



مجلة الرائد في الرياضيات



توقعات بكالوريا 2019 بين يديك

شعبة - علوم تجريبية

التحضير الجيد لشهادة

BAC2018-2019



إعداد الأستاذ:

بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

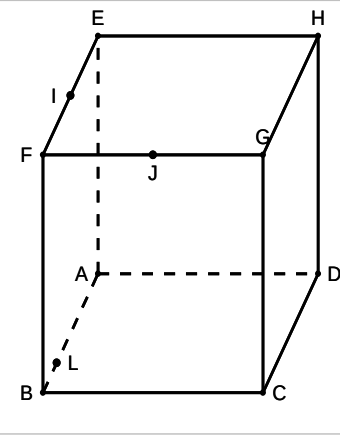
العربي الجزائري Facebook



على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

نعتبر في الفضاء مكعبا $ABCDEFGH$ طول حرفه 1 و $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$ المعلم المتعامد والمتجانس نسمي I و J منتصفي القطعتين $[FE]$ و $[FG]$ على الترتيب والتكن L مرجح الجملة $\{(A;1), (B;3)\}$ واليكن π المستوي ذي المعادلة $4x - 4y + 3z - 3 = 0$ أختار الإجابات الصحيحة من بين الإجابات التالية:



1- إحداثيات النقطة L هي: أ) $(\frac{3}{2}; 0; 0)$ ، ب) $(\frac{3}{4}; 0; 0)$ ، ج) $(\frac{1}{4}; 0; 0)$

2- المستوي π هو: أ) (GLE) ، ب) (LEJ) ، ج) (GFA) .

3- المستوي الذي يشمل النقطة I ويوازي π يقطع المستقيم (FB) في

النقطة M ذات الإحداثيات: أ) $(1; 0; \frac{1}{4})$ ، ب) $(1; 0; \frac{1}{5})$ ، ج) $(1; 0; \frac{1}{3})$.

4- أ) المستقيمان (LE) و (FB) متقاطعان في النقطة N نظيرة M بالنسبة للنقطة B .

- ب) المستقيمان (LE) و (IM) متوازيان. - ج) المستقيمان (LE) و (IM) متقاطعان.

5- حجم رباعي الوجوه $FIJM$ هو: أ) $\frac{1}{36}$ ، ب) $\frac{1}{48}$ ، ج) $\frac{1}{24}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n - 1}$

1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n - 1 < 1$.

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب: $t_n = \ln(u_n - 1)$

أ- بين أن $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$

ج- أحسب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$

التمرين الثالث: (04 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ [الوحدة: 2cm].

1. حل، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $\frac{z-4}{z} = i$ (يكتب الحل على الشكل الجبري).
2. حل، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$ (تكتب الحلول على الشكل الأسّي).
3. لتكن النقط A, B, A', D التي لواحقتها على الترتيب: $a = 2, b = 4, a' = 2i, d = 2 + 2i$.
فسر هندسيًا طوليلة وعمدة $\frac{d-b}{d}$ واستنتج طبيعة المثلث ODB .
4. لتكن النقطتان E و F اللتان لاحقتاهما $e = 1 - i\sqrt{3}$ و $f = 1 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.
ما طبيعة الرباعي $OFAE$ ؟ علل.
5. لتكن (C) الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2، و (C') الدائرة ذات المركز A' ونصف القطر 2؛ وليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $+\frac{\pi}{2}$.
(أ) E' إلى صورة النقطة E بالدوران r . عيّن e' لاحقة النقطة E' . (ب) بيّن أن E' تنتمي إلى (C') .
(ج) تحقق أن: $(e' - d) = (\sqrt{3} + 2)(e - d)$ ، واستنتج أن النقط E, E', D على استقامة واحدة.
6. لتكن D' صورة النقطة D بالدوران r ؛ برهن أن المثلث $EE'D'$ مثلث قائم.

التمرين الرابع: (07 نقط)

- f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ تمثيلها البياني في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$
- 1) أدرس تغيرات f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة
 - أثبت أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.
 - 2) احسب: $f(-x) + f(x)$ ما تستنتج؟
 - 3) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]-1, -0.5[$
 - 4) أثبت أن (C) يقبل مماسا (d) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ويمس المنحنى (C) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما. أوجد معادلة للمماس (d) .
 - 5) أرسم (d) ثم (C) .
 - 6) ناقش، بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$.
 - 7) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ و (C') تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ- بين أن h زوجية.
ب- دون دراسة تغيرات h ، أرسم (C') علل ذلك.
 - 8) بين أن: $A(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4} \text{ cm}^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = -1$ و $x = \alpha$ و $y = 1$ حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم جد حصرا للعدد $A(\alpha)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ؛ [وحدة الطول 4cm].

لتكن النقطتان A، B اللتان لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = -i$ ؛ $z_B = e^{\frac{5\pi i}{6}}$.
(1) اكتب z_A على الشكل الأسّي و z_B على الشكل الجبري.

(2) ليكن الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-2\pi}{3}$. و C صورة النقطة B بالدوران R.
(أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R.

(ب) بين أن لاحقة النقطة C هي: $z_C = e^{\frac{\pi i}{6}}$ ، ثم اكتب z_C على الشكل الجبري.

(ج) بين أن النقط A، B، C تنتمي إلى دائرة واحدة (Γ) مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3-أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

(ج) θ عدد حقيقي، عيّن المجموعة (E) للنقط $M(z)$ بحيث: $iz = 1 + e^{i\theta}$ ؛ عندما θ يسمح $\mathbb{R}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، ليكن (P) مستو معادلته:

$$x - 3y + z - 3 = 0 \text{ والنقط: } A(2; -1; 2), B(2; 0; 1), C(0; -3; -2), S(-1; 1; 2)$$

1-تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2-أثبت أن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين A و C له تمثيل وسيطي:

أ-أثبت أن المستوي (P) والمستقيم (Δ) منفصلان.

ب-احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، ثم احسب مساحة المثلث ABC.

ج-اكتب معادلة المستوي (Q) الذي يشمل النقطة B ويحوي المستقيم (Δ).

(3-أ) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (d) يشمل النقطة S ويعامد المستوي (Q)

(ب) تحقق أن النقطة B مسقط عمودي للنقطة S على المستوي (Q).

(ج) احسب حجم رباعي الوجوه SABC.

(4-أ) بين أن معادلة المستوي (SAB) هي: $2x + 3y + 3z - 7 = 0$

(ب) احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (SAB)، ثم استنتج مساحة المثلث SAB.

التمرين الثالث: (04 نقط)

I) يحتوي وعاء على n كرة بيضاء ، حيث : $(n \geq 2)$ و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :
1) ما احتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

2-أ) بين أن احتمال سحب كرتين من نفس اللون هو $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}$

ب) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ ، ثم فسّر النتيجة المحصل عليها .

II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع 30DA ، إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب 40DA ، وإذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب 5DA . نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أولا و المبلغ الذي يكسبه .
ليكن المتغير العشوائي X هو الربح الجبري للاعب :
أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الرابع: (07 نقط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \ln(4e^x + e^{-x}) - 2\ln 2$.

يرمز (C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \ln(4e^{2x} - 1) - \ln(4e^{2x} + 1)$.

ج) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

2.أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$.

ج) استنتج وجود مستقيم مقارب آخر (Δ') مائل للمنحنى (C_f) عند $(-\infty)$ يطلب تعيينه .

3. حل المعادلة $f(x) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ و فسر النتيجة بيانيا

4. ارسم كلا من المستقيمين (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

II- لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = f(-|x|)$ و اليكن (C_g) تمثيلها البياني

1. بين أن الدالة g زوجية .

2. بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أرسم المنحنى (C_g) .

3. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = m + 2$.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقاط A, B, C صور الأعداد المركبة $z_A = -2i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} + i$

1. أ) اكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي

ب- استنتج مركز ونصف قطر الدائرة (γ) التي تشمل النقاط A, B, C

ج- علم النقاط A, B, C ثم أرسم الدائرة (γ)

2. أ) اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC

1- ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- بين أن النقطة O' ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران r

ب- بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (γ) . ثم انشئ (γ') صورة الدائرة (γ) بالدوران r .

ج- تحقق أن الدائرتين (γ) و (γ') تشتركان في النقطتين A و B

التمرين الثاني: (04 نقط)

الفضاء المزود بالمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ المتعامد والمتجانس، نعتبر النقاط $A(1; 0; -2)$ ، $B(3; 1; 0)$ ، $C(1; 0; 1)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل النقطة B .

2. لتكن مجموعة النقاط $M(x; y; z)$ من الفضاء بحيث : $\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

- بين أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2; -1; 1)$ ويشمل النقطة B

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (Δ) .

4. أ- عين أحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب- أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) . ثم استنتج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B, e^t), (C, 1)\}$. بين أن : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t} \overrightarrow{BC}$

- شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

- استنتج مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة [BC].

التمرين الثالث: (04 نقط)

صندوق يحوي على 5 كرات بيضاء مرقمة: -1، 0، 1، 1، 1 و 5 كرات سوداء مرقمة: -1، 0، 0، 1، 1. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد من من هذا الصندوق.
1- احسب احتمال الحوادث التالية :

A حادث سحب كرة واحدة فقط بيضاء ، B حادث سحب كرة بيضاء على الاقل .
C حادث سحب 3 كرات من نفس اللون ، D حادث سحب 3 كرات من نفس الرقم.
F حادث سحب 3 كرات مجموع أرقامها معدوم.

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة .
أ- عين قيم المتغير العشوائي X.

ب- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين الرابع: (07 نقط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$.

يرمز (C_f) إلى منحناها في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$: (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ ؛ $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$).

(2) أ- برهن أنه، من أجل أي عدد حقيقي $x > 1$ ، فإن : $1 < x < x^2 < x^3$.

ب- استنتج أنه، من أجل أي عدد حقيقي $x > 1$ ، فإن : $0 < f(x) < 4x^3 \cdot e^{-2x+1}$.

ج- باستخدام النهاية الشهيرة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ ، برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

د- استنتج، من (2) ج- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسرها هندسيًا.

(3) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x) \cdot e^{-2x+1}$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f.

(4) احسب $f(-1, 1)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، ثم أنشئ (C_f) ؛ (تعطى $f(\alpha) \simeq 5$).

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقتها: $z_A = 1 - \sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1- أكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي، ثم بيّن أن $z_B^{2019} + z_C^{2019} = -2^{2020}$.

2- بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n - z_C^n = 2^{n+1} i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

3- أعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4- عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم احسب الطولين GA و BC .

5- نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تتحقق: $BM^2 + CM^2 = 12 \dots (1)$.

* بين أن النقطة A تنتمي للمجموعة (S) ، ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة * علم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشئ المجموعة (S) .

التمرين الثاني: (04 نقط)

الجزء (أ) نعتبر النقطتان A و D من الفضاء. ولتكن I منتصف القطعة AD .

(1) برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء فإن: $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

(2) استنتج المجموعة E مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

الجزء (ب) الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(3; 0; 0)$ ، $B(0; 6; 0)$ ، $C(0; 0; 4)$ ، $D(-5; 0; 1)$.

- 1- تحقق أن $\vec{n}(4; 2; 3)$ شعاع ناظمي للمستوي ABC ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي ABC .
- 2/ اوجد التمثيل الوسيط للمستقيم Δ العمودي على المستوي ABC ويشمل النقطة D .
- 3/ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي ABC . استنتج إحداثيات النقطة H .
- 4/ احسب بعد النقطة D على المستوي ABC .

5/ برهن أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة E المعرفة في الجزء (أ)، ثم أنشئ المجموعة E .

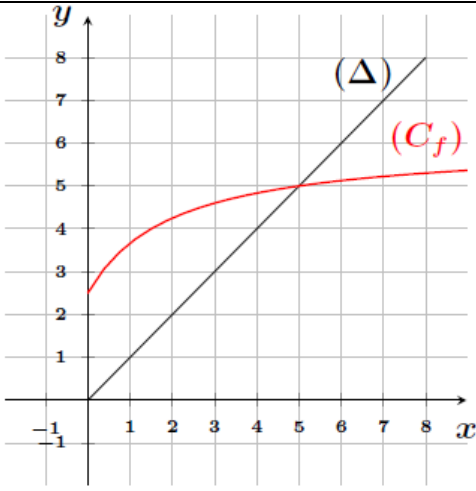
التمرين الثالث: (04 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$f(x) = \frac{6x + 5}{x + 2}$ و (C_f) المنحني الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ (أنظر الشكل).

I تحقق أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

II (u_n) متتالية معرفة بمجدها الأول $u_0 = 1$.



وَمِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي $u_{n+1} = f(u_n) : n$

(1) أ) مِثْلَ عَلَى مَحْوَرِ الْفَوَاصِلِ الْخُدُودِ u_3, u_2, u_1, u_0

(ب) ضَعْ تَحْمِينًا حَوْلَ إِتْجَاهِ تَغْيِيرِ الْمَتَالِيَةِ (u_n) وَتَقَارِبَهَا .

(2) بَرَهْنِ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي $n : 1 \leq u_n \leq 5$.

(3) أَدْرِسْ إِتْجَاهَ تَغْيِيرِ الْمَتَالِيَةِ (u_n) ، هَلْ هِيَ مُتَقَارِبَةٌ ؟ .

(4) نَضَعْ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي $n : v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$

أ) بَيِّنْ أَنَّ (v_n) هَنْدَسِيَّةٌ يَطْلُبُ تَعْيِينَ أُسَاسِهَا وَحَدِّهَا الْأَوَّلِ

(ب) عَبَّرْ عَنِ v_n ثُمَّ عَنِ u_n بِدَلَالَةِ n . ثُمَّ جِدْ نِهَآيَةَ الْمَتَالِيَةِ (u_n) ؟ .

(5) أَحْسَبِ الْمَجْمُوعَ S_n حَيْثُ : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$

التمرين الرابع: (07 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة هي 2cm

I- الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g والمعرفة

على المجال $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$

1- أ) احسب $g(1)$ ، ثم تحقق أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(ب) أكمل جدول تغيرات الدالة g .

2- أ) علل وجود عدد حقيقي وحيد α على المجال $[1; +\infty[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق : $1,9 < \alpha < 2$

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(0) = 0$ ومن أجل كل $x \neq 0$ $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) بَيِّنْ أَنَّ : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- أ) بين أن الدالة f فردية . (ب) بَيِّنْ أَنَّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

4) اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0 .

5- أ) بَيِّنْ أَنَّ : $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ ، ثم جد حصر العدد $f(\alpha)$.

(ب) أنشئ المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المعلم السابق .

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

- (u_n) المتتالية المعرفة ب: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.
- (1) -أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$.
ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
ج- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟
- (2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$.
- أ- بين المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلّب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .
ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع: $u_n = \frac{n}{2^n}$.
ج- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثاني: (04 نقط)

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 2z + 4 = 0$ (1)
- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1). ثم استنتج حل المعادلة: $(\bar{z} + 2 + 2i\sqrt{3})^2 - 2\bar{z} - 4i\sqrt{3} = 0$.
- (2) ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نعتبر النقاط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + 3i\sqrt{3}$ ، $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_D = -1 - i\sqrt{3}$.
- أ) احسب العددين المركبين $z_{\overline{AB}}$ و $z_{\overline{AD}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .
- ب) عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه B ونسبته $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.
- ج) عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتشابه S .
- د) احسب العدد المركب $z = \frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABED$.

التمرين الثالث: (04 نقط)

صندوق يحتوي على 6 قريصات حيث: 4 كرات حمراء وكرتين سوداوين، الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد من العلبة 3 كرات من الصندوق.

1- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

2- نسحب عشوائيا وعلى التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A_0 "عدم سحب أي كرة سوداء"، A_1 "سحب كرة سوداء بالضبط"، A_2 "سحب كرتين سوداوين"

3- بعد السحب الاول بقيت في الصندوق 4 كرات ، نجرى سحب آخر على التوالي ودون ارجاع نعتبر الحوادث التالية:

B_0 "عدم سحب أي كرة سوداء"، B_1 "سحب كرة سوداء بالضبط"، B_2 "سحب كرتين سوداوين"
أ- احسب الإحتمالات التالية :

$P_{A_0}(B_0)$ ، $P_{A_1}(B_0)$ ، $P_{A_2}(B_0)$ ، ثم استنتج $P(B_0)$.

ب- احسب احتمال الحصول على كرة سوداء بالضبط عند السحب الاول ، علما اننا حصلنا على كرة سوداء بالضبط عند السحب الثاني.

التمرين الرابع: (07 نقط)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$ و C_g تمثيلها البياني .

1- احسب نهايتي g عند : $+\infty$ و $-\infty$.

2- أثبت من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ أن : $g'(x) = \frac{x(1-x)}{x^2 + x + 1}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

4- أثبت أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1.7, 1.9]$.

5- عين من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ و C_f تمثيلها البياني

1- احسب نهايتي f عند : $+\infty$ و $-\infty$.

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- اكتب معادلة المماس (T) عند مبدأ المعلم، حدد الوضعية النسبية لـ : C_f و (T).

2- أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\ln(x^2 + x + 1) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا.

ب) أثبت أن المنحنى C_f يقبل نقطتي انعطاف ، عين فاصلتيهما.

3- أثبت أن : $f(\alpha) = \alpha$. ثم ارسم المنحنى C_f و المماس (T).

4- احسب العدد $S(\alpha) = 2 \int_0^\alpha \frac{x dx}{x^2 + x + 1} + \int_0^\alpha \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ ، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

- الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- تعطى النقاط: $C(3, 2, 1)$ ، $B(-1, 0, 1)$ ، $A(1, 2, 2)$
- 1- بين أن المستوي (Q) الذي يشمل النقاط A ، B ، C معادلته : $x - 2y + 2z - 1 = 0$.
- 2- (P) مستو معادلته : $z = 1$. أ) تحقق أن المستقيم (BC) محتو في المستوي (P) .
 ب) استنتج تقاطع المستويين (P) و (Q) .
 ج) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .
- 3- أثبت أن النقطة $H(1, 2, 1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P) .
 هل المستقيمان (BC) و (AH) متقاطعان ؟ برر إجابتك .
- 4- أ) عين إحداثيات النقطة G . مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 1), (C, -1)\}$.
 ب) عين (E) مجموعة النقاط M من الفضاء حيث : $3\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$

التمرين الثاني: (04 نقط)

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة : $(z - 2 + 2i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.
 النقاط A ، B ، C لاحقاً على الترتيب : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = -2 + 2i$ ، $z_C = -2 - 2i$.
- 2) أ- اكتب الصيغة المركبة للدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
 ب- بين أن لاحقة النقطة D ، صورة النقطة C بهذا الدوران ، هي $z_D = 2 - 6i$.
 ج- حدّد - مع التعليل - طبيعة الرباعي ABCD .
- 3) أ- عين إحداثي H_α مرجح الجملة $(A, 1); (B, -1); (C, \alpha)$ ، حيث α وسيط من $\mathbb{R}^*$.
 ب- بين أن مجموعة النقاط H_α ، عندما يتغير α في $\mathbb{R}^*$ ، هي مستقيم باستثناء نقطة يطلب تعيينه
 ج- في هذا السؤال ، نأخذ $\alpha = 2$. عين Γ : مجموعة النقاط M من المستوي التي تحقق :
 $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 16$

التمرين الثالث: (04 نقط)

- 1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال R كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس
- و المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) كما يلي :
- $$\begin{cases} v_0 = \frac{9}{2} \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) أ- انشئ (C) والمستقيم الذي معادلته : $y = x$

ب- انشئ الحدود $u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, v_2, \dots$ على محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم

2) أ- ضع تخميناً حول اتجاه تغير كلا من المتالتين (u_n) و (v_n)

ب- برهن بالترجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 3 < v_n$

3) أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$ و $v_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n)

ج- احسب $\lim u_n$ و $\lim v_n$

4) هل ان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ علّل جوابك

التمرين الرابع: (07 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ثم أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

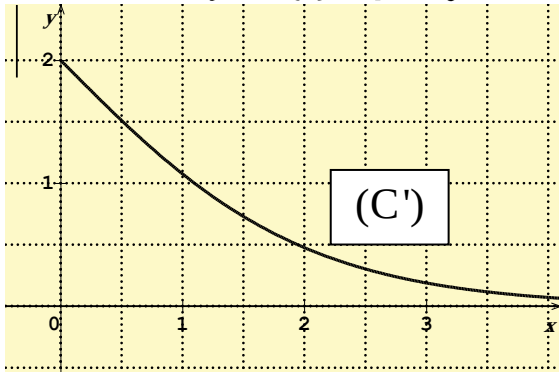
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$ واليكن (C) تمثيلها البياني في

المعلم المتعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول على محور الفواصل 1cm وعلى محور الترتيب 4cm.



1- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أ- أثبت أن : $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$

ب) أرسم المنحنى (C) في المعلم السابق.

III- نمثل في الشكل المقابل المنحنى (C') للدالة h

والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{4}{e^x + 1}$. من أجل كل عدد حقيقي ، نسمي P, M

و Q النقط التي تحدثاً على الترتيب $(x; h(x))$ ، $(x; 0)$ و $(0; h(x))$

أ- بين أن مساحة المستطيل OPMQ تكون أعظمية إذا كانت α فاصلة النقطه M .

ب- نفرض أن فاصلة M هي α .

أثبت أن المماس (T) في النقطه M للمنحنى (C') يوازي المستقيم (PQ).

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n}$.

(1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $u_{n+1} = a + \frac{b}{4 - u_n}$.

(2) برهن بالتراجع، انه من أجل كل عدد طبيعي n ، أن : $-1 \leq u_n \leq 3$.

(3) ادرس رتبة المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \frac{4}{u_n + 1}$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(5) احسب، بدلالة n ، المجموع $\Sigma_n = \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{v_1^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2}$.

التمرين الثاني: (05 نقط)

يلعب تلميذ بـ 20 كرية، 13 منها حمراء و 7 خضراء وضع 10 كريات حمراء و 3 كريات خضراء في علبة A كما وضع البقية في علبة B .

(1) في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا في آن واحد من العلبة A؛ نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في العلبة A .
أ) عين القيم التي يأخذها X .

ب) عين قانون احتمال X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(2) في ثاني لعبة يختار عشوائيا إحدى العلبتين ويسحب كرية .
أ) مثل شجرة الاحتمالات التي تصف هذه الوضعية .

ب) احسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء .

ج) علما أن التلميذ سحب كرية حمراء ؛ فما هو احتمال أن تكون من العلبة A ؟

التمرين الثالث: (04 نقط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0 \dots (E)$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي

2) من أجل كل عدد مركب z نضع: $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$

أ) تحقق أن: $P(i\sqrt{3}) = 0$ وأن: $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد مركب غير معدوم: $P(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^4} \cdot P(z)$

ج) استنتج أن كلا من العددين المركبين $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ و $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ هما حلان للمعادلة $P(z) = 0$.

3-أ) في المستوي المنسوب إلى متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ علم النقاط A, B, C النقطة:

A, B, C ذات اللواحق $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ على الترتيب.

ب) أنشئ النقطة D والمعرفة كما يلي: $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC}$ ثم اكتب لاحقة D على الشكل القطبي

ج) المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي للمستقيم (BD) يقطع (OD) في النقطة E .
عين لاحقة النقطة E .

التمرين الرابع: (07 نقط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = \ln(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}) - 2x$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = \ln(1 - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x})$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $g(-\ln 2)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

4) لتكن G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$. ادرس اتجاه تغير الدالة G

بين منحنى G يقبل مماس يوازي حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعيين إحداثياتها.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \ln(2e^{2x} - 2e^x + 1) - \ln 2$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ ، ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

2) أ) بين $f'(x) = e^{x-f(x)}(2e^x - 1)$ حيث f' مشتق الدالة f .

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

3) أ) عين α فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل. ب) ارسم (Δ) و (C_f) .

4) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 1)$ و (C_h) تمثيلها البياني.

عين قيمة β التي تحقق $h(x) = f(x - \ln 2) + \beta$ ثم استنتج كيفية إنشاء (C_h) انطلاقاً من (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

دالة عددية معرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

(1) بيّن أنه إذا كان $x \geq 1$ فإن $f(x) \geq 1$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) ب: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(أ) برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n ، أن $u_n \geq 1$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج أن (u_n) مقاربة واحسب نهايتها L .

(3) (v_n) متتالية معرفة ب: $v_n = \ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين عناصرها المميزة.

(ب) أكتب v_n بدلالة n واستنتج أن: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

(1) حل، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. ثم أكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطة A ، التي لاحقتها $z_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. عين z_B لاحقة النقطة B التي تنتمي

للمحور التخيلي بحيث يكون المثلث OBA متقايس الأضلاع.

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

(أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

(ب) أوجد $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

(4) عين طبيعة المجموعة (T) ثم أنشئها حيث (T) مجموعة النقط M ، ذات اللاحقة z ،

من المستوي المركّب بحيث: $|iz - 2 - i| = |\bar{z} + 3i|$.

التمرين الثالث: (04 نقط)

في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء نعتبر النقط :

$A(-1; 3; 2)$ ، $B(1; 4; 4)$ ، $C(0; 4; 2)$ ، $D(1; 0; 2)$ و $E(-9; -4; -1)$

1/ بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا (ABC) يطلب تعيين معادلته الديكارتية

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : \text{المعرف بالتمثيل الوسيطى} \quad 2/ \text{نعتبر المستقيم } (\Delta)$$

- أ- تحقق أن النقطة D و المستقيم (Δ) تعين مستويا (P) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له
 ب- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (P)
 ج- بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان
 3/ أ- تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ') الذي يقبل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = 4 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{تمثيلا وسيطيا له .}$$

- ب- تحقق من أن النقطة E لاتتنمي إلى (P) و لاتتنمي للمستوي (ABC)
 ج- أوجد المسافة بين النقطة E و المستقيم (Δ') بطريقتين مختلفتين.

التمرين الرابع: (07 نقط)

الجزء الأول: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$

- 1- بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث : $1.5 < \alpha < 1.6$
- 2- احسب نهايتي g عند $-\infty$ و $+\infty$.
- 3- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 4- احسب $g(0)$ ، ثم استنتج من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.
- 5- باستعمال المكملمة بالتجزئة عين الدالة F الاصلية للدالة $g(x) + 2 \rightarrow x$ والتي تنعدم عند 0
- 6- عين العدد الحقيقي $s(\alpha) = \int_0^\alpha g(x).dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ واليكن C_f تمثيلها البياني

- 1- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
- 2- تحقق أن $f(x)$ تكتب من الشكل: $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x}}$ ، ثم احسب نهايتي f عند 0.
- 3- أثبت من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ أن : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$
- 4- باستعمال الجزء الأول عين إشارة f' ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- تحقق أن : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$
- 6- ارسم C_f (تذكر أن الدالة f غير مستمرة عند 0).

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

ليكن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;1[$

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n}$

- 1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $U_n \geq 1$.
ب- بين أن المتتالية (U_n) متناقصة، ثم استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها.

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$

- أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α
ب- اكتب عبارة V_n بدلالة n و α واستنتج عبارة U_n بدلالة n و α .
ج - تحقق من نتيجة السؤال 1 ج) وذلك بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثاني: (05 نقط)

1) ليكن $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :

1) بين أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .

3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ القطر A ، B و C التي لاحقاً : $z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \bar{z}_B$ على الترتيب .

1) التحويل القطبي S ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقاً العدد المركب z_n .

نضع : $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون القطر O ، A و M_n في استقامية .

التمرين الثالث: (04 نقط)

تحتوي علبة على 7 كرات لا نُميّز بينها عند اللمس ، 4 منها تحمل الرقم 1 و كرتان تحملان الرقم 2 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 .
1- نسحب ثلاث كرات في آن واحد :

أ) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم " .
B : يوجد في الكرات المسحوبة الرقم 0 . C : " مجموع الأرقام المسحوبة يساوي 3 " .

ب) بيّن ان: $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ثم استنتج كلاً من : $P(A \cap B)$ و $P_A(B)$.

2- X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب 3 كرات جداء الأرقام المسحوبة :
أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الرابع: (07 نقط)

الشكل المقابل (Γ) يمثل منحنى الدالة u في مستو منسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ والمعرفة على

المجال $]0; +\infty[$ ب: $u(x) = x - 1 - 4 \ln x$:

(Γ) يقبل مقاربين أحدهما حامل محور الترتيب والآخر

مائل (D) ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$

(Γ) يقبل مماساً وحيداً يوازي محور الترتيب عند النقطة

ذات الفاصلة 4 .

(Γ) يقطع المحور $(O; \vec{i})$ في نقطتين فاصلتهما 1 و α على الترتيب .

أ) بقرأة بيانية: 1) أحسب كلاً من : $u(1)$ ، $u(\alpha)$ ، $u'(4)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x}$.

2) عيّن إشارة كلاً من : $u(x)$ و $u'(x)$.

ب) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4 \ln x$:

و (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = e^{u(x)} - u(x)$:

ب) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = u'(x)[e^{u(x)} - 1]$.

ب) بيّن أنه يكون : $f'(x) > 0$ إذا وفقط إذا ، $x \in]1; 4[\cup]\alpha; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .

3- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $e^x - 2x > 0$: استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Γ)

ب) أرسم المنحنى (C) في الجزء الرفق على المجال $]0; 15[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(\bar{z} + \sqrt{3} + i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.
2. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i, z_B = \sqrt{3} + i, z_C = \bar{z}_B - 2z_A$.
 أ) اكتب كل من z_A و z_B على شكل أسي.
 ب) احسب الأطوال OA, OB, AB . استنتج طبيعة المثلث OAB .
3. عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
4. أ) جد لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(O; -1), (D; 1), (B; 1)\}$ ، ثم بين أن : $\left(\frac{z_G}{2\sqrt{3}}\right)^{1945} = \frac{z_G}{2\sqrt{3}}$.
 ب) علم النقط A, B, C, D و G ثم بين أن النقط C, D و G في استقامة.
 ج) عين طبيعة كل من الرباعي $OBGD$ والمثلث AGC .

التمرين الثاني : (04 نقط)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{8}$ و $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$

- 1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 8cm)، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $[0; 2]$ ب : $f(x) = x(2 - x)$.
- 2) أ- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل، دون حساب كلا من u_0, u_1, u_2, u_3 .
 ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
 3) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي $n : 0 < u_n < 1$.
 ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة استنتج أن (u_n) متقاربة، ما هي نهايتها ؟
 4) 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \ln(1 - u_n)$.
 أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 5) أ) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = (1 - u_0)(1 - u_1) \dots (1 - u_n)$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

تعطى النقط $A(1, 1, -2), B(1, 2, -2), C(0, 1, 1)$.

1) بين أن النقط A, B, C تعرف مستوي P .

(2) تحقق أن الشعاع $\vec{n} = 3\vec{i} + \vec{j}$ ناظمي للمستوي P ، ثم استنتج معادلة ديكرتية لـ P .

(3) ليكن المستوي Q المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم (AC) .

(أ) أعط معادلة ديكرتية للمستوي Q . (ب) برهن أن P و Q متعامدان وفق المستقيم (AB) .

(4) S_m مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2my + 4z + 4 = 0$ ؛ (m وسيط حقيقي)

(أ) برهن أنه مهما كان m ، فإن S_m هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m .

(ب) بين أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ فإن مجموعة النقط I_m هي المستقيم (AB) .

التمرين الرابع : (07 نقطة)

I - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ ، ثم بين أن f دالة فردية.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ، ثم استنتج جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

5. ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلة له $y = -\frac{1}{2}x + 1$ والمنحني (C_f) .

6. أ) بين أن الدالة $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$.

(ب) احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلتها على الترتيب:

$x = -1$ ، $y = 0$ و $x = 0$.

II - (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$.

1. إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

2. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر المستويين (P) و (P') اللذين معادلتهما على الترتيب $x - 2y - 3z + 3 = 0$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad x - y + z - 4 = 0 \quad (D) \quad \text{المستقيم الذي تمثيلا وسيطيا له}$$

أجب إما بصحيح وإما بخطأ مع التعليل.

1. المستويان (P) و (P') متعامدان.

2. سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z + 14 = 0$ يمر المستوي (P')

$$\begin{cases} x = 11 - 5t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R} \quad \text{تقاطع المستويين } (P) \text{ و } (P') \text{ هو المستقيم } (\Delta) \text{ الذي تمثيلا وسيطيا له}$$

4. المستقيمين (D) و (Δ) من مستويين مختلفين.

التمرين الثاني: (04 نقط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha) v_n \quad \text{و} \quad v_{n+1} = (1 - \alpha) u_n + \alpha v_n \quad \text{حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي مع } \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

1. لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$

أ- احسب w_0 و w_1

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha - 1)^n$

ج- استنتج نهاية المتتالية (w_n)

2. أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq v_n$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة

ج- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l

د- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + v_n = 3$ وستنتج قيمة النهاية l

التمرين الثالث: (05 نقط)

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) \text{ و } z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}), z_B = 3 + 4i, z_A = 1$$

(1) أ) بين ان صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D

(ب) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين عناصرها المميزة

(2) لتكن النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\frac{3}{2}$

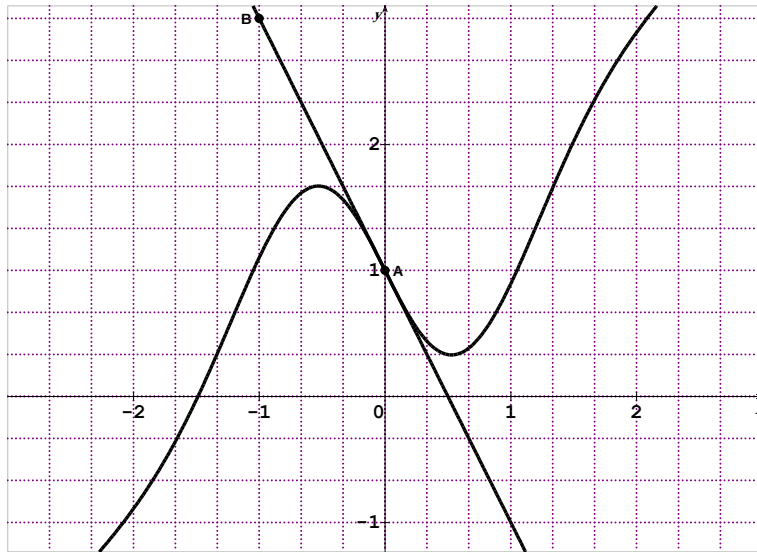
أ) بين ان لاحقة النقطة F هي $z_F = -2i$ (ب) بين ان F هي منتصف القطعة $[CD]$.

(ج) بين ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ ثم اكتبه على الشكل الأسّي .

(د) استنتج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$ أنشئ النقط A, B, C, D و F

التمرين الرابع: (07 نقط)

في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(0;1)$ و $B(-1;3)$ و المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني
للدالة f القابلة للإشتقاق والمعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$ حيث $a \in \mathbb{R}$



-1 أ) بين أن المنحنى (C) يشمل النقطة A . (ب) عين معامل توجيه المستقيم (AB) .

(ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

(د) عين العدد a بحيث يكون المستقيم (AB) مماساً لـ (C) في A

2- من السؤال السابق، من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \text{ و } f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

أ) بين أنه من أجل كل: $f(x) > 0 : x \in]-1; 0]$ و $f'(x) > 0 : x \in]-\infty; -1]$

(ب) جد مساحة الحيز المحدد بـ (C) والمستقيمت التي معادلتها: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = x + 1$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

يحتوي كيس على 10 كريات بحيث 5 كرات حمراء تحمل الأرقام: 0، 1، -1، 2 و -2 و 3 كرات خضراء تحمل الأرقام 0، 1، -1 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 و -1.

1- نسحب عشوائيا كرتين من هذا الصندوق وفي أن واحد.

احسب احتمالات الحوادث التالية: A: "الكرتين المسحوبتين تحملان نفس الرقم"

B: "الكرتين المسحوبتين تحملان من لونين مختلفين". C: "مجموع الأرقام المسحوبة معدوم".

2- X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة من هذا الكيس بمكة العدد الحقيقي $\ln|x+y|$ حيث x و y هما الرقمان المسجلان على الكرتين المسحوبتين من هذا الكيس.

أ- عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب- أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني: (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C التي لواحتها على الترتيب: $z_A = -4$ ؛ $z_B = 2$ ؛ $z_C = 4$. و لتكن النقط A', B', C' التي لواحتها على

الترتيب: $z_{A'} = jz_A$ ؛ $z_{B'} = jz_B$ ؛ $z_{C'} = jz_C$ حيث j هو العدد المركب المعرفة بـ: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) أَعْطِ الأشكال الجبرية لـ $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، $z_{C'}$.

(ب) اكتب j على الشكل الأسّي، واستنتج الأشكال الأسّيّة للأعداد المركبة $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، $z_{C'}$.

(2) علّم، بدقة، و دون استخدام القيم التقريبية، النقط A', B', C' ثم برهن أنها في استقامة.

(3) أثبت أن النقط A', B', C' هي صور النقط A, B, C بدوران، يطلب تعيين مركزه وزاويته.

(4) لتكن النقط M, N, P : منتصفات القطع المستقيمة $[A'C]$ ، $[C'C]$ ، $[C'A]$ على الترتيب.

ما طبيعة المثلث MNP ؟ علّل إجابتك.

التمرين الثالث: (04 نقط)

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول u_0 وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$

1- عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نفرض أن: $u_0 = 0$. أ- احسب u_1 ، u_2 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 \leq u_n \leq 1$ ، ثم أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

ج- أحسب كلا من S_n و π_n حيث: $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $\pi_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث: $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.

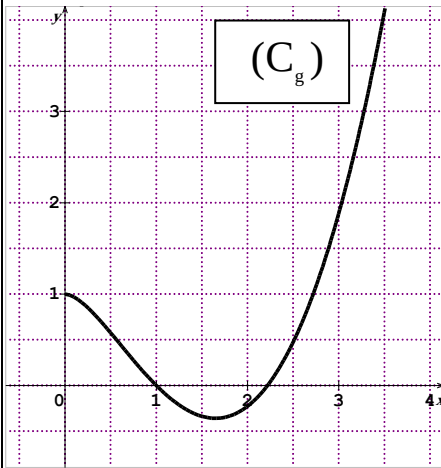
وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة 2cm .

1- أ- بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$.

2- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب تحديده.

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا. (لاحظ: $x(1 - \ln x) = x - x \ln x$)



3- أ- بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.

ب) بيّن أن الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1]$ ومتزايدة على $]e; +\infty[$ والمجالين $]1; e[$ و $]e; +\infty[$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

II) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي:

$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$ و (C_g) المنحنى الممثل لها (أنظر الشكل)

1- أ- حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

ب- نعطي جدول القيم التالية: بيّن أن المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2- أ- تحقق من أنه من أجل كل x من D_f : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$.

ب) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتهما 1 و α

ج) حدد إشارة $g(x)$ انطلاقا من المنحنى (C_g) على المجال $]1; \alpha$

بيّن $f(x) - x \leq 0$ من أجل كل x من $]1; \alpha$.

3) إنشئ في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0,12	0,28

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

أ) $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ ، ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ ، ج) (u_n) متباعدة

(2) في المستوي المركب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه O .

ب- مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$

(3) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

أ- المستوي (P) الذي معادلته: $x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2; 1; -1)$ و $\vec{u}(1; -1; 1)$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (P) هي: $x - y + z = 0$.

التمرين الثاني: (04.5 نقط)

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z : $(z-1+\sqrt{3})(z^2-2z+4)=0 \dots (E)$

2- ليكن z_1, z_2 و z_3 حلول المعادلة (E) حيث: $z_1 \in \mathbb{R}$ ، $\text{Im}(z_2) > 0$ و z_2 و z_3 الحل الآخر.

أ- اكتب كلاً من z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

ب- بين العدد $z_2^{2018} - z_3^{2018}$ تخيلي صرف

3- في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C ذات الواحق:

$$z_A = 1 - \sqrt{3}i, z_B = 1 + \sqrt{3}i, z_C = 1 - \sqrt{3}i$$

أ- احسب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عيّن إحداثيي النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$.

ج- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = -3$

التمرين الثالث: (11 نقط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس: $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول هي 2cm)

(1) أحسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$. و شكل جدول تغيراتها.

(3) أ، بين أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتهما:

$y = x + 2$ و $y = x$ في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ على الترتيب.

ب، بين أن المنحنى (C_g) يقع داخل الشريط المحدد بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

(4) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد إحداثياتها.

(5) أكتب معادلة المستقيم (T) المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة A ذات الفاصلة: 0.

(6) أ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x) + g(-x) = 2$. ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب، أحسب: $g(1)$ و استنتج $g(-1)$ أحسب: $g(2)$ و استنتج $g(-2)$.

ج، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: المنحنى (C_g) يقطع حامل محور الفواصل مرة

وحيدة في نقطة فاصلتها α . بحيث: $-2 < \alpha < -1$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(7) أرسم كلا من المستقيمتين: (Δ) ، (Δ') و (T) ثم أرسم المنحنى (C_g) .

(8) ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $me^x + m - 2 = 0$.

(9) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. (عبارة h غير مطلوبة)

أ، أحسب نهايات الدالة h على أطراف مجموعة تعريفها.

ب، أدرس اتجاه تغير الدالة h . ثم شكل جدول تغيراتها.

ج، أثبت أن النقطة A مركز تناظر للمنحنى (C_h) . (إرشاد: استعن بالإجابة عن السؤال: 6) أ،

(10) لتكن G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ والتي تحقق $G(0) = \ln \frac{1}{4}$

أ، باستعمال -6 ج، عين اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$.

ب، عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ج، عين عبارة الدالة G ثم تحقق من النتائج المحصل عليها في الجواب 10- أ و ب

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2 - 2 + i2\sqrt{3})(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$.

2. B, A نقطتان من المستوي لاحقتهما $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ على الترتيب.

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي. ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

ب- النقطة C ذات اللاحقة $z_C = -\sqrt{3} + i$ و D صورهما بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

عين z_D لاحقة النقطة D .

3. لتكن G مرجح الجملة $\{(O; -1), (D; 1), (B; 1)\}$

أ- تحقق أن G موجودة و احسب لاحقتها z_G ب- أنشئ النقط A, B, C, D و G .

عين المجموعة للنقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MO}\| = \|\vec{MB} - \vec{MG}\|$

ج- احسب العدد المركب $\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C}$ ثم استنتج أن النقط C, D و G في إستقامية.

و أن صورة النقطة D بتحويل نقطي H يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

د) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

4. عين النقطة F حتى يكون الرباعي $ACGF$ معين و احسب مساحته

التمرين الثاني : (04 نقط)

تأهل إلى أولمبياد الرياضيات من دول المغرب العربي 25 تلميذا. 3 تلاميذ و 5 تلميذات من المغرب 4 تلاميذ وتلميذتين من الجزائر وتلميذين و 4 تلميذات من تونس وتلميذين و 3 تلميذات من ليبيا

I. 1) نريد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء من هذه المجموعة

أ) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 تلميذات؟

ب) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 أعضاء من نفس الدولة؟

ج) ما هو احتمال أن تضم اللجنة على الأقل عضوين من ليبيا؟

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلاميذ الذكور المتواجدين فيها.

أ) أوجد قيم المتغير العشوائي X . ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ و (P) المستوي ذي المعادلة $x + y + z - 3 = 0$

(1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، ماذا تستنتج؟

(2) بين أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

(3) عين معادلة ديكرتية للمستوي (P') الذي يمر بالنقطة A ويعامده المستقيم (AC) .

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 4 \\ z = -1 + t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

(4) بين أن تمثيلًا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (P') هو :

(5) أ، بين أن النقطة $D(0;4;-1)$ تنتمي إلى (Δ) ، ماذا تستنتج؟

(ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$. (ج) بين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

(د) احسب مساحة المثلث BCD ثم استنتج المسافة بين A والمستوي (BCD) .

التمرين الرابع: (07 نقط)

I - الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - 2 \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g . 2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x}(1 + 2 \ln x)$

نسمي (C_f) منحنى الدالة f في مستو منسوب إلى المعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ، احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(ب) بين أن f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2. أ، بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$.

3. أ، عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x; 2)$ مع $x \geq 1$.

(ب) حل المعادلة $x^2 g'(x) - 2xg(x) = 0$ ثم بين أن $B(e; e + \frac{3}{e})$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(هـ) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

4. أ، احسب مشتقة الدالة $(\ln x)^2$ $x \mapsto$ ثم استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) عين مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتهما : $x = \alpha$ ، $x = 1$ و $y = 0$

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

يحتوي صندوق على 10 كرات تحمل الأعداد 1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 4، 4. (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا على التوالي وبدون ارجاع كرتين من الصندوق.

(1) ليكن A الحادث "الحصول على كرتين تحملان عدد زوجيين". بيّن أن $P(A) = \frac{1}{3}$

(2) نكرر التجربة السابقة ثلاث مرات بحيث نعيد الكرتين المسحوبتين للصندوق بعد كل تجربة ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحادث A.

بيّن أن $P(X=1) = \frac{4}{9}$ ، ثم عين قانون احتمال المتغير العشوائي X.

التمرين الثاني: (04 نقط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$.
1. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2. تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي ABC. ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3. أ) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC).

ج) نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي. عين العدد t حيث $AS^2 = AB^2$

د) عين طبيعة رباعي الوجوه FABC حيث $F(4;6;0)$. ثم احسب حجمه V.

4. بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين.

5. أ) عين المجموعة (S) للنقط M التي تحقق $\|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$.

ب) عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC).

التمرين الثالث: (04 نقط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $z^2 + z + 1 = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط A، B، C، D و F

ذات اللوحات: $z_F = \overline{z_D}$ و $z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ ، $z_C = -2$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل المثلثي، ثم علم النقط A, B, C, D, F (ب) ما نوع المثلث ABC ؟

3) الدوران الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$

أ) عين مركز وزاوية الدوران $\mathcal{R}$. ثم بين أن $z_E = 1 + \sqrt{3}i$ حيث $\mathcal{R}(D) = E$.

ج) أكتب العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان

4) لكل عدد مركب z يختلف عن E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$ و لتكن

(Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللوحات z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا - عين و أنشئ (Γ_1) .

5) أ) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, |z_A|); (B, |z_B|); (C, |z_C|)\}$ ، حدد z_G لاحقة النقطة G .

(Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$

ب) تحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقط)

نعتبر الدالة f والمعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

ولیکن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

أ-1) جد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ب) جد $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

أ-2) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها، ثم بين أن $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

أ-3) تحقق أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]4; 5[$

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيتها.

ج) أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما (-2) و أكتب معادلتيهما.

د) أحسب $f(6)$ ، $f(10)$ ، $f(-1)$ ، $f(-4)$ و $f(-8)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') و (C_f)

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة:

$$m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$$

4- نعتبر الدالة g والمعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$

أ) بين أنه من كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن: $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير g .

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1; 2; 3)$ ، $B(2; 1; 3)$ و $C(2; -2; 0)$

(1) بين ان النقط A ، B و C تحدد مستويا.

(2) بين ان $x + y - z = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(3) لتكن $D(2; 0; 2)$ و $E(-4; 6; 2)$ نقطتين من الفضاء . أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .

(4) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$

(أ) بين ان (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها R

(ب) بين ان المستقيم (DE) هو مماس لسطح الكرة (S) في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها .

(ج) بين ان المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين نصف قطرها و مركزها .

التمرين الثاني : (04 نقط)

I- حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

II- في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي

لواحقها: $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -z_B$.

1. بين أن $|z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. أثبت ان النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

3. أ- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتناظر المركزي الذي مركزه O

ب- ما طبيعة الرباعي $ABDC$

4. بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة

5. نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي $(z \neq -2)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z + 2}$

اثبت أن $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}; \overline{BM})$ ، ثم عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف .

التمرين الثالث : (04 نقط)

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $U_0 = 1$ و $\ln U_1 + \ln U_2 = -3\pi$

أ) عين أساس هذه المتتالية ، وأحسب U_n بدلالة n .

ب) نسمي P_{n+1} المجموع : $U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

أحسب P_{n+1} بدلالة n ، ثم جد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P_{n+1})$

2) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $V_n = \ln(U_n)$

أ) بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب) نسمي S_{n+1} المجموع : $V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

أحسب S_{n+1} بدلالة n ، ثم بين أن $\sin(S_{n+1}) = 0$

3- أ) نسمي π_{n+1} الجداء : $U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ ، أحسب π_{n+1} بدلالة n

ب) عين الحد U_p بحيث يكون : $\pi_{p+1} = e^{-6\pi}$

التمرين الرابع: (07نقط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) عين إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

II) f دالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ حيث : $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ من اجل $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) أ) احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير f على $]-1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها (نقبل ان f قابلة للاشتقاق عند 0)

ج) أكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند المبدأ . تعطى : $f'(0) = -\frac{1}{2}$

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب : $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 1$

أ) بين ان إشارة $h'(x)$ على $]-1; +\infty[$ من نفس إشارة $k(x)$ حيث : $k(x) = x^2(f'(x) + \frac{1}{2})$

ب) بين انه من اجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $k'(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$ ثم عين اتجاه تغير الدالة k

ج) استنتج إشارة $h'(x)$ ثم إشارة $h(x)$ ثم عين الوضع النسبي بين (C_f) و (T) .

4) أرسم (C_f) و (T) .

5) نعتبر m وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي x مع $x > -1$: $f(x) = (\ln m)(x-2)$

- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4i\sqrt{5} = 0 \dots (E)$

أ) احسب $(\sqrt{5} + 2i)^2$ ، ثم بين أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$

ب) استنتج أن حلي المعادلة (E) هما : $a = (\sqrt{5} + 2i)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ و $b = (\sqrt{5} + 2i)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})$

2) في الشكل المقابل $(O; \vec{u}; \vec{v})$ معلم متعامد والمتجانس في المستوي.

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها 3.

بين أن النقطة Q ذات اللاحقة $\sqrt{5} + 2i$ تنتمي إلى (C) ثم أنشئ النقطة Q.

3) نعتبر النقطتين A و B واللتين لاحقتاهما a و b على الترتيب.

أ) بين أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة (C)

ب) تحقق أن : $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OQ}$

استنتج أن الرباعي OAQB معين.

ج) إنشئ النقطتين A و B في المعلم السابق.

التمرين الثاني: (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(1;-2;4)$ ،

$C(-1;0;1)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $2x + y - z + 3 = 0$.

1) ليكن $\vec{n}$ الشعاع الناطمي للمستوي (P).

أ) هل يوجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{AB} = \alpha \vec{n}$ ؟ ماذا تستنتج ؟

ب) بين أن التمثيل الوسيطى للمستوي (Q) الذي يمر بالنقطة A ويوازي كل من $\vec{AB}$ و $\vec{n}$.

أ) أي $(A; \vec{AB}; \vec{n})$ معلما له) هي الجملة : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t + t' \\ z = 4t - t' \end{cases}$ حيث t و t' عددين حقيقيين.

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (Q)، وأن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

2) بين أن C نقطة مشتركة لمستويين (P) و (Q) وأن الشعاع $\vec{u}(14;-11;17)$ يعامد كل من $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ الشعاع الناطمي للمستوي (Q) .

3) استنتج التمثيل الوسيطى للمستقيم (D') المسقط العمودي للمستقيم (AB) على المستوي (P)

التمرين الثالث: (04 نقط)

f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ ، نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) الشكل الموالي يمثل المنحنى (C) للدالة f على $[0; +\infty[$ والمستقيم الذي (D) معادلته $y = x$.

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حساباً مبرزاً خطوط الرسم.

ب) ما تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) ؟

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{6-3u_n}{u_n+2}$

أ) احسب $6-3u_{n+1}$ و $u_{n+1}+2$ ، ثم بين أن (v_n)

متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ ، عين نهايتها.

ب) عبر عن u_n بدلالة v_n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع: (07 نقط)

f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني

I. عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c علماً أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها 1

وان (C_f) يشمل النقطة $A(2; -e^2)$ ويقبل في النقطة A مماساً موازياً لمحور الفواصل

II. نعتبر فيما يلي أن: $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) أ- أثبت أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ماذا تستنتج ؟

ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات f وشكل جدول تغيراتها

ج- اكتب معادلة المماس (d) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

2) انشئ (C_f) والمماس (d)

3) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$ استنتج دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

4) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ، $(2\bar{z} - 1 + 9i)(z^2 - 8z + 32) = 0$

(2) نعتبر النقاط A, B, C, Ω ذات اللواحق $z_A = 4 + 4i, z_B = \bar{z}_A, z_C = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}i, z_\Omega = i$ و

عين و مثل المجموعة (Γ) للنقاط $M(z)$ من المستوي حيث ، $\arg(\bar{z} - 4 + 4i)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$

(3) S التحويل التقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

(أ) بين ان S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة ثم تحقق ان $S(A) = C$

(ب) عين و مثل المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S

(4) نعتبر متتالية القط $A_0, A_1, \dots, A_n$ حيث $A = A_0$ و من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ $A_{n+1} = S(A_n)$

- نسمي z_n لاحقة A_n

(أ) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n ، $z_n - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} (z_0 - i)$

(ب) برهن أن المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين ثم استنتج طريقة لإنشاء A_2

التمرين الثاني : (04 نقط)

كيس A يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 1 ، 2 ،

2 ، 2 ، 4 ، 4 و كيس B يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل

الأرقام التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 4 .

نسحب قريصة رقمها x من الكيس A ثم قريصة رقمها y من الكيس B .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين $(x = y)$

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (y, x) العدد x^y .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم بين أن : $P(X = 4) = \frac{5}{24}$ و احسب : $P(X \leq 4)$

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم تحقق أن أمله الرياضي يساوي $\frac{209}{8}$

التمرين الثالث : (05 نقط)

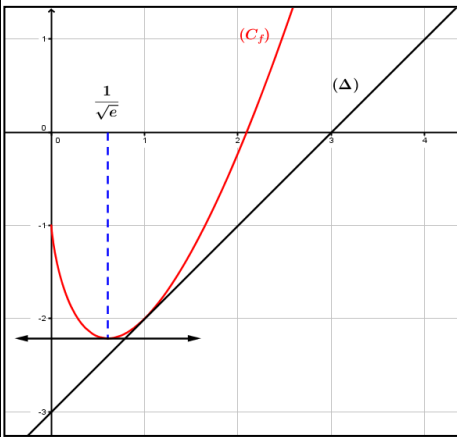
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب :

$f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ ، و (C_f) المنحني الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(II) (u_n) متتالية معرفة مجدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (1) أ) أرسم كلا من (C_f) و (Δ) ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها
 ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) و تقاربها .
 (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 4$.
 (3) أدرس اتجاه تغيير المتتالية (u_n) ، هل هي مقاربة ؟ .
 (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \ln(4 - u_n)$.
 أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .
 ب) عبّر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n . ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .
 (5) أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم استنتج الجداء P_n
 حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = (4 - u_0) \times (4 - u_1) \times \dots \times (4 - u_n)$.



التمرين الرابع: (07 نقط)

I: $g(x) = 2x \ln x - x - 1$ ب: $]0; +\infty[$ دالة عددية المعرفة على
 المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g في المستوي
 المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنى (C)
 يقبل مماساً موازياً لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها
 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ و (Δ) هو المماس لـ (C) في النقطة التي فاصلتها 1
 (1) بقراءة بيانية:

- أ) حدد $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ، $g(1)$ و $g'(1)$ ، ثم عين معادلة للمماس (Δ) ، ب) شكل جدول تغيرات g .
 (2) علل وجود عدد حقيقي α حيث: $2 < \alpha < 2,1$ و $g(\alpha) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
 II: الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x^2(\ln x - 1) - x ; x > 0$
 $f(0) = 0$
 تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1$ ، استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليمين، ثم أكتب معادلة نصف
 المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O من اليمين .
 (2) أجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ب) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ وشكل جدول تغيرات f
 (3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\right)$ ، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$
 (4) أدرس الوضعية النسبية لـ (Δ') للمستقيم (Δ') الذي معادلته $y = -x$ و (C_f) .
 ب) أنشئ (Δ') و (C_f) . نأخذ: $f(3,55) \approx 0$

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. T التحويل النقطي الذي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = 2iz + 4 + 2i$.

(أ) هو تشابه مباشر نسبته $k = 2$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ و لاحقة مركزه $\omega : z_\omega = 2i$.
(ب) المثلث $MM'\omega$ قائم في M.

2. α عدد مركب حيث $\alpha = -2 \left(\sin \frac{2019\pi}{12} + i \cos \frac{2019\pi}{12} \right)$.

(أ) الشكل الأسّي للعدد α هو $\alpha = 2e^{-i\frac{5\pi}{4}}$. (ب) $\alpha^{2019} \in \mathbb{R}$.

3. (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{6}{5}$.

(أ) $u_n = 2 \left[\left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} + 1 \right]$. (ب) (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

التمرين الثاني: (05 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ نعتبر النقط: $A(-2; -1; 3)$ ، $B(1; 3; 5)$ ،

و $t \in \mathbb{R}$ ، $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 3-6t \end{cases}$ المعرف بتمثيله الوسيط:

1) عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) . ثم بين أن (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوى.

2) (P) مستوي يوازي (Δ) ويشمل (AB) .

أ- بين أن الشعاع $\vec{n}(2; -2; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

ب- بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من (Δ) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M.

1) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) .

بين أن المثلث ABC قائم في A، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD.

التمرين الثالث: (04 نقط)

(1) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln U_2 - \ln U_4 = 4 \text{ و } \ln U_1 + \ln U_5 = -12$$

* عين أساسها وحدها الأول U_0 ، ثم أكتب U_n بدلالة n

* نضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم نهاية S_n لما n تؤول إلى $+\infty$

(2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $V_n = \ln U_n + \ln U_{n-1}$

* بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

نضع $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $T_n^2 = 2^{2020}$

التمرين الرابع: (07.5 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $2cm$.

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ واليكن (C_g)

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) + g(-x) = 2$ ، ماهو تفسير ذلك هندسيا.

(3) احسب $g(-\ln 3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(4) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

(5) بين أنه توجد قيمة وحيدة لـ α يكون من أجلها المستقيم ذو المعادلة $y = x + \alpha$ مماسا لـ (C_g)

(6) أرسم المنحنى (C_g) .

(7) عين العدد ين الحقيقيين a و b بحيث يكون: $g(x) = a + \frac{be^{-x}}{e^{-x} + 1}$

(8) احسب مساحة الحيز المحدد بـ: (C_g) والمستقيمت التي معادلتهما $y = 0$ و $x = -3$ و $x = 0$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = -x + 4\ln(e^x + 1)$. نسمي (C_f) تمثيلها البياني

(1) أ) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 0$ ، استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين

مقاربين، محددات وضعية كل منهما مع (C_f)

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) ارسم كل من المستقيمين المقاربين (C_f) في معلم جديد.

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية ذات

المجهول الحقيقي x : $4\ln(e^x + 1) = x + m$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;3]$ حيث $f(x) = \frac{-3}{x-4}$
- 1- ادرس اتجاه تغير الدالة f واثبت انه إذا كان $x \in [1;3]$ فإن $f(x) \in [1;3]$
- 2- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ من اجل كل عدد طبيعي n
- أ- برهن بالتراجع ان : $1 < u_n < 3$ من اجل كل عدد طبيعي n
- ب- اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ثم استنتج ان (u_n) متقاربة واحسب نهايتها
- 3- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 3}$
- أ- اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الأول
- ب- اكتب v_n بدلالة n وأحسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
- ج- احسب العدد الطبيعي n الذي يحقق : $3 + 2S_n = \frac{1}{27}$

التمرين الثاني : (04نقط)

- لدينا 3 أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحوي 3 كريات حمراء و5 كريات سوداء ، الكيس الثاني U_2 يحوي كرتين حمراوين وكرية سوداء ، أما الكيس الثالث U_3 فيحوي كرتين حمراوين و3 كريات سوداء (كل الكريات متشابهة ولا نميز بينها في اللمس) .
- نختار كيسا عشوائيا ونسحب منه كرية .
- (1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزاً عليها احتمالات الحوادث
- (2) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء ، ما احتمال ان تكون من الكيس U_2 ؟.
- (3) نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ونسحب منه كرتين في آن واحد .
- نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب α (عدد طبيعي معطى) . فإذا سحب كرتين حمراوين يتحصل على 10 DA و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يحصل على 5 DA ، وإذا سحب كرتين سوداوين يربح ما دفعه . واليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .
- عرّف قانون المتغير العشوائي X ، ثم عين قيم α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب .

التمرين الثالث : (05 نقط)

- عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :
- (1) المعادلة $z^3 - 2z^2 + 16 = 0$ للمتغير المركب z حيث $z_0 = -2$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي :
- أ) $S = -2, 2 + 2i, 2 - 2i$ ، ب) $S = -2, 4 + 2i, 4 - 2i$ ، ج) $S = 2, 4 + 2i, 4 - 2i$

2) نعتبر القطبتين A, B ذات اللواحق $z_A = 2 + 2i$ و $z_B = 2 - 2i$ على الترتيب فإن المثلث OAB : أ) قائم في O ب) قائم في O ومتساوي الساقين ج) متساوي الساقين .

3) نعتبر التحويل التقطي T المعروف بـ $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ ، طبيعة هذا التحويل .
أ) تشابه مباشر ب) تحاكي ج) دوران .

4) لدينا $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ حيث θ عمدة العدد المركب z ، الشكل الجبري للعدد z' هو :

أ) $z' = 2 + i$ ب) $z' = (\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta) + i(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta)$ ج) $z' = (\cos \frac{\pi}{3}) + i(\sin \frac{\pi}{3})$ د) $z' = 2 + i$

5) مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $\arg(z - z_A) = \arg(iz - z_B)$ هي :

أ) المستقيم (AB) ب) دائرة قطرها $[AB]$ ج) نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء A, B لاحقها $-iz_B$

التمرين الرابع: (07 نقط)

الجزء أ: لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

1- أ) احسب نهايتي g ، على طرفي مجال تعريفها.

ب) احسب $g'(x)$ ، وادرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات g .

2- أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α ينتمي إلى المجال $]-0,72; -0,71[$

ب) حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

الجزء ب: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$; $x > -1; x \neq 0$ و $f(0) = 0$ و $f(x) = (1+x)e^{-x-1}$; $x \leq -1$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) احسب نهايتي f ، على طرفي مجال تعريفها.

2- ادرس اشتقاقية f عند -1 ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

3- أ) بين أنه ، من أجل كل x من $\{0\}$: $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-x \cdot g(x)}{\ln^2(x+1)}$

ب) احسب $f'(x)$ على المجال $]-\infty; -1[$.

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

4- أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) أنشئ المماس (T) وكذا نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

ج) أنشئ المنحنى (C_f)

تعطى: $f(\alpha) \simeq -0,41$ و $f(3) \simeq 6,5$ و $f(-2;5) \simeq -6,7$