

مذكرة رقم 01 : نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي / مالا نهاية

مذكرة رقم 02 : نهاية منتهية عند مالا نهاية

مذكرة رقم 03 : النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

مذكرة رقم 04 : عمليات على النهايات

مذكرة رقم 05 : المستقيم المقارب المائل

مذكرة رقم 06 : إزالة حالة عدم التعيين



إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

merouaninardjiss@gmail.com

profmerouani

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات

0770349020

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

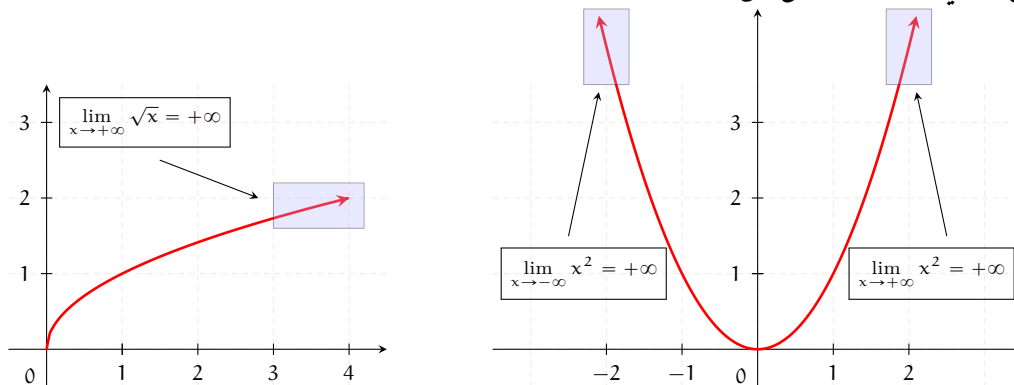
المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي / مالا نهاية

المفاهيم الأولية حول الدوال العددية.

الصفاءات المسنوعة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
الصفاءات المسنوعة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
د5	نشاط 01 صفحة 110 1 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي: تعريف القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 هي $+\infty$ تعني جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيمة قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ مثال لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ نلاحظ انه كلما اقترب x من 2 بالقدر الكافي إلا و أخذ $f(x)$ قيمة كبيرة جدا، نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f لما يؤول x إلى 2 هي $+\infty$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$	الانطلاق البناء و الترسيع
د30	مبرهنة نقبل دون برهان النتيجة التالية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$ مثال $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ 2 نهاية غير منتهية عند مالا نهاية: تعريف القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني انه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي B بحيث : إذا كان $x > B$ ($x < -B$) يكون $f(x) > A$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	

التمثيل البياني والنهيات لكل من الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$



البناء
و
التزيين

خصائص:

- 1 النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)
- 2 النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحد لأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad 2$$

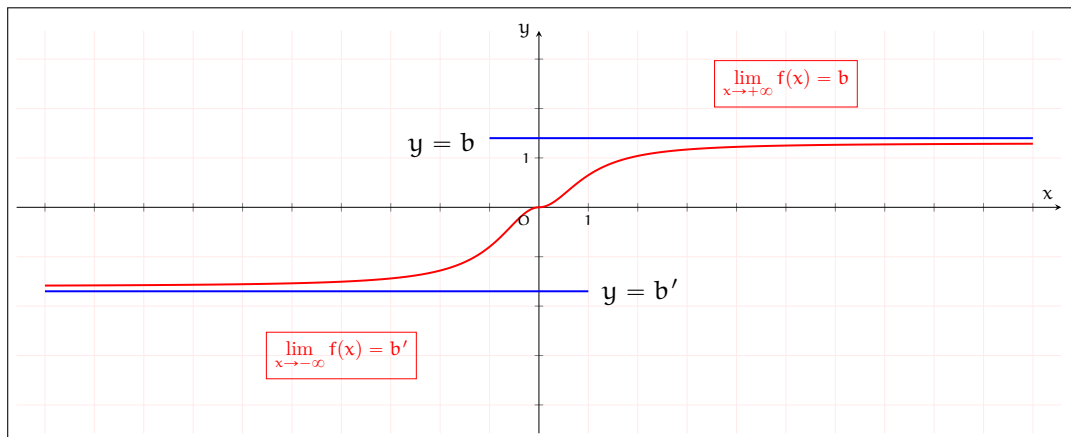
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad 3$$

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

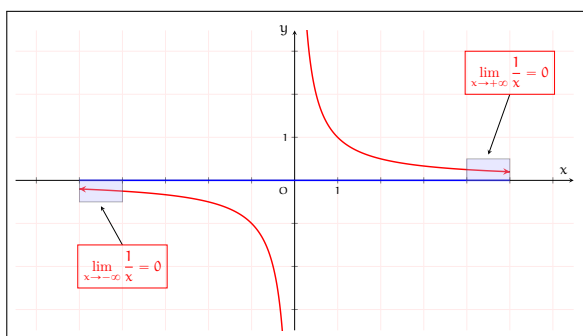
المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : نهاية منتهية عند مالا نهاية

المفاهيم : النهايات : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الصفاءات : النهايات : حساب نهاية دالة عندما يتؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
الصفاءات : النهايات : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
د5	نشاط 04 صفحة 110 1 نهاية منتهية عند مالا نهاية: تعريف القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ هي b تعني جعل قيم $f(x)$ قريبة جدا من b بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيمة قريبة كبيرة جدا و نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ مثال لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ * نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيمة قريبة من العدد 3 بالقدر الذي نريد شريطة ان يأخذ x قيمة موجبة جد كبيرة نقول في هذه الحالة ان نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي 3 ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ * و نلاحظ كذلك أن $f(x)$ تأخذ قيمة قريبة من العدد 3 بالقدر الذي نريد شريطة ان يكون x سالبا ويأخذ x قيمة كبيرة جدا ، نقول في هذه الحالة ان نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي 3 ونكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$	الانطلاق البناء و الترسيع
د30	مبرهنة a عدد حقيقي. نقبل دون برهان النتائج التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+a} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+a} = 0$ 2 التفسير البياني لنهاية منتهية عند مالا نهاية: المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل: تعريف (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم و b عدد حقيقي، القول أن مستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$)	



مثال



ليكن التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$
 لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$
 (محور القواصل) مقارب لمنحنى الدالة
 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

المفاهيم : النهايات : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الصفحات : المسند : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0
الأمثلة : المسند : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
د5	نشاط 02 صفحة 110 1 النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند عدد حقيقي: تعريف القول أن نهاية دالة f عند x_0 بقيم كبرى (النهاية من اليمين) هي $+\infty$ يعني انه يمكن جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي حيث $x > a$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ تعريف القول أن نهاية دالة f عند x_0 بقيم صغرى (النهاية من اليسار) هي $-\infty$ يعني انه يمكن جعل قيم $f(x)$ صغيرة جدا بالقدر الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي حيث $x < a$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ملاحظة يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة ك : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ مثال المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-2}$ نلاحظ أنه إذا أخذ x قيما قريبة من العدد 2 من جهة اليمين بالقدر الذي نريد فإن $f(x)$ تأخذ قيم قريبة من $+\infty$ بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ نلاحظ أنه إذا أخذ x قيما قريبة من العدد 2 من جهة اليسار بالقدر الذي نريد فإن $f(x)$ تأخذ قيم قريبة من $-\infty$ بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$	الانطلاق البناء و الترسيع
د30		

و حد لمجموعة التعريف نقبل دون برهان النتيجة التالية : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} = +\infty$$

② التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:

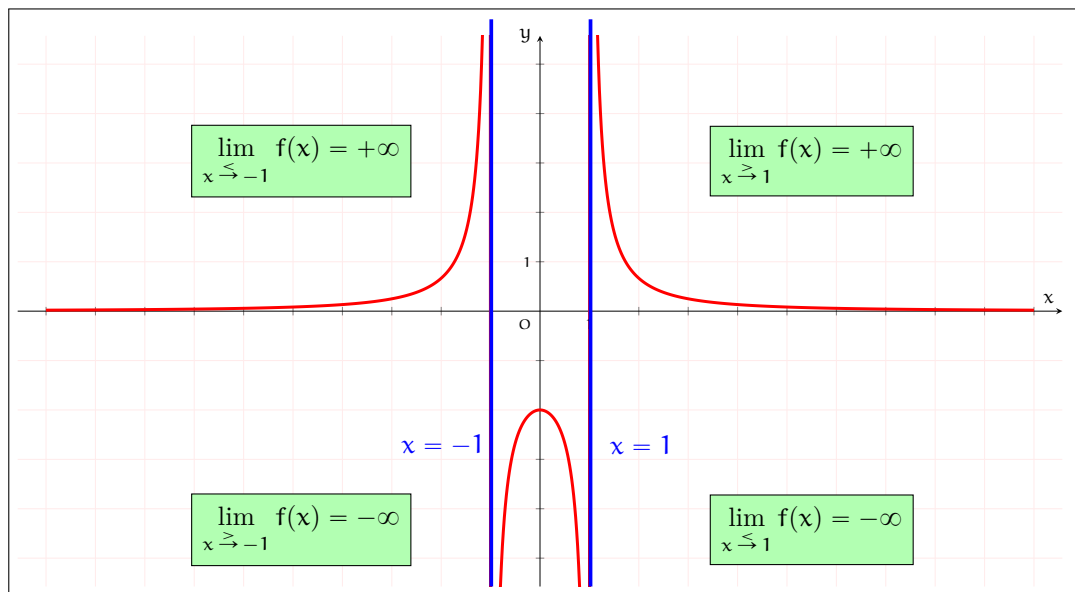
المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الترتيب:

تعريف

(C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، و a عدد حقيقي، إذا كانت النهاية (النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور الترتيب ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور الترتيب) للمنحنى (C_f) .

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كيلي : $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$



ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : عمليات على النهايات.

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الصفاءات المستعملة : استعمال المبرهنات الأولية للنهايات , حساب نهاية دالة بإزالة حالة عدم تعيين .
المصادر المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل																																																																																										
5د	تذكير ملاحظات 1 يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف. 2 إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 3 إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة. 4 يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$	الانطلاق البناء و الترسيخ																																																																																										
30د	مبرهنات أولية على النهايات : f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية. نهاية مجموع دالتين : <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$</td><td>$L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$</td><td>$L + L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>$-\infty$</td></tr></table> نهاية جداء دالتين : <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L > 0$</td><td>$L > 0$</td><td>$L < 0$</td><td>$L < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$</td><td>$L'$</td><td>$\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \times g(x)]$</td><td>$L \times L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table> نهاية حاصل قسمة دالتين : <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$</td><td>$L' \neq 0$</td><td>$\pm \infty$</td><td>$L' > 0$</td><td>$L' > 0$</td><td>$L' < 0$</td><td>$L' < 0$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$\frac{L}{L'}$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table>	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \times g(x)]$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$L' \neq 0$	$\pm \infty$	$L' > 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																																																																						
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$																																																																																						
$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$																																																																																						
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0																																																																																		
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																																																																		
$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \times g(x)]$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت																																																																																		
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$																																																																																	
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$L' \neq 0$	$\pm \infty$	$L' > 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																																																																	
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت																																																																																	

نهاية مقلوب دالة:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	0^-	0^+	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

ملاحظة هامة

< تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)
< توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $0 \times \infty$ ، $+\infty - \infty$

مثال

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 + 3x^2$
* حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$ (حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$)

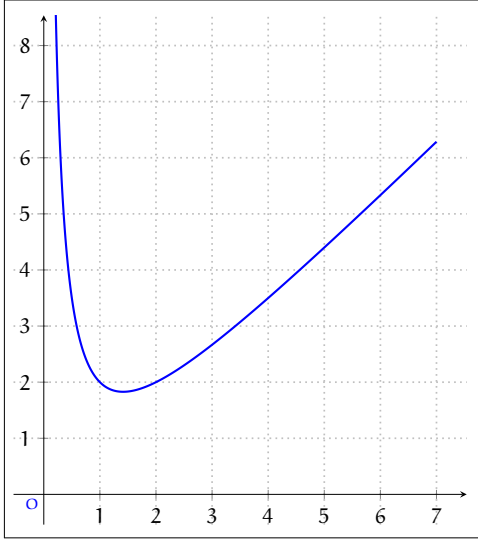
إزالة حالة عدم التعيين

لدينا $f(x) = 2x^3 + 3x^2 = x^3 \left(2 + \frac{3}{x}\right)$
بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2$ فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : المستقيم المقارب المائل .

المفاهيم الأولية حول الدوال العددية.
الصفاءات المستقيمة : تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب .
الاهوار المستقيمة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
د5	نشاط مقترح لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ ، المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$  * لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x, y)$ نقطة من (Δ). - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ فإن : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$ - أحسب بدلالة x المسافة MP - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} MP$ ، ماذا يمكنك القول عن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y]$ ؟ - في نفس المعلم أرسم المستقيم (Δ) ، ماذا تلاحظ؟ المستقيم المقارب المائل : تعريف (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ على الترتيب.	الانطلاق
د30	ملاحظة هامة إذا كانت f و g دالتين بحيث : $f(x) = (ax + b) + g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ يكون مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ نفس الملاحظة لما يؤول x يؤول $(-\infty)$.	البناء و الترسيع

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ بـ : $f(x) = x + 1 \frac{2}{x+2}$ بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لمحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty; 2[$ بـ : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x - 2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $] -\infty; 2[$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

3 إستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : إزالة حالة عدم التعيين

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
العمليات : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيين .
المصادر : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
15د	تذكير ③ نهايات بعض الدوال المألوفة : <u>نهاية دالة كثير حدود</u> مبرهنة نهاية دالة كثير حدود عند المالا نهاية $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) <u>نهاية دالة ناطقة</u> مبرهنة نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) <u>نهاية دالة الجذر تربيعي</u> مبرهنة f دالة موجبة و l عدد حقيقي موجب إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ مثال 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x - 2}{2x}} = \sqrt{2}$ و منه نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 2}{2x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$	الانطلاق

4 إزالة حالات عدم التعيين:

دراسة مثال 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty)$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2} = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

و منه نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

دراسة مثال 02 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; -1]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3} + 2x - 2$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x - 2)(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x + 2)}{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 7}{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 1}{-2x(\sqrt{1} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(8 + \frac{1}{x})}{-2x(\sqrt{1} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$ حيث $(a = \alpha)$

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$ حيث $(\sqrt{a} = |\alpha|)$

نزيل حالة عدم تعيين بالضرب في المرافق.

دراسة مثال 03 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[\frac{3}{2}; +\infty)$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{2x - 3} - 3x + 2$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

• الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x+2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

إذن

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} - 3x + 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2} \right)} - 3x + 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} - 3x + 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} - 3 + \frac{2}{x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

دراسة مثال 04 :

لتكن الدالة f المعرفة على $] -\infty; 1]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{4x^2-3} + x - 2$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

• الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{3}{x^2} \right)} + x - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\left(4 - \frac{3}{x^2} \right)} + x - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{\left(4 - \frac{3}{x^2} \right)} + 1 - \frac{2}{x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax+b} - \alpha x + \beta$ $\Rightarrow$
إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha x + \beta$ حيث $(\sqrt{a} \neq |\alpha|)$ نزيل حالة عدم تعيين باستخراج x كعامل مشترك.

دراسة مثال 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ كما يلي : $\frac{x^2-1}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

• الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ إزالتها

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 2\end{aligned}$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ إذا كانت الدالة f تتضمن كثيرات حدود نقوم بتحليل البسط و المقام على الشكل $f(x) = \frac{(x-a)(\dots\dots)}{(x-a)(\dots\dots)}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

إذا كانت الدالة f تتضمن جدرا نقوم بالضرب في المرافق $\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}} \times f(x)$ ثم نختزل العوامل المشتركة

دراسة مثال 06 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ * أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3}-2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$