

تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شعبة : تقني رياضي

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن7]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $4cm$)

(1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$.

بـ أنشئ (C_f) .

جـ برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$.

(2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

أبرز وجود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب u_1 و u_2 .

بـ مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل وذلك بالاستعانة بـ (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة : $y = x$.

جـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها إنطلاقا من التمثيل السابق .

(3) أبرهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

بـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

جـ تحقق أن : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2} (u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

عين عددا حقيقيا k من المجال $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |u_n - \sqrt{3}|$.

بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن8]

(1) f الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$.

و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

أـ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

بـ أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أرسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

د - بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أـ باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل .

بـ خمن اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

جـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ ، وأن المتتالية (u_n) متزايدة .

استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن $u_n > 1$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة ، وأحسب نهايتها .

(3) ليكن P_n الجداء المعروف كما يلي : $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln u_n$

عبر بدلالة P_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(u_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$

(v_n) المتتالية المعرفة على كما يلي : $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول .

(2) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(4) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$

(1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$

(2) أـ عين اتجاه تغير f

(3) بـ بين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2; e+1]$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

(1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ بما يلي : $h(x) = \sqrt{6x+16}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. (أنظر الشكل)

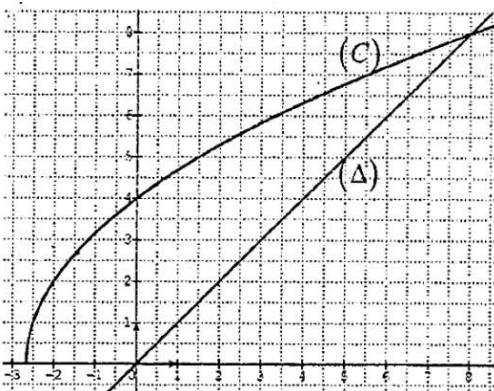
أـ أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

بـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 8$

بـ بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$



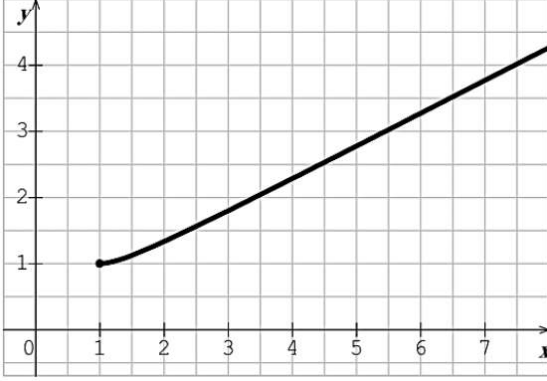
جـ- استنتج اتجاه تغير (u_n) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [7] [إباك 2016] [م2] [ن5]

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(1) بين أن الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

(2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

د- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ- برز تقارب المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول .

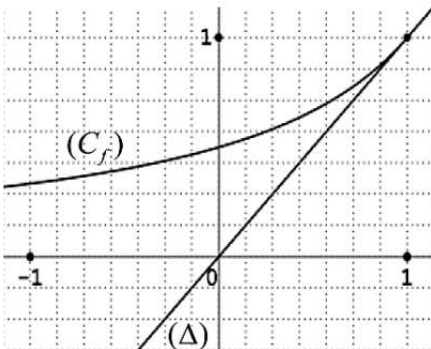
ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

ج- بين أن : $u_n = 1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n}$.

التمرين [8] [إباك 2017] [م1] [ن4]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2-x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و



المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة : $y = x$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0 = -1$ و من أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .
مبرزاً خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{2}{1 - u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ، ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$ حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

(1) أ- بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وعين حدها الأول v_1 بدلالة α .

ب- جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$.

عين قيمة α حيث: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x + 1}$ (e أساس اللوغاريتم النبيري).

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{e}$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{e.u_n + 1}$.

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برز أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$.

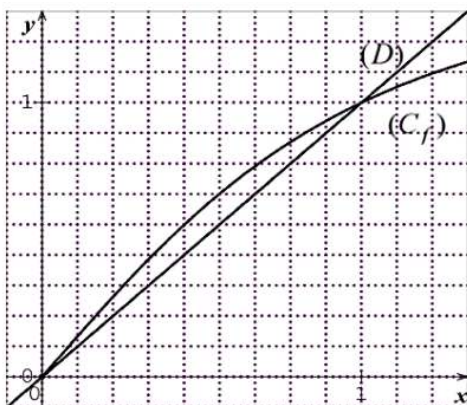
بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n .

(3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x+5}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 بحيث: $u_0 = \frac{1}{2}$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n}$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

(4) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

بـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

كتابة: خالرجاخشنة

نشر يوم 2021/01/20