{5} |3 - u_n|$ ثم استنتج أن $|3 - u_n| \leq \frac{2^2}{5^n}$.
ب) احسب نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى .

تمرين (24):

I) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$

(1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{1+2u_n} \right)$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

(2) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب - بين ان المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها .

II) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{1-u_n}{2u_n}$

(1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

(2) أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ، ثم احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_{n-1}}$. واستنتج قيمة S_{2019} .

تمرين (25):

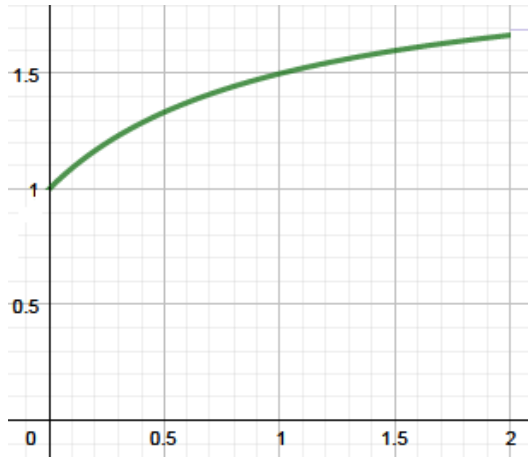
(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

(1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$

(2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$

(4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



I (في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة f المعرفة على

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \quad \text{المجال } [0; 2] \text{ ب:}$$

① أدرس اتجاه تغير f على المجال $[0; 2]$.

② بين أنه من أجل كل $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [1; 2]$.

II ((u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\square$ ب:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

① (أ) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الاولى مبرزا خطوط الاسقاط.

ب (خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

② (أ) برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq v_n \leq 2$

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} \leq v_n$

ب (برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$

- من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq u_{n+1}$

③ (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$

ب (استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

ج (بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

د (بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي α . حدد القيمة المضبوطة ل α .

لتكن (u_n) متتالية معرفة يحددها الاول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

① أحسب u_1 ، u_2 و u_3 وأكتبها على شكل كسر غير قابل للاختزال .

② قارن الحدود الاربعة الاولى من المتتالية (u_n) مع الحدود الاربعة الاولى من المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب:

$$w_n = \frac{n}{n+1}$$

③ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = w_n$

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة ب: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

① برهن أن : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln(4)$

② (أ) ليكن المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. أكتب S_n بدلالة n .

ب (أحسب نهاية S_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين 28 :

➡ f دالة معرفة على المجال $[2; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

- بين انه من أجل كل $[2; +\infty[$ فان : $f'(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2x(x-2)}{(x^2 + 1)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2; +\infty[$.

➡ (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n < 3$.

(2) بسط العبارة $u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.

(3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

(5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 < \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 29 :

I- (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}}$

① أحسب كل من u_2 و u_3

② أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$

ب- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ج- تحقق ان (u_n) متناقصة ، ثم استنتج انها متقاربة .

II- نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $w_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$

① بين ان (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

② أ- عبر عن w_n بدلالة n ثم استنتج ان $u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

ب- أحسب نهاية (u_n) .

تمرين 30 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

ولتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

(1) أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحددها الأول v_0

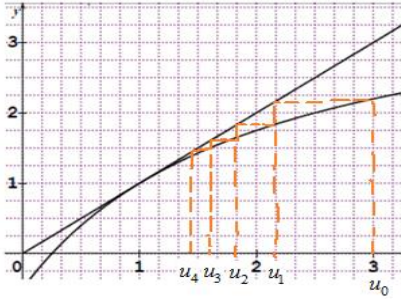
(2) أوجد عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $P_n = e^{S_n}$

(4) استنتج عبارة P_n بدلالة n . أوجد نهاية S_n ثم استنتج نهاية P_n لها n يؤول الى $+\infty$.

حل التمرين 1 :



(أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .

(ب) التخمين حول اتجاه التغير وتقاربها:

من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومقاربة .

(ج) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 1$

طريقة أولى: كتابة u_{n+1} من الشكل $a + \frac{b}{u_n + 2}$.

$$\text{لدينا: } a + \frac{b}{u_n + 2} = \frac{a(u_n + 2) + b}{u_n + 2} = \frac{au_n + 2a + b}{u_n + 2}$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } \begin{cases} a = 4 \\ b = -9 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \text{ وعليه: } u_{n+1} = 4 - \frac{9}{u_n + 2}$$

من أجل $n = 0: u_0 = 3 > 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي: $u_n > 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي: $u_{n+1} > 1$)

$$\text{لدينا: } u_n > 1 \text{ تكافئ: } u_n + 2 > 3 \text{ تكافئ: } \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{3} \text{ تكافئ: } \frac{-9}{u_n + 2} > -3 \text{ تكافئ: } 4 - \frac{9}{u_n + 2} > 1 \text{ ومنه: } u_{n+1} > 1$$

ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 1$.

طريقة ثانية:

من أجل $n = 0: u_0 = 3 > 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ($u_n > 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ ($u_{n+1} > 1$ أي $u_{n+1} - 1 > 0$)

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

بما أن: $u_n > 1$ فإن $3(u_n - 1) > 0$ و $u_n + 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} - 1 > 0$ ومنه $u_{n+1} > 1$

ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 1$.

(د) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n > 1$ فإن $u_n + 2 > 0$ و $-(u_n - 1)^2 < 0$ اذن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

استنتاج أنها مقاربة: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي مقاربة .

حساب النهاية: بما أن المتتالية (u_n) مقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l حيث: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\text{لنا: } l = \frac{4l - 1}{l + 2} \text{ تكافئ: } 4l - 1 = l(l + 2) \text{ تكافئ: } 4l - 1 = l^2 + 2l \text{ تكافئ: } l^2 - 2l + 1 = 0 \text{ تكافئ: } (l - 1)^2 = 0$$

$$\text{تكافئ: } l = 1 \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

(أ) حساب الحدود:

$$v_2 = \frac{1}{u_2 - 1} = \frac{1}{4 \times \frac{11}{5} - 1} = \frac{1}{\frac{13}{5} - 1} = \frac{5}{3} , \quad v_1 = \frac{1}{u_1 - 1} = \frac{1}{4 \times 3 - 1} = \frac{1}{11 - 1} = \frac{1}{10} , \quad v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

اعطاء تخمين حول طبيعة المتتالية : نلاحظ أن $v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3}$ فنخمن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$.

ب) البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \quad \text{لدينا: } v_n = v_0 + nr \quad \text{ومنه: } v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$$

كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1 \quad \text{لدينا: } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{تكافئ: } \frac{1}{v_n} = u_n - 1 \quad \text{تكافئ: } u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \quad \text{ومنه: } u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1 = 0 + 1 = 1 \quad \text{حساب نهاية المتتالية } (u_n)$$

(3) حساب المجموع S_n : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ تكافئ: $v_n(u_n - 1) = 1$ تكافئ: $v_n u_n - v_n = 1$ تكافئ: $v_n u_n = v_n + 1$ ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_n \cdot v_n + u_{n+1} \cdot v_{n+1} + u_{n+2} \cdot v_{n+2} + \dots + u_{n+2018} \cdot v_{n+2018} \\ &= v_n + 1 + v_{n+1} + 1 + v_{n+2} + 1 + \dots + v_{n+2018} + 1 \\ &= v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+2018} + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= \frac{n + 2018 - n + 1}{2} (v_n + v_{n+2018}) + 1 \times (n + 2018 - n + 1) \\ &= \frac{2019}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n + 2018) \right) + 2019 \\ &= \frac{2019}{2} \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{2018}{3} \right) + 2019 \\ &= \frac{2019}{2} + \frac{2019}{3}n + \frac{2037171}{3} + 2019 \\ &= 673n + \frac{4092513}{6} = 673n + \frac{1364171}{2} \end{aligned}$$

حل التمرين 2:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} \end{cases} \quad \text{لدينا: } (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كمايلي، من اجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\textcircled{1} \text{ بيان انه من اجل كل عدد طبيعي } n: 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$$

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{2(1 + 3u_n) - (2 + 3u_n^2)}{1 + 3u_n} = \frac{2 + 6u_n - 2 - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{6u_n - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$$

$\textcircled{2}$ البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < u_n < 2$
من اجل $n = 0: 0 < u_0 = 1 < 2$ محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 < u_n < 2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0 < u_{n+1} < 2$)

$$\begin{cases} u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} < 2 \end{cases} \text{ لدينا : } 0 < u_{n+1} < 2 \text{ تكافئ :}$$

لدينا : $0 < u_n < 2$ إذن : $2 + 3u_n^2 > 0$ و $1 + 3u_n > 0$ ومنه : $\frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} > 0$ وبالتالي : $u_{n+1} > 0$ (1)

لدينا : $0 < u_n < 2$ ومنه : $2 - u_n > 0$ و $3u_n > 0$ و $1 + 3u_n > 0$ ومنه : $\frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n} > 0$

ومنه : $2 - u_{n+1} > 0$ أي : $u_{n+1} < 2$ (2)

من (1) و (2) نجد : $0 < u_{n+1} < 2$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

③ بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} - u_n = \frac{2 + 3u_n^2 - u_n(1 + 3u_n)}{1 + 3u_n} = \frac{2 + 3u_n^2 - u_n - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{2 - u_n}{1 + 3u_n}$$

لدينا : $0 < u_n < 2$ إذن : $2 - u_n > 0$ و $1 + 3u_n > 0$ أي : $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

استنتاج أن (u_n) متقاربة : لدينا (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة .

$$\textcircled{4} \text{ أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7} \text{ (نبين أن } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} < 0 \text{)}$$

$$\frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} = \frac{7 \times 3u_n - 6(1 + 3u_n)}{7(1 + 3u_n)} = \frac{21u_n - 6 - 18u_n}{7(1 + 3u_n)} = \frac{-6 + 3u_n}{7(1 + 3u_n)} = \frac{-3(2 - u_n)}{7(1 + 3u_n)}$$

$$\text{لدينا } 0 < u_n < 2 \text{ إذن : } 2 - u_n > 0 \text{ و } 7(1 + 3u_n) > 0 \text{ و } -3 < 0 \text{ ومنه } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} < 0 \text{ معناه } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$$

الاستنتاج :

$$\text{لدينا : } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\text{بما أن : } 2 - u_n > 0 \text{ فإن : } \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n} < \frac{6(2 - u_n)}{7} \text{ ومنه : } 2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$$

$$\text{ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\text{لدينا : } 2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{من أجل } n=0 : 2 - u_1 < \frac{6}{7}(2 - u_0) \\ \text{من أجل } n=1 : 2 - u_2 < \frac{6}{7}(2 - u_1) \\ \text{من أجل } n=2 : 2 - u_3 < \frac{6}{7}(2 - u_2) \\ \vdots \\ \text{من أجل } n-1 : 2 - u_n < \frac{6}{7}(2 - u_{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\text{بضرب المتباينات نجد : } (2 - u_0) \left(\frac{6}{7}\right)^{n-0+1} > 2 - u_n > \left(\frac{6}{7}\right)^n (2 - 1) \text{ أي : } 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n \text{ ومنه : } 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - u_n = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0 \text{ و } 0 < 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

حل التمرين 3:

لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـ: $u_0 = 0$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 1 \leq v_n$ فان $n=0$: $u_0 = 0 \leq 1 \leq v_0 = 2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \leq 1 \leq v_n$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}$)

$$\text{لنا : } u_n \leq 1 \leq v_n \text{ تكافئ : } 3u_n + 1 \leq 3 \times 1 + 1 \leq 3v_n + 1 \text{ تكافئ : } \frac{3u_n + 1}{4} \leq \frac{3 \times 1 + 1}{4} \leq \frac{3v_n + 1}{4}$$

$$\text{تكافئ : } \frac{3u_n + 1}{4} \leq 1 \leq \frac{3v_n + 1}{4} \text{ ومنه : } u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 1 \leq v_n$.

(2) بيان أن المتتالية (t_n) المعرفة على $t_n = v_n - u_n$ هندسية.

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4} = \frac{3v_n + 1 - 3u_n - 1}{4} = \frac{3v_n - 3u_n}{4} = \frac{3(v_n - u_n)}{4} = \frac{3}{4}t_n$$

ومنه (t_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

استنتاج نهاية (t_n) : لدينا : $t_0 = v_0 - u_0 = 2 - 0 = 2$ ومنه : $t_n = t_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\text{ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \times 0 = 0$$

(3) اثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وإيجاد نهايتهما المشتركة :

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{4} - u_n = \frac{3u_n + 1 - 4u_n}{4} = \frac{1 - u_n}{4} \geq 0$$

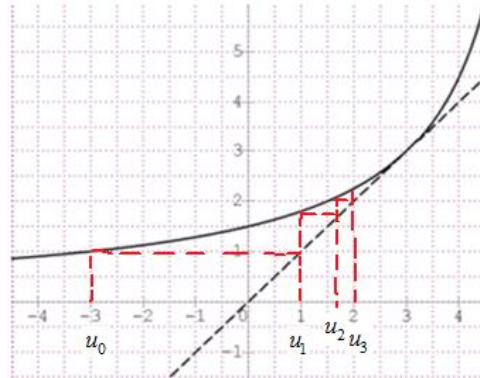
$$\text{ولنا : } v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n + 1}{4} - v_n = \frac{3v_n + 1 - 4v_n}{4} = \frac{1 - v_n}{4} \leq 0$$

ولنا $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان .

استنتاج النهاية : لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 1 \leq v_n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

حل التمرين 4:

① أ) تمثيل الحدود :



ب) التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ ومتقاربة .

ج (البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n < 3$

من اجل $n=0: 3 > -3 = u_0$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n < 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} < 3$)

لدينا : $u_n < 3$ تكافئ : $-u_n > -3$ تكافئ : $6-u_n > 3$ تكافئ : $\frac{1}{6-u_n} < \frac{1}{3}$ تكافئ : $\frac{9}{6-u_n} < \frac{9}{3}$ ومنه : $u_{n+1} < 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n < 3$.

③ (أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6 - u_n)}{6 - u_n} = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$

(ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n < 3$ اذن : $6 - u_n > 0$ ولنا $(u_n - 3)^2 > 0$ اذن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

④ لدينا المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

(أ) بيان ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{-9 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{-u_n + 3}{3(u_n - 3)} = \frac{-(u_n - 3)}{3(u_n - 3)} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{-1}{3}$

حساب حدها الأول :

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = \frac{-1}{6}$$

(ب) التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 + nr = \frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n$$

(ت) استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n} = u_n - 3$ تكافئ : $u_n = \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3$ ومنه : $u_n = \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3 = 0 + 3 = 3$$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

(1) حساب u_1 و u_2 : $u_1 = 3u_0 - 4 = 3 \times \frac{11}{4} - 4 = \frac{17}{4}$ و $u_2 = 3u_1 - 4 = 3 \times \frac{17}{4} - 4 = \frac{35}{4}$

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 2$

من أجل $n=0$: $u_0 = \frac{11}{4} > 2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n > 2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} > 2$)

لدينا : $u_n > 2$ تكافئ : $3u_n > 6$ تكافئ : $3u_n - 4 > 2$ ومنه $u_{n+1} > 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 2$.

ب - دراسة رقابة المتتالية (u_n) :

□ . $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0$ لان $u_n > 2$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على □.

(3) لدينا المتتالية العددية (v_n) المعرفة على □ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ- تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha = 12u_n - 16 + \alpha = 3(4u_n + \alpha) - 3\alpha + \alpha - 16 = 3v_n - 2\alpha - 16$$

(v_n) هندسية أساسها 3 من أجل $-2\alpha - 16 = 0$ أي : $\alpha = -8$.

حساب الحد الاول : $v_0 = 4u_0 - 8 = 4 \times \frac{11}{4} - 8 = 3$

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$

• استنتاج u_n بدلالة n : لدينا : $v_n = 4u_n - 8$ تكافئ : $u_n = \frac{v_n + 8}{4}$ ومنه : $u_n = \frac{3^{n+1} + 8}{4}$

ج - دراسة تقارب المتتالية (u_n) : لنا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 8}{4} = +\infty$ ومنه المتتالية (u_n) متباعدة.

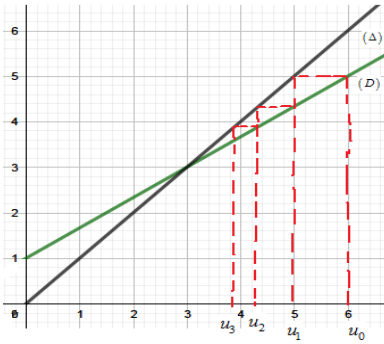
(4) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{u_n}{4^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$

$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{\frac{3^{n+1} + 8}{4}}{4^n} = \frac{3^{n+1} + 8}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{8}{4^{n+1}} = \frac{3 \times 3^n}{4 \times 4^n} + \frac{8}{4 \times 4^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{4^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

حساب المجموع : $S_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^0 + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^0 + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^1 + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^1 + \dots + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^0 + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^1 + \dots + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^0 + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^1 + \dots + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} + 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} + 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \\ &= 3 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{8}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$



(1) أ- التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 :

(2) وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ ومتقاربة .

ب - البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 3$

من أجل $n=0: u_0 = 6 > 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n > 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} > 3$)

لدينا : $u_n > 3$ تكافئ : $\frac{2}{3}u_n > 2$ تكافئ : $\frac{2}{3}u_n + 1 > 3$ ومنه : $u_{n+1} > 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 3$.

ج - دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{-1}{3}u_n + 1 = \frac{3 - u_n}{3}$$

بما أن $u_n > 3$ فإن $3 - u_n < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

• استنتاج أنها متقاربة : لدينا (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 هي متقاربة .

(3) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث : $v_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$.

أ- بيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وتعيين حدها الأول :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1} \times 3^{1-(n+1)}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^{n+1} \times 3^{-n}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^n \times 2 \times 3^{-n}}{2^n \times 3 \times 3^{-n}} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

• تعيين الحد الأول v_0 : $v_0 = 2^0 \cdot 3^{1-0} = 3$

ب- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

من أجل $n=0: v_0 = u_0 - 3$ أي : $3 = 6 - 3$ ومنه $3 = 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ($v_n = u_n - 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ ($v_{n+1} = u_{n+1} - 3$)

لدينا : $v_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^{1-(n+1)}$ تكافئ : $v_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^{-n}$ (1)

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}(v_n + 3) - 2 = \frac{2}{3}(2^n \times 3^{1-n} + 3) - 2 \\ &= \frac{2^{n+1} \times 3^{1-n} + 6}{3} - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n} + 2 - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n} \end{aligned}$$

أي : $u_{n+1} - 3 = 2^{n+1} \times 3^{-n}$ (2)

من (1) و (2) نجد : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

● استنتاج النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 \right] = 3 \times 0 + 3 = 3$$

(4) لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $w_n = \ln(v_n)$

أ- بيان أن (w_n) متتالية حسابية يطلب وتعيين أساسها وحدها الاول :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) = \ln \left(3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) = \ln \left(3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \times \frac{2}{3} \right) \\ &= \ln \left(3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) + \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \ln(v_n) + \ln \left(\frac{2}{3} \right) = w_n + \ln \left(\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln \left(\frac{2}{3} \right)$.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3}{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n}{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n} + \frac{3}{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n} = 1 + \frac{3}{3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n} = 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

ب- بيان ان : $S_n = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + n - 1$ لدينا :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n} = 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^0 + 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^1 + 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \dots + 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^n \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^0 + \left(\frac{3}{2} \right)^1 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2} \right)^n + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} + 1 \times (n - 0 + 1) = \frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} + (n+1) \\ &= -2 \times \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} \right) + n + 1 = -2 + 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + n + 1 \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + n - 1 \end{aligned}$$

حل التمرين 7 :

f دالة عددية معرفة على $]-3; 6]$ حيث : $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$

① بيان ان f متزايدة على المجال $]-3; 6]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0 \quad : x \in]-3; 6]$$

بما ان $f'(x) > 0$ فان الدالة f متزايدة تماما على $]-3; 6]$.

② تعيين الحلول في المجال $]-3; 6]$ للمعادلة $f(x) = x$:

$$f(x) = x \quad \text{تكافئ} : -3 + \sqrt{x+3} = x \quad \text{تكافئ} : \sqrt{x+3} - (x+3) = 0$$

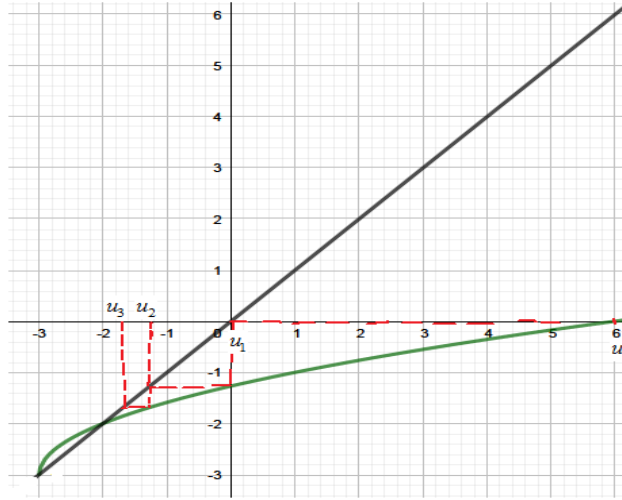
$$\frac{x+3 - (3+x)^2}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{(\sqrt{x+3} - (3+x))(\sqrt{x+3} + (3+x))}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{x+3 - 9 - 6x - x^2}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \sqrt{x+3} + (3+x) \neq 0 \end{cases} \text{ تكافئ :}$$

$$S = \{-3; -2\} : \text{أي} \begin{cases} x_1 = \frac{-(-5)+1}{2(-1)} = -3 \\ x_2 = \frac{-(-5)-1}{2(-1)} = -2 \end{cases} \text{ : حساب المميز } \Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1)(-6) = 1 \text{ ومنه :}$$

③ رسم المنحنى (C) : المنحنى (C) هو صورة لتمثيل الدالة مقلوب بانسحاب شعاعه $\vec{v}(-3, -3)$.



④ تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل : موضح في الشكل .

• التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ومتقاربة .

⑤ البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$

من أجل $n=0 : u_0 = 6 > -2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n > -2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} > -2$)

لدينا : $u_n > -2$ تكافئ : $u_n + 3 > 1$ تكافئ : $\sqrt{u_n + 3} > 1$ تكافئ : $-3 + \sqrt{u_n + 3} > -3 + 1$ ومنه : $u_{n+1} > -2$ ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$

⑥ بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتاج أنها متقاربة :

من السؤال (2) نجد

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{-u_n^2 - 5u_n - 6}{\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3)}$$

$$\text{لنا } \Delta = 1, x_1 = -3, x_2 = -2$$

$$\text{ومنّه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 3)(u_n + 2)}{\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3)}$$

بما أن : $u_n > -2$ فإن $u_n + 2 > 0$ و $u_n + 3 > 0$ و $-1 < 0$ و $\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3) > 0$

ومنّه : $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\square$.

• استنتاج تقاربها :

المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\square$ ومحدودة من الأسفل بالعدد -2- اذن هي متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ حيث : $v_n = \ln(u_n + 3)$

أ- بيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وتعيين حدها الأول :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 3) = \ln(-3 + \sqrt{u_n + 3} + 3) = \ln(\sqrt{u_n + 3}) = \ln\left((u_n + 3)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln(u_n + 3) = \frac{1}{2} v_n$$

• تعيين حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 + 3) = \ln(6 + 3) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2 \ln(3)$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n$ وبالتالي $v_n = 2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \ln(u_n + 3)$ تكافئ : $e^{v_n} = u_n + 3$ تكافئ : $u_n = e^{v_n} - 3$ ومنه : $u_n = e^{2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3$

• حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3 \right] = e^0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

ج- حساب الجداء P_n بدلالة n :

لدينا $w_n = u_n + 3$ أي $w_n = e^{v_n} - 3 + 3 = e^{v_n}$ ومنه $w_n = e^{v_n}$ ومنه :

$$P_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$= e^{2 \ln(3) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}} = e^{2 \ln(3) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}} = e^{4 \ln(3) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

حل التمرين 8 :

☞ f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 3}$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 3}} : x \in [0; +\infty[$$

من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) \geq 0$ لأن $x \geq 0$ و $2\sqrt{x^2 + 3} \geq 0$ على المجال $[0; +\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

(2) بيان أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

لدينا f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ إذن من أجل كل $x \in [0; +\infty[$:

$$f(x) \geq f(0) \text{ أي } f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبالتالي : } f(x) \geq 0$$

☞ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\square$ كمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(3) حساب الحدين u_1 و u_2 :

$$u_2 = \frac{1}{2} \sqrt{u_1^2 + 3} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{1}{2} \sqrt{u_0^2 + 3} = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) أ- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$

من أجل $n = 0$: $0 \leq u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} < u_1 = \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$) ونبرهن على صحتها

من أجل $n+1$ (أي : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$)

لدينا : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ تكافئ : $0 \leq u_n^2 < u_{n+1}^2 < 1$ تكافئ : $3 \leq u_n^2 + 3 < u_{n+1}^2 + 3 < 4$

تكافئ : $\sqrt{3} \leq \sqrt{u_n^2 + 3} < \sqrt{u_{n+1}^2 + 3} < 2$ تكافئ : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 3} < \frac{1}{2} \sqrt{u_{n+1}^2 + 3} < 1$ ومنه : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

أذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$.

ب — استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ أي $u_n < u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما وكذلك محدودة من الاعلى بالعدد 1 إذن هي متقاربة .

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\left\{ \begin{array}{l} l^2 = 1 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 3l^2 = +3 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 4l^2 = l^2 + 3 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } 2l = \sqrt{l^2 + 3} \text{ تكافئ } l = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ وبالتالي } l = 1 \text{ أي : } \left\{ \begin{array}{l} l = 1 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } l = 1$$

• لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

(5) بيان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1} = (u_{n+1}^2 - 1) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 3} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} (u_n^2 + 3) - 1 = \frac{1}{4} u_n^2 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} u_n^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (u_n^2 - 1) = \frac{1}{4} v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

• تعيين حدها الاول : $v_0 = u_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$

(6) التعبير عن v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لنا $v_n = u_n^2 - 1$ تكافئ : $v_n + 1 = u_n^2$ تكافئ : $u_n = \sqrt{v_n + 1}$ وبالتالي $u_n = \sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$

(7) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = \sqrt{-0 + 1} = 1$$

(8) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$\begin{aligned} S_n &= (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1) \\ &= u_0^2 - 1^2 + u_1^2 - 1^2 + u_2^2 - 1^2 + \dots + u_n^2 - 1^2 \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ &= -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{-4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S'_n &= (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n) \\
&= (v_0 + 1 - 0) + (v_1 + 1 - 1) + (v_2 + 1 - 2) + \dots + (v_n + 1 - n) \\
&= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + 1 + 0 + (-1) + \dots + (1 - n) \\
&= S_n + \frac{n - 0 + 1}{2} (1 + 1 - n) \\
&= \frac{-4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(2-n)}{2} \\
&= \frac{-4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{-n^2 + n + 2}{2}
\end{aligned}$$

حل التمرين 9 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

① التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

② أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

من أجل $n = 0$: $0 < u_0 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$)

لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ تكافئ : $0 < 2u_n < 1$ تكافئ : $1 < 2u_n + 1 < 2$ تكافئ : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n + 1} < 1$

تكافئ : $-1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$ تكافئ : $1 - \frac{1}{2u_n + 1} < 1 - \frac{1}{2}$ تكافئ : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{-2u_n^2 + u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$$

• بيان ان المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة :

لنا $0 < u_n < \frac{1}{2}$ تكافئ $0 < -2u_n < -2 \times \frac{1}{2}$ تكافئ $-2 < -2u_n < -1$ تكافئ $1 - 2u_n < 1 - 0$ تكافئ $1 - 2u_n < 1$ اذن :

$1 - 2u_n > 0$ وكذلك $2u_n + 1 > 0$ و $u_n > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج) استنتاج تقارب المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

• تعيين نهايتها :

بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

• بالتعويض نجد : $l = \frac{2l}{2l+1}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} l(2l+1) = 2l \\ 2l+1 \neq 0 \end{array} \right.$ و تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} 2l^2 + l = 2l \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$

تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} 2l^2 - l = 0 \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$ و تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} l(2l-1) = 0 \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$ و تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} l = 0 \\ l = \frac{1}{2} \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$

بما ان $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما فان $l = \frac{1}{2}$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

③ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(ا) اثبات ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها 6:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3^{n+1} \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n + 1}}{\frac{4u_n - 2u_n - 1}{2u_n + 1}} = \frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{2u_n - 1} \\ &= \frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n - 1} = \frac{3^n \times 3 \times 2u_n}{2u_n - 1} = 6 \times \frac{3^n u_n}{2u_n - 1} = 6v_n \end{aligned}$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n :

لنا $v_n = v_0 \times q^n$ و $v_0 = \frac{3^0 u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{-1}{3}$ ومنه $v_n = \frac{-1}{3} \times 6^n = \frac{-6^n}{3}$.

• استنتاج ان $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$:

لدينا $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ تكافئ $v_n (2u_n - 1) = 3^n u_n$ تكافئ $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ تكافئ $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

تكافئ $u_n (2v_n - 3^n) = v_n$ تكافئ $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

بالتعويض نجد :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\frac{-6^n}{3}}{2 \times \frac{-6^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-(2 \times 3)^n}{3}}{2 \times \frac{-(2 \times 3)^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-2^n \times 3^n}{3}}{2 \times \frac{-2^n \times 3^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-2^n \times 3^n}{3}}{\frac{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}}{3}} \\ &= \frac{-2^n \times 3^n}{3} \times \frac{3}{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}} = \frac{-2^n \times 3^n}{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}} = \frac{-3^n \times 2^n}{-3^n (2^{n+1} + 3^1)} = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}} \end{aligned}$$

(ج) حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 2^1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{3}{2^n} + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

$$\frac{1}{u_n} = \frac{3+2^{n+1}}{2^n} = \frac{3}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \text{ لنا}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + 2 + \dots + 2 \\ &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 2(n+1) = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + 2(n+1) \\ &= 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1) \end{aligned}$$

حل التمرين 10 :

1- البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 1$:

من أجل $n=0$ لنا : $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} < 1$).

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$ (1)

لدينا $0 < u_n < 1$ أي $-2 < -2u_n < 0$ ومنه : $1 < 3 - 2u_n < 3$ (2)

من (1) و (2) نجد : $0 < \frac{u_n}{3-2u_n} < 1$ أي : $0 < u_{n+1} < 1$.

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 1$.

ب) بيان ان (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n} = \frac{u_n - 3u_n + 2u_n^2}{3-2u_n} = \frac{2u_n^2 - 2u_n}{3-2u_n} = \frac{2u_n(u_n - 1)}{3-2u_n}$$

لنا : $0 < u_n < 1$ أي : $2u_n > 0$ و $-1 < u_n - 1 < 0$ أي : $u_n - 1 < 0$ ولنا : $1 < 3 - 2u_n < 3$ أي : $3 - 2u_n > 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$.

ج) استنتاج ان (u_n) متقاربة : لنا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة .

2- أ- بيان ان (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$ وحساب حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n - (3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{1}{3} v_n$$

ومنه (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{حساب الحد الأول : } v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -1$$

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$ تكافئ : $v_n(u_n - 1) = u_n$ تكافئ : $v_n u_n - v_n = u_n$ تكافئ : $v_n u_n - u_n = v_n$ تكافئ : $u_n(v_n - 1) = v_n$

$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \frac{1}{3^n} \times \frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{1+3^n}$$

تكافئ : $u_n = \frac{v_n}{v_n - 1}$ ومنه :

ج - حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+3^n} = 0$ (لان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$)

د - حساب المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{1+3^0}} + \frac{1}{\frac{1}{1+3^1}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{1+3^n}} \\ &= 1+3^0 + 1+3^1 + \dots + 1+3^n = 1+1+\dots+1+3^0+3^1+\dots+3^n \\ &= 1 \times (n-0+1) + 3^0 \times \frac{3^{n-0+1}-1}{3-1} = n+1 + \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ &= n+1 + \frac{1}{2} \times (3^{n+1}-1) \end{aligned}$$

حل التمرين 11 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

I(تعيين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة :

(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = \alpha$ ومنه $u_{n+1} = u_n = \alpha$

بالتعويض نجد $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 2$ تكافئ $\frac{1}{2}\alpha = -2$ تكافئ $\alpha = -4$.

II) فيما يلي نفرض أن $u_0 = 3$.

① حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-9}{4} - 2 = \frac{-25}{8} \text{ و } u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} - 2 = \frac{-9}{4} \text{ و } u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{1}{2} \times 3 - 2 = \frac{-1}{2}$$

• تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ أن $u_3 < u_2 < u_1$ فنحن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

② البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq -4$

من اجل $n = 0$: $u_0 = 3 \geq -4$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \geq -4$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \geq -4$)

$$\text{لدينا : } u_n \geq -4 \text{ تكافئ : } \frac{1}{2}u_n \geq -2 \text{ تكافئ : } \frac{1}{2}u_n - 2 \geq -4 \text{ ومنه } u_{n+1} \geq -4$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq -4$.

③ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 2 - u_n = \frac{-1}{2}u_n - 2 = \frac{-u_n - 4}{2}$$

لنا $u_n \geq -4$ تكافئ $-u_n \leq 4$ تكافئ $-u_n - 4 \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

④ استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

لدينا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد -4 فهي متقاربة .

● حساب نهايتها :

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

بالتعويض نجد : $l = \frac{1}{2}l - 2$ تكافئ $\frac{1}{2}l = -2$ تكافئ $l = -4$ وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -4$

لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + 4$

أ البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

● تعيين الحد الأول : $v_0 = u_0 + 4 = 3 + 4 = 7$

ب (كتابة عبارة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ج اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$:

لدينا : $v_n = u_n + 4$ ومنه $u_n = v_n - 4$ وبالتعويض نجد $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$

● حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 = 7 \times 0 - 4 = -4$

د حساب بدلالة n ، المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + \dots + v_n - 4$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + (-4) + (-4) + (-4) + \dots + (-4)$$

$$= 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (-4)(n+1)$$

$$= 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} - 4(n+1) = 14 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 4(n+1)$$

حل التمرين 12 :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

(1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{33}{8} + 3 = \frac{129}{32} \text{ و } u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{2} + 3 = \frac{33}{8} \text{ و } u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times 6 + 3 = \frac{9}{2}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 4$.

من أجل $n = 0$: $u_0 = 6 \geq 4$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \geq 4$) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \geq 4$)

لدينا : $u_n \geq 4$ تكافئ : $\frac{1}{4}u_n \geq 1$ تكافئ : $\frac{1}{4}u_n + 3 \geq 4$ ومنه $u_{n+1} \geq 4$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq 4$.

(3) بيان ان (u_n) متتالية متناقصة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = \frac{-3}{4}u_n + 3 = \frac{-3u_n + 12}{4} = \frac{-3(u_n - 4)}{4}$$

لنا $u_n \geq 4$ تكافئ $u_n - 4 \geq 0$ و $-3 < 0$ و $4 > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

• لنا (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل بالعدد 4 ومنه المتتالية (u_n) متقاربة.

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 4$

(أ) بيان أن (v_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

• تعيين الحد الأول : $v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$.

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

• حساب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 \times 0 = 0$

(ج) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

لدينا : $u_n - 4 = v_n$ ومنه $u_n = v_n + 4$ وبالتعويض نجد $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4$

(د) حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 + 4 + v_1 + 4 + v_2 + 4 + \dots + v_n + 4$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + 4 + 4 + 4 + \dots + 4$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{4}} + 4(n - 0 + 1) = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 4(n+1)$$

$$= \frac{8}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$$

حل التمرين 13 :

لتكن f دالة معرفة على المجال $[0; 2]$ كمايلي : $f(x) = -x^2 + 2x$

- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل $[0; 2]$: $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x + 2)$

$f'(x) \geq 0$ لأن $x \in [0; 2]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; 2]$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	$\bigcirc$	-

① (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{8}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$ ،

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$:

من أجل $n = 0$: $0 < u_0 = \frac{1}{8} < 1$ محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 < u_n < 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0 < u_{n+1} < 1$)

لدينا : $0 < u_n < 1$ وبما أن f متزايدة تماماً على المجال $[0; 2]$ فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ ومنه : $0 < u_{n+1} < 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$.

ب- بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - u_n = -u_n^2 + u_n = u_n(-u_n + 1)$$

$$\text{لنا } 0 < u_n < 1 \text{ ومنه } 0 < -u_n + 1 < 1 \text{ أي } -1 < -u_n < 0 \text{ ومنه } -u_n + 1 > 0$$

$$\text{ولنا } u_n > 0 \text{ وبالتالي } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماماً على } \mathbb{N}.$$

الاستنتاج : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 1 - u_n$

أ- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = (v_n)^2$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ : لنا } v_0 = 1 - u_0 = \frac{7}{8} \text{ و } v_1 = 1 - u_1 = 1 - \left(-\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{8} \right) = \frac{49}{64} \text{ ومنه : } v_1 = (v_0)^2 \text{ "الخاصية محققة" .}$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $v_{n+1} = (v_n)^2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $v_{n+2} = (v_{n+1})^2$)

$$v_{n+2} = 1 - u_{n+2} = 1 - (-u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}) = 1 + u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} = (1 - u_{n+1})^2 = (v_{n+1})^2$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = (v_n)^2$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ : لنا } v_0 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{8} \text{ "الخاصية محققة" .}$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$)

$$\text{لنا : } v_{n+1} = (v_n)^2 = \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج- حساب النهاية :

$$\text{لنا : } v_n = 1 - u_n \text{ ومنه } u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \right) = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \\ eu_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي :}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq \frac{1}{2}$:

من أجل $n=0$: لنا $u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \geq \frac{1}{2}$ "الخاصية محققة".

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \geq \frac{1}{2}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$).

$$\text{لدينا : } eu_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \text{ ومنه : } eu_{n+1} = u_n + \frac{e-1}{2} \text{ أي } u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e}$$

$$\text{ولنا : } u_n \geq \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{1}{e}u_n \geq \frac{1}{2e} \text{ تكافئ } \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} \geq \frac{1}{2e} + \frac{e-1}{2e} = \frac{1}{2} \text{ ومنه } u_{n+1} \geq \frac{1}{2} \text{ ومنه : الخاصية صحيحة من أجل } n+1$$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq \frac{1}{2}$.

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - u_n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

لدينا : $u_n \geq \frac{1}{2}$ ومنه $u_n - \frac{1}{2} \geq 0$ ولنا $\frac{1-e}{e} < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

• استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

(3) بيان أن (v_n) متتالية حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1} = \ln\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1-e}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n - \frac{1}{2e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -\ln e + v_n = -1 + v_n$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = -1$.

• حساب الحد الأول : $v_0 = \ln\left(u_0 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + e^2 - \frac{1}{2}\right) = \ln(e^2) = 2\ln e = 2$

(4) كتابة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = 2 - n$.

(5) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n-0+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(2+2-n) = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$$

ب- حساب المجموع T_n بدلالة n :

$$\text{لدينا : } v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \text{ تكافئ } v_n = e^{v_n} \text{ تكافئ } u_n - \frac{1}{2} = e^{v_n} \text{ تكافئ } u_n = e^{v_n} + \frac{1}{2}$$

نضع $w_n = e^{v_n}$ لدينا : $e^{v_n} = e^{2-n} = e^2 \times e^{-n} = e^2 \times \frac{1}{e^n} = e^2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$ ومنه (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ وحدها الأول $w_0 = e^2$

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = e^{v_0} + \frac{1}{2} + e^{v_1} + \frac{1}{2} + \dots + e^{v_n} + \frac{1}{2} \\ &= e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = w_0 + w_1 + \dots + w_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{1}{2}(n-0+1) \\ &= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} + \frac{n+1}{2} = \frac{e^3}{e-1} \times \left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

حل التمرين 15 :

(1) البرهان بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

من أجل $n=0$: $\frac{3}{2} \leq u_0 = 3 \leq 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$)
لدينا : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$ تكافئ : $6 \leq 4u_n \leq 12$ تكافئ : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{4u_n} \leq \frac{1}{12}$ تكافئ : $\frac{-9}{12} \leq \frac{-9}{4u_n} \leq \frac{-9}{6}$ تكافئ : $\frac{-3}{4} \leq \frac{-9}{4u_n} \leq \frac{-3}{6}$

تكافئ : $3 - \frac{3}{2} \leq 3 - \frac{9}{4u_n} \leq 3 - \frac{3}{4}$ تكافئ : $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4}$ ومنه $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$
ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\ &= \frac{12u_n - 9 - u_n(4u_n)}{4u_n} \\ &= \frac{-4u_n^2 + 12u_n - 9}{4u_n} \end{aligned}$$

حساب المميز $\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 0$: ومنه $x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2}{4u_n} \quad \text{ومنه :}$$

بما أن : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$ فإن $-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$ و $4u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

• استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

حساب نهاية المتتالية (u_n) :

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l

$$\text{حيث : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\text{لنا : } l = 3 - \frac{9}{4l} \text{ ومنه : } 4l^2 - 12l - 9 = 0 \text{ حيث } l \neq 0 \text{ تكافئ : } -4l^2 + 12l - 9 = 0$$

$$\text{حساب المميز } \Delta : \Delta = 0 \text{ ومنه : } x_0 = \frac{3}{2} \text{ وبالتالي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة على } \square \text{ بـ : } v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

(أ) البرهان ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها وتعيين أساسها :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{6 - \frac{18}{4u_n} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{3 - \frac{9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{2}{\frac{6u_n - 9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{2 \times 3}{(2u_n - 3) \times 3} = \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{6}{6u_n - 9} = \frac{4u_n - 6}{6u_n - 9} = \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = \frac{2}{3}$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{- حساب الحد الاول : } v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{2 \times 3 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 + nr$$

$$v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n$$

ومنه :

$$= \frac{2 + 2n}{3}$$

• استنتاج u_n بدلالة n :

$$\text{لنا : } v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \text{ تكافئ : } \frac{1}{v_n} = \frac{2u_n - 3}{2} \text{ تكافئ : } \frac{2}{v_n} = 2u_n - 3 \text{ تكافئ : } 2u_n = \frac{2}{v_n} + 3 \text{ تكافئ : } u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2}$$

$$\text{تكافئ : } u_n = \frac{3}{2 + 2n} + \frac{3}{2} \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2(1+n)} + \frac{3}{2} \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+n} + 1 \right) \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1+1+n}{1+n} \right)$$

$$\text{تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

(3) حساب المجموع :

$$\text{لنا : } u_n v_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2+2n}{3}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2(n+1)}{3}$$

$$= n + 2$$

ومنه :

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n-0+1}{2} (2+n+2) = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } u_1 = \frac{1}{4}$$

① (أ) حساب الحدود u_2 و u_3 :

$$u_3 = \frac{2}{4(2+1)} u_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{192} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{1}{4(1+1)} u_1 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

ب) البرهان أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n > 0$:

من اجل $n=1$: $u_1 = \frac{1}{4} > 0$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n > 0$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} > 0$)

لدينا : $u_n > 0$ تكافئ : $\frac{n}{4(n+1)} u_n > 0$ (لأن $n \in \mathbb{N}^*$ فان $\frac{n}{4(n+1)} > 0$) ومنه $u_{n+1} > 0$.

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n > 0$:

ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{4(n+1)} u_n - u_n = \left(\frac{n}{4(n+1)} - 1 \right) u_n = \left(\frac{n - 4(n+1)}{4(n+1)} \right) u_n = \left(\frac{n - 4n - 4}{4(n+1)} \right) u_n = \left(\frac{-3n - 4}{4(n+1)} \right) u_n$$

لنا $n \in \mathbb{N}^*$ اذن $4(n+1) > 0$ و $-3n - 4 < 0$ ولدينا $u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

• استنتاج ان (u_n) متقاربة :

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فان (u_n) متقاربة .

• حساب نهاية المتتالية (u_n) :

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

بالتعويض نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{ومنه} \quad l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{3}{4}l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad l - \frac{1}{4}l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad l = \frac{1}{4}l \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{4(n+1)} u_n \right]$$

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $v_n = n \cdot 2^n \cdot u_n$:

أ- بيان أن (v_n) هندسية و تعيين أساسها q وحدها الأول v_1 :

$$v_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot u_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{n}{4(n+1)} u_n = 2 \times 2^n \times \frac{n}{4} u_n = \frac{1}{2} 2^n \times n \times u_n = \frac{1}{2} v_n$$

• حساب v_1 : $v_1 = 1 \times 2^1 \times u_1 = \frac{1}{2}$

ب- كتابة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$ أي $v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$

• استنتاج u_n بدلالة n :

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n}{n \cdot 2^n} \quad \text{لدينا} \quad v_n = n \cdot 2^n \cdot u_n \quad \text{تكافئ} \quad u_n = \frac{v_n}{n \cdot 2^n} \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$\text{أي} \quad u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^n} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}$$

• اثبات تقارب المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right] = 0 \times 0 = 0$$

ومنه المتتالية متقاربة نحو العدد 0 .

③ حساب المجموع :

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

• حساب الجداء :

$$\begin{aligned} p_n &= u_1 (2u_2) (3u_3) \dots (nu_n) = \frac{1}{4} \times \left(2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) \times \left(3 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right) \times \dots \times \left(n \times \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^6 \times \dots \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^6 \times \dots \times \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2+4+6+\dots+(2n)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n-1+1}{2}(2+2n)} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(2+2n)}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n(1+n)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n^2+n} \end{aligned}$$

حل التمرين (17) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$

① أ- بيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n = \frac{1}{5} \left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \right) = \frac{1}{5}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

ب- كتابة v_n بدلالة n : لنا $v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{ومنه} \quad v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1 - \frac{1}{5} \times 0 = 1$$

② بيان ان (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 :

$$w_{n+1} - w_n = 5^{n+1}u_{n+1} - 5^n u_n = 5^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \right) = 5^{n+1}v_n = 5^{n+1} \times \left(\frac{1}{5} \right)^n = 5 \times 5^n \times \frac{1}{5^n} = 5$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها 5.

• كتابة w_n بدلالة n :

$$w_0 = 5^0 u_0 = 1 \times 0 = 0$$

$$w_n = w_0 + nr = 0 + 5n = 5n \quad \text{لنا}$$

③ حساب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

④ كتابة u_n بدلالة n : لنا $w_n = 5^n u_n$ ومنه : $u_n = \frac{w_n}{5^n}$ أي $u_n = \frac{5n}{5^n}$ وبالتالي $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$.

⑤ أ- بيان انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$ ،

لدينا $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$ ومنه $u_{n+1} = \frac{n+1}{5^n} > 0$ لان $n \in \mathbb{N}^*$.

ومن جهة اخرى $0 < u_{n+1} - \frac{2}{5} u_n = \frac{n+1}{5^n} - \frac{2}{5} \times \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{n+1}{5^n} - \frac{2n}{5^n} = \frac{-n+1}{5^n} < 0$ لان $n \in \mathbb{N}^*$ أي $u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$

ومنه : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$ ،

ب- استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ،

لدينا من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$ ،

$$\begin{cases} 0 < u_2 \leq \frac{2}{5} u_1 : n=1 \text{ من اجل} \\ 0 < u_3 \leq \frac{2}{5} u_2 : n=2 \text{ من اجل} \\ 0 < u_4 \leq \frac{2}{5} u_3 : n=3 \text{ من اجل} \\ \vdots \\ 0 < u_n \leq \frac{2}{5} u_{n-1} : n-1 \text{ من اجل} \end{cases}$$

بضرب المتباينات (علما أنها موجبة) نجد : u_1 ومنه $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1-1+1}$ ومنه $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج- استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

حل التمرين 18 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

① أ) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;1]$

- المشتقة واتجاه التغير : من أجل كل $x \in [0;1]$

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$$

بما أن $f'(x) > 0$ فان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

- جدول التغيرات :

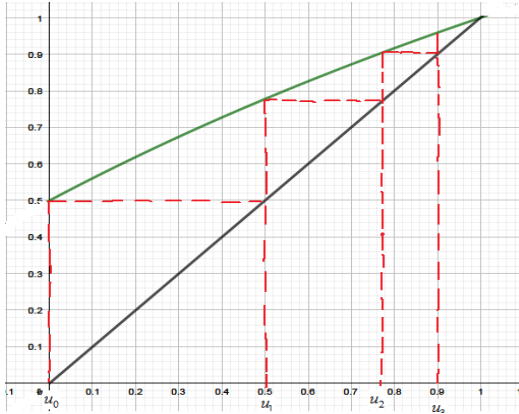
x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1

ب) استنتاج أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$:

$x \in [0;1]$ معناه $0 \leq x \leq 1$ وبها أن f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ ومنه $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

أي $0 \leq f(x) \leq 1$ إذن $f(x) \in [0;1]$.

ج) التمثيل البياني للمنحنى (C) :



② أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .

ب) التخمين حول اتجاه وتقارب المتتالية (u_n) :

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة .

③ أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل $n=0 : 0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 \leq u_n \leq 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$)

لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ تكافئ : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ومنه $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$.

ب) بيان ان $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

• استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن $0 \leq u_n \leq 1$ فإن $1-u_n \geq 0$ و $u_n+2 > 0$ ومنه $(1-u_n)(u_n+2) \geq 0$ و $u_n+4 > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج) نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 .

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{\frac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2u_n-2}{u_n+4} \times \frac{u_n+4}{5u_n+10} \\ &= \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5} v_n \end{aligned}$$

• حساب الحد الاول : $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ لنا } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } q = \frac{2}{5}$$

• تعيين عبارة u_n بدلالة n :

لنا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ تكافئ : $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$ تكافئ $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$ تكافئ $1 + 2v_n = u_n - v_n u_n$

تكافئ $1 + 2v_n = u_n(1 - v_n)$ وبالتالي $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

بالتعويض نجد : $u_n = \frac{1 + 2\left(\frac{-1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

ج) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

حل التمرين 19 :

(1) لنا : $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}}$

أ- حساب الحدود :

$$u_3 = \sqrt{\frac{1 + u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{2} \text{ و } u_2 = \sqrt{\frac{1 + u_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}^2}{2}} = \sqrt{3} \text{ و } u_1 = \sqrt{\frac{1 + u_0^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 3^2}{2}} = \sqrt{5}$$

البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 3 > 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n + 1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ تكافئ : $u_n^2 > 1$ تكافئ : $\frac{1 + u_n^2}{2} > \frac{2}{2}$ تكافئ : $\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} > 1$ تكافئ : $u_{n+1} > 1$.

اذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 + u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 + u_n^2 - 2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 - u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1 - u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

لنا $u_n > 1$ تكافئ : $u_n^2 > 1$ تكافئ : $-u_n^2 < -1$ تكافئ : $1 - u_n^2 < 0$

ولنا : $2\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right) > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ج- استنتاج ان (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

حساب النهاية : بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

ومنه : $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ تكافئ : $\frac{1+l^2}{2} = l^2$ مع $l \geq 0$ تكافئ : $1+l^2 = 2l^2$ تكافئ : $l^2 = 1$

تكافئ : $l = 1$ (مقبول) أو $l = -1$ (مرفوض) . ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$

أ- بيان انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$

من أجل $n=0$ لدينا : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ ولنا : $v_1 = u_1^2 - 1 = \sqrt{5}^2 - 1 = 4$ ومنه : $2v_1 = v_0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن أنه : $2v_{n+2} = v_{n+1}$)

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+2} = 2(u_{n+2}^2 - 1) = 2\left(\sqrt{\frac{1+u_{n+1}^2}{2}} - 1\right) = 2\left(\frac{1+u_{n+1}^2 - 2}{2}\right) = u_{n+1}^2 - 1 = v_{n+1}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

لنا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$ تكافئ : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حساب v_0 : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

ج- كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ تكافئ : $u_n^2 = v_n + 1$ تكافئ : $u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{8 \times 0 + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

(3) حساب المجموع :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ &= v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1 \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= v_0 \times \frac{1 - (q)^{n-0+1}}{1 - q} + 1 \times (n - 0 + 1) \\ &= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \times (n + 1) \\ &= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + (n + 1) \\ &= 16 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n + 1) \end{aligned}$$

- حساب T_n :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 \times 8 + 2 \times 8 \times \frac{1}{2} + \dots + 2^n \times 8 \times \frac{1}{2^n} \\ &= 8 + 8 + \dots + 8 \\ &= 8 \times (n - 0 + 1) \\ &= 8n + 8 \end{aligned}$$

حل تمرين 20:

1- حساب الحدود:

$$u_4 = \frac{1}{3} \times u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81}, \quad u_3 = \frac{1}{3} \times u_2 + 2 - 2 = \frac{-14}{27}, \quad u_2 = \frac{1}{3} \times u_1 + 1 - 2 = \frac{-14}{9}, \quad u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 + 0 - 2 = \frac{-5}{3}$$

2- أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ فان $u_n \geq 0$:
نسمي الخاصية من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $p(n): u_n \geq 0$.

من اجل $n = 4$: $u_4 = \frac{67}{81} \geq 0$ محققة.

نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا: $u_n \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3}u_n \geq 0$(1)

بما ان $n \geq 4$ فان $n-2 \geq 2$ ومنه $n-2 \geq 0$(2)

من (1) و(2) نجد: $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0$ ومنه $u_{n+1} \geq 0$.

ومنه: $p(n+1)$ صحيحة.

اذن: الخاصية $p(n)$ صحيحة.

ب) استنتاج انه من اجل كل $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ اذن $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$

لدينا من اجل كل $n \geq 4$ فان $u_n \geq 0$ معناه من اجل $n \geq 5$ فان $u_{n-1} \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3}u_{n-1} + n \geq n$

يكافئ $\frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$ ومنه $u_n \geq n - 3$

ج) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا $u_n \geq n - 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3 = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3- لدينا: $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n - \frac{15}{2} = \frac{-2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

- حساب الحد الاول :

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = \frac{-25}{2}$$

ب - كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

لدينا $v_n = \frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومن جهة اخرى لنا $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ ومنه $\frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

$$2u_n = \frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2} \text{ تكافئ } u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

④ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} = \frac{-25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{-75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

- حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ تكافئ $2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$ تكافئ $u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ ومنه :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \frac{-1}{2}v_0 + \frac{3}{2} \times 0 - \frac{21}{4} + \frac{-1}{2}v_1 + \frac{3}{2} \times 1 - \frac{21}{4} + \dots + \frac{-1}{2}v_n + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4} \\ &= \frac{-1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \left(\frac{3}{2} \times 0 - \frac{21}{4} + \frac{3}{2} \times 1 - \frac{21}{4} + \dots + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4}\right) \\ &= \frac{-1}{2}T_n + \frac{n-0+1}{2} \left(-\frac{21}{4} + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4}\right) \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{-75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{n+1}{2} \left(\frac{6n-42}{4}\right) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{2} \left(\frac{3n-21}{2}\right) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4} \end{aligned}$$

حل التمرين 21 :

1- أ) دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0; +\infty[$: من اجل كل $x \in [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{2(x^2+1) - 2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

بما ان $2 > 0$ و $\sqrt{x^2+1} > 0$ و $x^2+1 > 0$ فان الدالة f متزايدة تهاما على $[0; +\infty[$.

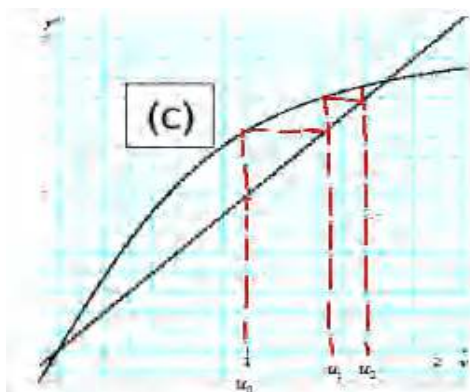
(ب) بيان أنه إذا كان $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$:

لدينا : $x \in [1; \sqrt{3}]$ معناه $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ وبما أن f متزايدة تماماً على $[1; \sqrt{3}]$ فإن $f(1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$

ومنه $2 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ أي $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ ومنه $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

-2 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{Q}$ كمايلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) تمثيل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل .



(ب) اعطاء تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ومتقاربة.

-3 (أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

نسمي الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$: $p(n)$.

من أجل $n=0$: $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ محققة .

نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ وبما أن f متزايدة تماماً على $[1; \sqrt{3}]$ فإن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$

أي $2 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ ومنه $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه : $p(n+1)$ صحيحة

اذن : الخاصية $p(n)$ صحيحة .

(ب) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ تكافئ $1 \leq u_n^2 \leq 3$ تكافئ $2 \leq u_n^2 + 1 \leq 4$ تكافئ $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2$ تكافئ $-2 \leq -\sqrt{u_n^2 + 1} \leq -\sqrt{2}$

تكافئ $0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2 - \sqrt{2}$ ومنه $2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \geq 0$ ولنا $u_n > 0$ و $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{Q}$.

(ج) استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ فهي متقاربة .

-4 (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

(أ) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}\right)^2}{3 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}\right)^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}}{3 - \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}}{\frac{3u_n^2 + 3 - 4u_n^2}{u_n^2 + 1}} = \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1} = \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1} \times \frac{u_n^2 + 1}{3 - u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \times \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = 4v_n$$

- حساب الحد الاول :

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

ب (كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 4^n$$

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ تكافئ $v_n(3 - u_n^2) = u_n^2$ تكافئ $3v_n - v_n u_n^2 = u_n^2$ تكافئ $3v_n = u_n^2 + v_n u_n^2$

تكافئ $3v_n = u_n^2(1 + v_n)$ تكافئ $u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n}$ ومنه $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}}$

وبالتالي: $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} = \sqrt{\frac{3 \times \left(\frac{4^n}{2}\right)}{1 + \left(\frac{4^n}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2} \times \frac{2}{2 + 4^n}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}}$

ج (حساب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{4^n \times \left(\frac{2}{4^n} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{2}{4^n} + 1}} = \sqrt{\frac{3}{0 + 1}} = \sqrt{3}$$

-5 حساب P_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)} \\ &= \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} \times \frac{u_1^2}{3 - u_1^2} \times \dots \times \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \\ &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= \frac{4^0}{2} \times \frac{4^1}{2} \times \dots \times \frac{4^n}{2} \\ &= \frac{4^0 \times 4^1 \times \dots \times 4^n}{2^{n-0+1}} \\ &= \frac{4^{0+1+\dots+n}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(2^2)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^{n+1}} = 2^{n^2+n-(n+1)} \\ &= 2^{n^2-1} \end{aligned}$$