



ملخص شامل في المتتاليات العددية

السنة الدراسية : 2020-2021

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متزايدة تماماً.

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متناقصة إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متناقصة تماماً.

⚡ ملاحظة هامة :

1. كل متتالية رتيبة إبتداء من رتبة معينة تكون رتيبة.
2. أحيانا دراسة إشارة الفرق لا تكون سهلة فلجأ إلى فكرة ثانية.

إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ذات حدود موجبة لدراسة رتابتها يمكن مقارنة النسبة التالية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماماً.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

4. طبيعة المتتالية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية. إذا وجد عدد l يحقق الشرط

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \text{ فإن هذا العدد وحيدٌ ونسميه نهاية المتتالية}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ونقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب من l أو نقول إنها متقاربة ونهايتها l .

أما إذا لم تتقارب متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ فنقول إنها متباعدة. إن تعيين طبيعة متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يعني دراسة تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة :

1. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

2. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل

1. تعريف المتتالية : لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة غير خالية. نسمي متتالية في $\mathcal{E}$ كل تطبيق u منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) ومستقره $\mathcal{E}$. ونكتب :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

⚡ نرمز عادة لهذه المتتالية ب : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) اختصاراً. يدعى العنصر u_n بالحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

⚡ إذا كانت $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ عندئذ نسمي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بالمتتالية العددية. إنها الحالة التي سندرسها طوال هذا الفصل.

2. المتتالية المحدودة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \alpha$$

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأسفل إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \beta$$

3. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل، أي :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq \gamma$$

3. المتتالية الرتيبة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متزايدة إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$$



فإنها متقاربة.

فكرة جميلة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متاليتين حقيقتين.

1. إن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذا وفقط إذا

• كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$

2. إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

3. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة وكانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

4. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق الشرط $u_n \geq \alpha > 0$ مهما كان

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ وكان } n_1 \leq n$$

$$\text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$$

5. إذا كان $v_n \leq u_n$ مهما كان العدد $n_1 \leq n$ ، وكان

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

مبرهنة وتعريف :

نقول إن المتاليتين الحقيقتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متجاورتان إذا تحققت الشروط :

• المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة والمتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

• نتقارب المتالية $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من 0.

إن أي متاليتين متجاورتين متجاورتان ولهما النهاية نفسها.

مثال أول : المتاليتان $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ متجاورتان. فعلا :

المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدة، لأن :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة، لأن :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n + \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

وكذلك لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n!} \right) = 0$$

لإثبات أن متالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي D (أو محدودة من الأعلى بعدد G) يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية :

• استعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \geq D$ (أو لإثبات $u_n \leq G$).

يمكن تأجيل البرهان بالتراجع في هذه الفقرة إلى قراءة ثانية.

• المقارنة بين u_n و D (أو u_n و G) بدراسة إشارة الفرق $u_n - D$ (أو $u_n - G$).

• إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متاليتين متقاربتين، ولنضع :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

1. إن المتالية $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $l + \lambda l'$ مهما كان العدد λ من $\mathbb{R}$.

2. إن المتالية $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $|l|$.

3. بافتراض أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$ يكون $l \leq l'$.

4. إن المتالية $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $l.l'$.

5. بافتراض أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$ وأن $l \neq 0$ تكون المتالية $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{1}{l}$.

6. إذا كانت $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ متالية جزئية من المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$

ملاحظة هامة :

لا تبقى الخاصية 3. صحيحة إذا استبدلنا بالمترابحة $\leq$ مترابحة تأمة $<$. فعلى سبيل المثال إذا تأملنا المتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بالعلاقين :

$$v_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

وجدنا أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

ومع ذلك فإن :



مثال ثان : من السهل أن نثبت أن المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ و $(\beta_n)_{n \geq 1}$ المعرفتين كما يأتي :

$$\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2020n^{2020}} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2021}}$$

أنهما متجاورتان.

مبرهنة :

لتكن المتتاليات الحقيقية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نفترض أن :

المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تسعيان إلى العنصر α من $\mathbb{R}$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $u_n \leq v_n \leq w_n$.
حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$

مثال مهم :

لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة ب : $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k}$ لدينا :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{n}{n^3 + n} \leq \frac{n}{n^3 + k} \leq \frac{n}{n^3 + 1}$$

بأخذ المجموع نجد :

$$\frac{n^2}{n^3 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k} \leq \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

بما أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + n} = 0$$

عملاً بمتقضى مبرهنة السابقة، نجد أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

4. المتتاليات التراجعية (أو التدرجية)

تعريفه :

نسَمي متتالية تراجعية كل متتالية يعطى حدها من الرتبة $n + 1$ بدلالة حد أو عدة حدود من الرتبة أقل من $n + 1$. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات العددية عندما يكون الحد من الرتبة $n + 1$ معطى بدلالة الرتبة n على النحو التالي :

$$\begin{cases} u_0 \in B \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty, +\infty\}^1$$

مع B جزء من $\mathbb{R}$ و $f : B \rightarrow B$ دالة.
سنناقش الحالتين التاليتين : 1. إذا كانت الدالة f متزايدة فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة. هنا نميز حالتين وهما :

• متزايدة إذا كان $u_0 \leq u_1$.

• متناقصة إذا كان $u_1 \leq u_0$.

2. إذا كانت الدالة f متناقصة فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست رتيبة، المتتاليتان الجزئيتان الأساسيتان رتبتان. نميز حالتين وهما :
• إذا كان $u_0 \leq u_2$ كانت $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

• إذا كان $u_2 \leq u_0$ كانت $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

⚡ ملاحظة هامة :

إذا كانت f دالة مستمرة و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l فإن l يحقق العلاقة : $f(l) = l$.

أي أن النهاية l تنتمي إلى مجموعة النقاط الصامدة ل f .

تفيد هذه الملاحظة أن البحث عن l يعود إلى حل المعادلة $f(l) = l$ ، إن هذه المعادلة تقدم النهايات الممكنة للمتتالية. فعليه إن لم تقبل هذه المعادلة حلوًا، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير متقاربة. وبالعكس، إذا قبلت المعادلة حلوًا عدة، فإن المسألة تعود إلى النظر في إمكانية تمتع المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بأحداها نهاية لها.

وقد يمكن للمعادلة أن تقبل حلوًا دون أن تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

5. المتتالية الحسابية :

نقول أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n يتحقق إحدى العلاقات :

$$u_{n+1} - u_n = r \quad \text{•} \quad u_{n+1} = u_n + r \quad \text{•}$$

$\Leftarrow$ العدد الحقيقي r يسمى أساس هذه المتتالية.

$\Leftarrow$ u_0 يسمى الحد الأول لهذه المتتالية.

⚡ ملاحظتان :

1. تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين



حين متابعين ثابتا وهذه النسبة الثابتة تسمى الأساس المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. كل متتالية حسابية تكون معرفة بعددها الأول وأساسها أو بحدّها وأساسها.

خاصية مميزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية ذا فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العلاقة الموالية :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

وهذا ما يكافئ : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$.

الآن نسمي هذا الأخير بالقانون الوسيط الحسابي.

ملاحظة مهمة :

تكون الأعداد α, β, γ في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا فقط إذا كان $\alpha + \gamma = 2\beta$.

الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأول u_0 . لدينا من أجل كل عدد طبيعي n العلاقة التالية : $u_n = u_0 + nr$.

ملاحظة مهمة :

إذا كان الحد الأول هو u_1 ، يكون لدينا : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
بصفة عامة : إذا كان u_m و u_n حين من متتالية حسابية أساسها r ، فإن : $u_n = u_m + (n-m)r$ (ترتيب m و n غير مهم).
اتجاه تغير متتالية حسابية :

نفترض جدلاً أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية. فإن اتجاه تغير متتالية حسابية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يتبع إشارة أساسها r ، بعبارة أخرى نميز ثلاث حالات وهي :

1. إذا كان $r > 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

2. إذا كان $r < 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

3. إذا كان $r = 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأول u_0 .

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

$\leftarrow u_0$ الحد الأول للمجموع S_n .

$\leftarrow u_n$ الحد الأخير للمجموع S_n .

$\leftarrow (n+1)$ عدد حدود المجموع S_n .

ملاحظة :

1. لدينا : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

2. ليكن m عدد طبيعي، يكون لدينا :

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_n = \frac{(n-m+1)(u_m + u_n)}{2}$$

5. المتتالية الهندسية :

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي وليكن q بحيث، من أجل كل عدد طبيعي n يحقق إحدى العلاقتين :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{أو} \quad u_{n+1} = qu_n$$

$\leftarrow p$ نسمي q أساس المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ملاحظة :

1. تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا فقط إذا كان حاصل قسمة حين متابعين ثابت.

2. تكون المتتالية هندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.

3. إذا كان $u_0 = 0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n = 0$.

4. إذا كان $q = 0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا $u_n = 0$.

5. إذا كان $q = 1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا $u_n = u_0$.

خاصية مميزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية إذا فقط إذا كان، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2$$

الآن نسمي هذا الأخير بالقانون الوسيط الهندسي.

ملاحظة :

تكون الأعداد α, β, γ في هذا الترتيب ثلاث حدود متتالية هندسية إذا فقط إذا كان : $\alpha\gamma = \beta^2$.

الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي q



وحدها الأول u_0 . من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_n = u_0 q^n$$

⚡ ملاحظة قيمة :

إذا كان u_1 هو الحد الأول، يكون لدينا : $u_n = u_1 q^{n-1}$.
بصفة عامة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتالية هندسية أساسها q ، فإن : $u_n = u_m q^{n-m}$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتجاه تغيير متتالية هندسية :

لنفترض أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية. الآن لنلخص اتجاه تغيير متتالية هندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ونرمز للأساس المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، بالرمز q ، ولنفترض أيضا $u_0 \neq 0$ (تم مناقشة حالة $u_0 = 0$ سابقاً) ولنناقش معاً الحالات التي تصادفنا :

1. إذا كان $q = 0$ ، من هذا الأخير نلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مستقرة.
2. إذا كان $q < 0$ ، وهذا ما يوحى لنا بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير رتيبة.
3. إذا كان $q > 0$ ، فاتجاه تغيير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يتبع إشارة المقدار $u_0(q - 1)$ في هذه الحالة سنناقش معاً ثلاث حالات وهي :

- إذا كان $u_0(q - 1) > 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.
- إذا كان $u_0(q - 1) < 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.
- إذا كان $u_0(q - 1) = 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 .

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1 \\ (n + 1) u_0, & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$u_0 \leftarrow P$: الحد الأول للمجموع S_n .

$(n + 1) \leftarrow P$: عدد حدود المجموع S_n .

⚡ ملاحظة :

لنفترض أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$.

$$1. \text{ لدينا دوماً : } u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2. ليكن m عدد طبيعي ويحقق أيضا $m < n$ ، عندئذ يكون لدينا العلاقة التالية :

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_n = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

6. مبدأ الاستدلال بالتراجع :

مسألة : $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n .

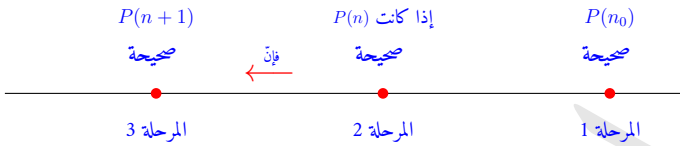
ليكن n_0 عدد طبيعي.

للبهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(k)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $k + 1$ أي $P(k + 1)$.

⚡ ملاحظتان :

1. عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .
2. نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n + 1$.
3. التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري جدا لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة.



متى يُستعمل الاستدلال بالتراجع :

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع على صحة خاصية متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية.



تدريبات في المتتاليات العددية

تمارين رقم : 01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة على النحو التالي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \text{ et } u_1 = \beta, & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ 3u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب القيمة العددية للحددين u_2 و u_3 بدلالة α و β .
2. من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - أ- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta - \alpha)$.
 - ب- بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$.
 - ج- عين عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta - \alpha)$.
 - د- أحسب المجموع S_n بدلالة n ، مع : $S_n = v_2 + v_4 + \dots + v_{n-1}$.
3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا : $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$.
 - ب- استنتج حينئذٍ عبارة u_n بدلالة n .
 - ج- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم : 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $\left[-1, \frac{7}{20}\right]$ كما يلي : $f(x) = -\frac{15}{126x - 89}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة على بحدّها الأول $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. أ- أنقل الشكل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخميناً حول إتجاه تغيير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و تقاربها.

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq \frac{5}{18}$.

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.

3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = 1 + \frac{19}{35 - 126u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارتي u_n و v_n بدلالة n ، واستنتج النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$$S_n = \frac{10}{10 - 36u_0} + \frac{10}{10 - 36u_1} + \dots + \frac{10}{10 - 36u_{2021n}}$$

أحسب S_n ، ثم أوجد النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمارين رقم : 03

نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالصيغة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} a_0 = 0, \text{ et } a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرّف المتتاليتين العدديتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بالعلاقين التاليتين :



$$\omega_n = 3^n \times a_n \quad \text{و} \quad v_n = a_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

1. أحسب الحدود التالية : a_2 ، v_0 و ω_0 .
2. أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها.
ب- حدّد عبارة v_n بدلالة n .
3. أ- أثبت أن المتتالية $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية يطلب تعيين أساسها.
ب- أوجد عبارة ω_n بدلالة n .
4. أحسب بدلالة n المجموعين :
5. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $0 < a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
6. أحسب النهاية الموالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

تمارين رقم : 04

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 , \text{ et } u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب الحدين u_3 و u_4 .
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا : $u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right)^n - \left(\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right)^n \right]$.
3. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرّفتين بما يلي :
$$y_n = \left(\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right)^n \quad \text{و} \quad x_n = \left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right)^n$$

أدرس تقارب المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$.
4. لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعلاقة : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

تمارين رقم : 05

- ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوماً. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f_n(x) = x^{n+1} + x^n + 3x - 2$.
1. ادرس رتبة الدالة f_n على $\mathbb{R}_+$.
 2. بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ قبل حلاً وحيداً α_n في المجال $[0, +\infty[$.
 3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $\alpha_n < \frac{2}{3}$.
 4. أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدة، واستنتج أنها متقاربة.
 5. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $\alpha_n = \frac{2 - \alpha_n^n}{3 + \alpha_n^n}$.
ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا : $\frac{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \alpha_n \leq \frac{2}{3}$ ثم حدد نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.



تمارين رقم : 06

- تكن المتتالية u_n معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n على النحو التالي : $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.
1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $2 - \frac{2}{n+1} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{u_n}$.
 2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.
 3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$ ، ثم أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

تمارين رقم : 07

تكن $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة غير معدومة ولنفترض أن أساسها q .
من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ونكتب للإشارة إلى ذلك (أو كترميز) أن :

$$T = \frac{1}{\mathcal{X}_0} + \frac{1}{\mathcal{X}_1} + \dots + \frac{1}{\mathcal{X}_{n-1}} \quad \text{و} \quad P = \mathcal{X}_0 \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_{n-1}, \quad S = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_{n-1}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا العلاقة التالية $\frac{S}{T} = \mathcal{X}_0^2 q^{n-1}$.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا : $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$.

تمارين رقم : 08

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ ، نضع : $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ وهذا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$.

1. بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n ، حيث أن : $u_n < 1 < v_n$.

2. أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

ب- أدرس رتبة "متزايدة"، متناقصة" المتتالية $(u_n)_{n \geq 3}$ واستنتج حينئذ تقاربها.

- ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3، لدينا العلاقة : $-\frac{2}{n} < u_n - 1 < -\frac{1}{n}$ ، ثم حدّد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- أ- أدرس رتبة المتتالية $(v_n)_{n \geq 3}$ واستنتج أنها متقاربة.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3، لدينا : $1 + \frac{1}{n} < v_n$.

إرشاد بسيط : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3، لدينا : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

ج- برهن أن : $(\forall a > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) : (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.

د- أحسب $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3، لدينا : $v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

هـ- حسب، ما سبق أوجد نهاية المتتالية $(v_n)_{n \geq 3}$.

تمارين رقم : 09

المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$ ، وبين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n$.



- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n - 1 + u_n$ ، وعين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا : $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$ ، ثم استنتج النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n}$.

تمارين رقم : 10

ليكن α عدد حقيقي من المجال $]0, 1[$ ، و n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k \right) - \alpha$$

1. بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n وأن : $0 < x_n < 1$.
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، لدينا دوماً العلاقة : $(x-1)f_n(x) = x^{n+1} - (\alpha+1)x + \alpha$.
- 3-أ. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, 1[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
- ب- استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة وأنها متقاربة.
- ج- بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n$ وحدد نهاية المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بدلالة α .

تمارين رقم : 11

لنفترض n عدد طبيعي. نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$.

1. أحسب a_0 و b_0 .
2. باستعمال مكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$.
- 3-أ. بين أنه من أجل عدد حقيقي t من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، يكون لدينا : $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4} (a_{2n} - a_{2n+2})$.
- ج- بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.
- 4-أ. باستعمال مكاملة بالتجزئة. بين أن : $a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t dt$.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$.
- ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
- 5-أ. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ متقاربة وأن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$.
- ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.



قسم الحلول بالتفصيل

حل تمرين رقم : 01

1. حساب القيمة العددية للحددين u_2 و u_3 بدلالة α و β :

حسب العلاقة التراجعية المذكورة في نص التمرين، وبتعويض المباشر، نجد ما يلي :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_1 + 2u_0}{3} = \frac{2\alpha + \beta}{3} \\ u_3 = \frac{u_2 + 2u_1}{3} = \frac{2\alpha + 7\beta}{9} \end{cases}$$

2. أ- حساب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta - \alpha)$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا العلاقة المعطاة في نص التمرين $v_n = u_{n+1} - u_n$.

حسب العلاقة السابقة يمكننا أن نستنتج جميع حدود المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة حدود المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. من هذا، نجد أن :

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_3 = u_3 - u_2 \end{cases}$$

وبعد التعويض المباشر والتبسيط، نتحصل على : $v_0 = \beta - \alpha$ ، $v_1 = -\frac{2}{3}(\beta - \alpha)$ و $v_3 = \frac{4}{9}(\beta - \alpha)$.

ب- إثبات أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$:

قبل البدء في حل هذا السؤال، لا بأس أن نذكر بالمعلومة التالية: لدينا التكافؤ التالي (ناتج من تعريف المتتالية الهندسية) دوماً صحيحاً :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{R} : v_{n+1} = qv_n \iff (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية هندسية أساسها } q$$

من التكافؤ السابق، يكفي أن نثبت أنه يوجد عدد حقيقي $-\frac{2}{3}$ "يحقق الشرط $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$ ، وهذا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
نبدأ على بركة الله، في الإثبات معاً.

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2u_n}{3} - u_{n+1}$ بعد توحيد المقامات وتبسيط الحدود المتشابهة، نتحصل على : $v_{n+1} = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)$ ، ولما كان : $v_n = u_{n+1} - u_n$ ، نجد : $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$.

بهذا فقط نكون قد أثبتنا أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$.

ج- تعيين عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta - \alpha)$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا العبارة التالية $v_n = v_0 q^n$ ، مع : v_0 هو الحد الأول للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و q أساس للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

لما كان لدينا قيمة الحد الأول $v_0 = \beta - \alpha$ والأساس $q = -\frac{2}{3}$ ، إذن، نجد أن عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكتب

$$v_n = (\beta - \alpha) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$



د- حساب المجموع $S_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1}$ بدلالة n :

لدينا، مما سبق بأن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$ ، $n \geq 2$ $S_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1} = v_2 \frac{1 - q^{n-2}}{1 - q}$

$$S_n = \frac{4}{15} (\beta - \alpha) \left[1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-2} \right] \quad \text{وأخيرا} \quad S_n = \frac{4}{9} (\beta - \alpha) \frac{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-2}}{1 + \frac{2}{3}}$$

3.أ- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$:

. من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا العبارة التي تجمع جميع حدود المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معاً، هي العلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$ ، وعليه، نجد:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1 - u_0 \\ v_1 &= u_2 - u_1 \\ v_2 &= u_3 - u_2 \\ &\vdots \\ v_{n-2} &= u_{n-1} - u_{n-2} \\ v_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \end{aligned}$$

بالجمع طرفاً لطرف، نجد أن:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-2} + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1}$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة، نجد العلاقة المرجوة، وهي: $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$ ، ومنه، نجد:

$$u_n = \alpha + \frac{1}{3} (\beta - \alpha) + \frac{4}{15} (\beta - \alpha) \left[1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-2} \right]$$

ج- استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\alpha + \frac{1}{3} (\beta - \alpha) + \frac{4}{15} (\beta - \alpha) \left[1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-2} \right] \right] = \alpha + \frac{1}{3} (\beta - \alpha) + \frac{4}{15} (\beta - \alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha + \frac{9}{15} (\beta - \alpha) \quad \text{ومنه:}$$

﴿لا تنسوني بالدعاء لي ولوالدي الكريمين - حفظهما الله﴾