

تيسير الرياضيات لطلاب البكالوريا

الشعب الأدبية

شعبة آداب وفلسفة – شعبة آداب ولغات

للأستاذ: حيمان جمال

HIMANE DJAMEL

أستاذ مادة الرياضيات بمتقن بلقاسم الوزري البليدة

السنة الدراسية 2018-2019

كلمة المؤلف

باسم الله الرحمن الرحيم و الحمد لله رب العالمين الذي وفقنا و يسّر لنا من أمره
رشدا ثم الصلاة والسلام على أشرف المرسلين محمد ابن عبد الله الذي هدى الله به
الأمة و أنار به الظلمة و بعد:

يسرنا التقدم بين أيديكم هذا الكتاب و هو قيد التأليف و لأول مرة نسعى إلى تيسير و
تسهيل مادة الرياضيات لكل المستويات بمختلف الشعب و نخص منها الشعب الأدبية
التي يعاني طلابها من التحكم في مادة الرياضيات رغم سهولتها و بساطتها و التي ترجع
إلى عدة أسباب و عوامل و من أبرزها النظرة السلبية للمادة من طرف منتسبي الشعب
الأدبية و التحجج بتخصصاتهم الأدبية دون أي محاولة لدراسة هذه المادة فهم يقنعون
أنفسهم بالفشل و عدم الفهم لأشياء هم أصلا لم يسألوا عنها أي أنهم لم يدركوا ما
فهموا وما لم يفهموا فهم يكتسبون غباوة و بلادة يعمّم تأثيرها على بقية المواد الأدبية
كاللغات التي نخص بالذكر الجانب البلاغي و التركيبي على سبيل المثال الإعراب و ما
يرافقه من كوارث ناتجة بالأساس عن فقدان الذكاء و الحنكة التي نلتمسها في المحتوى
الرياضي. فأول سبب يجب أن يعالج هو الجانب النفسي اتجاه المادة و فائدتها و تأثيرها
حتى و إن تنوعت و اختلفت تخصصاتهم المتفرعة عن الشعب الادبية لدى التحاقهم
بمقاعد الجامعة إلا و نتلمس حضورا لهذه المادة بطريقة أو بأخرى.

ثانيا طرق تقديم دروس هذه المادة بما يتوافق مع الإمكانيات المادية و البشرية التي
تنسجم مع مستوى الطلاب من دون إجهاد أو صراعا مع الزمن لإنهاء البرامج التي

تحتاج لمراجعات نوعاً و كمّاً و مدى نجاعتها و ملائمتها لخصوصيات التعليم في بلادنا.

كما ننوّه أن هذه الطبعة تعد الأولى و لا ريب في احتواءها على أخطاء سواء كانت مطبعية أو لغوية أو حتى علمية فعلى الفاعلين في هذا المجال مراسلتنا لتصحيح و تصويب هذه الأخطاء أو الإفادة بأفكار أو حتى بمؤلفات مماثلة لخدمة و تيسير الدراسة بمختلف المستويات و التخصصات و لما لاّ تعميمها على باقي المواد كما نذكر أن هذا المحتوى متاح بإذن من المؤلف مجاناً بصيغته الإلكترونية سواء للطلبة أو الأساتذة لاستغلاله دراسة أو تدريساً أو في المجال البحثي فما على الطلبة طبعه على شكل كتاب أو مذكرة قصد تسهيل قراءته بانتظام فهو أفضل من الحاسوب الذي يشغل مستعمله عن التركيز المستمر كما نذكر أنه على الطلبة الالتزام بالمقرر الدراسي الذي يحدده أستاذهم في الثانوية التي يدرسون بها و يبقى حل التمارين و الحوليّات خياراً أساسياً لا بديل عنه و وفقكم الله لكل ما هو فيه خير.

و في الأخير لا تنسوننا من صالح دعائكم لنا و لوالدينا و لأئمة المسلمين و عامتهم و السّلام عليكم ورحمة الله و بركاته.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تذكير وبناء المفاهيم

تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

نسمي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المجموعة المَحْصَل عليها بإضافة العدد 1 إلى العدد 0 ثم إضافة 1 باستمرار إلى العدد الناتج و هكذا نحصل على مجموعة غير منتهية و أصغر عنصر فيها هو 0.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots \dots \dots\}$$

خواص مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

1. محدودة من الأسفل أي لها أصغر عنصر و هو الصفر 0.
2. مجموعة غير منتهية أي ليس لها عنصر أكبر يحدّها.
3. مجموع عددين طبيعيين هو دائما عدد طبيعي.
4. الفرق بين عددين طبيعيين ليس دائما عدد طبيعي.
5. جداء عددين طبيعيين هو دائما عدد طبيعي.
6. قسمة عدد طبيعي على عدد طبيعي غير معدوم ليس دائما عدد طبيعي.

تطبيق 01: متى يكون الفرق بين العددين الطبيعيين a و b أي: $a - b$ عددا طبيعيا؟

الجواب: يكون الفرق بين العددين الطبيعيين $a - b$ عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان العدد a أكبر أو يساوي العدد b أي: $a \geq b$ مثال $10 - 7 = 3$.

ملاحظة: إذا كان الفرق بين العددين الطبيعيين $a - b$ سالبا نقول عنه هو عدد صحيح نسبي سالب. كذلك الأعداد الطبيعية هي أعداد صحيحة نسبية موجبة.

تطبيق 02: متى تكون قسمة طبيعي a على عدد طبيعي غير معدوم b أي: $a \div b$ عددا طبيعيا؟.

الجواب: تكون قسمة عدد طبيعي a على عدد طبيعي غير معدوم b أي: $a \div b$ عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان **باقي قسمة** العدد a على العدد b **معدوما** أي: $a = b \times k + 0$ حيث k عدد طبيعي مثال العدد 10 يقبل القسمة على 5 لأن $10 = 5 \times 2 + 0$.

تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

نسمي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ المجموعة المحصل عليها بإضافة العدد 1 إلى العدد 0 ثم إضافة 1 باستمرار إلى العدد الناتج وكذلك بطرح العدد 1 باستمرار وهكذا نحصل على مجموعة **غير منتهية** و**متناظرة** بالنسبة إلى 0.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

خواص مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:

1. غير محدودة لا من الأسفل ولا من الأعلى أي ليس لها أصغر عنصر أو أكبر عنصر.
2. مجموعة غير منتهية ومركزها الصفر أي متناظرة بالنسبة إلى 0.
3. يسمى كل عدد صحيح نسبي a - **نظير** أو **معاكس** العدد الصحيح النسبي a .
4. مجموع وفرق وجداء عددين صحيحين هو دائما عدد صحيح نسبي.
5. قسمة عدد صحيح نسبي على عدد صحيح نسبي غير معدوم ليس دائما عدد صحيحا معدوما.

تطبيق 03: متى تكون قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: $a \div b$ عددا صحيحا نسبيا؟.

الجواب: تكون قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: $a \div b$ عددا صحيحا نسبيا إذا وفقط إذا كان باقي قسمة العدد a على العدد b معدوما أي: $a = b \times k + 0$ حيث k عدد صحيح نسبي مثال العدد -35 يقبل القسمة على 7 لأن $-35 = 7 \times (-5) + 0$.

ملاحظة: نسمي قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: a/b عددا **ناطقا**. ويمكننا تعريف مجموعة **الأعداد الناطقة** $\mathbb{Q}$ بمجموعة الأعداد التي تكتب على شكل نسبة أو كسر يكون فيه البسط و المقام عددين صحيحين نسبين ونخص بالذكر المقام غير معدوم أي لا يساوي الصفر.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

تحذير: حذار المقام أبدا لا يكن معدوما أي لا يساوي الصفر لأن الصفر لا

يقسم أي عدد فالكتابة $\frac{a}{0}$ **خاطئة** مهما كانت قيمة العدد a بينما الكتابة $\frac{0}{b}$

صحيحة و تساوي 0 مهما كانت قيمة العدد b **المختلفة عن الصفر**.

تذكير:

1. الرمز $\mathbb{N}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد الطبيعية الغير معدومة.
2. الرمز $\mathbb{Z}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية الغير معدومة.
3. الرمز $\mathbb{D}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد العشرية الغير معدومة.
4. الرمز $\mathbb{Q}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد الناطقة الغير معدومة.
5. الرمز $\mathbb{R}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الغير معدومة.

6. الرمز $\in$ يشير إلى الانتماء و يستخدم لعنصر أو عدة عناصر منفردة تنتهي إلى مجموعة مثال $1 \in \mathbb{N}$ ونقرأ العدد 1 ينتهي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية كذلك $5, -3, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ ونقرأ الأعداد $5, -3, \frac{1}{2}$ تنتهي إلى مجموعة الأعداد الناطقة.

7. يجب أن نفرق بين عنصر منفرد و مجموعة تحتوي على عنصر وحيد مثال: $1 \in \mathbb{N}$ ونقرأ العدد 1 ينتهي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بينما الكتابة $\{1\} \subset \mathbb{N}$ ونقرأ المجموعة المكونة من العدد 1 محتواة في مجموعة الأعداد الطبيعية.

8. نرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$ أو بالرمز $\{\}$ وهي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر.

9. الرمز $\subset$ يشير إلى الاحتواء و يستخدم لمجموعة أو عدة مجموعات محتواة في مجموعة (أي توجد بداخلها) مثال $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ونقرأ مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية كذلك لدينا

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

10. الرمز $\cap$ يشير إلى التقاطع و يستخدم لتقاطع مجموعتين أو عدة مجموعات وهي مجموعة العناصر المشتركة بين هذه المجموعات (أي تنتهي إلى تلك المجموعات في آن واحد) مثال $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ ولدينا أيضا مجموعة قواسم العدد الطبيعي 21 هي $d_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$ ومجموعة قواسم العدد الطبيعي 15 هي $d_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ ومجموعة قواسم العدد الطبيعي 3 هي $d_3 = \{1, 3\}$ وعليه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 15 و 21 هو مجموعة قواسم قاسمهما المشترك 3 علما أن $\text{pgcd}(15, 21) = 3$ أي

$$d_{15} \cap d_{21} = d_3$$

11. الرمز $\cup$ يشير إلى الإتحاد و يستخدم لإتحاد مجموعتين أو عدة مجموعات وهي مجموعة العناصر المشتركة و الغير مشتركة مأخوذة مرة واحدة من دون تكرار بين هذه المجموعات (أي تنتمي إلى إحدى هذه المجموعات وليس بالضرورة كلها) مثال $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ و لدينا أيضا مجموعة قواسم إحدى العددين الطبيعيين 15 أو 21 هي:

$$d_{15} \cup d_{21} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21\}$$

12. لغتًا نعبر عن التقاطع بحرف العطف "و" أو أي أداة تفيد المشاركة و نعبر عن الإتحاد بحرف العطف "أو" أو أي أداة تفيد الاختيار بين شيئين يمكن الجمع بينهما.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تعريف العدد الطبيعي التام (عدد مثالي):

نسمي عددا طبيعيا تاما كل عدد طبيعي n مجموع كل قواسمه الأصغر منه تماما يساوي ذلك العدد n .

مثال 01: العدد 6 هو عدد تام لأن مجموع قواسمه المختلفة عنه هو 6

$$1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{و} \quad d_6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

مثال 02: العدد 28 هو عدد تام لأن مجموع قواسمه المختلفة عنه هو 28

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 \quad \text{و} \quad d_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

تطبيق 04: بإتباع نفس الطريقة بين أن العددين 496 و 8128 عددين تامين.

تعريف العددين الطبيعيين المتحابين (العددان المتراضيان):

نقول عن عددين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم المختلفة لأي منهما يساوي

العدد الآخر. مثال ذلك : العددان 220 و 284 متحابان حيث أن مجموع قواسم

$$\text{العدد 220 هو: } 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$\text{في حين أن مجموع قواسم العدد 284 هو: } 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف: a و b عددان صحيحان نسبيا و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم

العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a = b \times k$ نقول كذلك أن b قاسم

للعدد a أو أن a مضاعف للعدد .

نكتب $b \mid a$ ونقرأ b يقسم .

أمثلة:

- $48 = 8 \times 6$ نقول أن 8 قاسم للعدد 48 أو أن 48 مضاعف للعدد 8.
- $48 = (-8) \times (-6)$ نقول أن -6 قاسم للعدد 48 أو أن 48 مضاعف للعدد -6.
- $-6 = (-3) \times 2$ نقول أن -3 قاسم للعدد -6 أو أن -6 مضاعف للعدد -3.
- $n = n \times 1$ نقول أن **1 قاسم لجميع الأعداد وكل عدد يقسم نفسه.**
- $0 = n \times 0$ نقول أن كل الأعداد الصحيحة النسبية غير معدومة تقسم 0.

• **حذار الصفر لا يقسم أي عدد.**

ملاحظة: للعددين الصحيحين النسبيين a و $-a$ نفس القواسم في المجموعة $\mathbb{Z}$ أي

$$a = b \times k \quad \text{و} \quad -a = b \times (-k)$$

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:

سميت **بالقسمة الإقليدية** نسبة إلى عالم الرياضيات اليوناني **إقليدس** الذي ولد سنة 300 قبل الميلاد و عاش في مدينة الإسكندرية المصرية و تتألف عملية القسمة الإقليدية من العدد الصحيح النسبي a الذي يسمى **المقسوم** و العدد الصحيح النسبي الغير معدوم b و يسمى **القاسم** و عادة ما يكون طبيعيا و من العدد الصحيح النسبي q الذي يسمى **حاصل قسمة** و العدد الطبيعي r الذي يسمى **الباقى** و هو أصغر تماما من القيمة الموجبة للعدد b .

• نسي الكتابة $a = b \times q + r$ حيث $|b| > r \geq 0$ بالكتابة الأفقية للقسمة الإقليدية.

• نسي الشكل الموافق بالكتابة العمودية للقسمة الإقليدية.

المقسوم	القاسم
الباقى	حاصل القسمة

مثال: القسمة الإقليدية للعدد 115 على 12 هي: $115 = 12 \times 9 + 7$

$$\begin{array}{r|l} 115 & 12 \\ - 108 & 9 \\ \hline 7 & \end{array}$$

أي حاصل قسمة و باقي قسمة العدد 115 على 12 هما 9 و 7 على التوالي.

تطبيق 05: بإتباع نفس الطريقة عين حاصل قسمة و باقي قسمة العدد 89 -
على 8 و العدد 220 على 10.

ملاحظة: إذا كان باقي قسمة a على b يساوي الصفر نقول b يقسم a .

خوارزمية أقليدس لتحديد القاسم المشترك الأكبر

تعريف: خوارزمية أقليدس هي تقنية يمكننا من تحديد القاسم المشترك الأكبر بين عددين صحيحين نسبيين طبيعيين.

الطريقة: نعتبر a و b عددين صحيحين نسبيين طبيعيين بحيث $a < b$.

نقوم بقسمة b على a و ليكن الباقي هو r_1 ثم نقوم بقسمة a على r_1 و
ليكن الباقي هو r_2 ثم نقوم بقسمة r_1 على r_2 و لنعتبر أن الباقي هو r_3 ثم
نقسم r_2 على r_3 و نكرر العملية حتى يكون الباقي هو 0.
القاسم المشترك الأكبر ل a و b هو **آخر باقي غير معدوم**.

مثال: القاسم المشترك للعددين الطبيعيين 252 و 855 هو: 9

$$855 = 3 \times 252 + 99$$

$$252 = 2 \times 99 + 54$$

$$99 = 1 \times 54 + 45$$

$$54 = 1 \times 45 + 9$$

$$45 = 5 \times 9 + 0$$

أخر باقي غير معدوم هو: 9 أي: $pgcd(855, 252) = 9$

نتيجة: إذا كان العدد الطبيعي a يقسم العدد الطبيعي الغير معدوم b فإن القاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد a لأن العدد a يمثل آخر باقي غير معدوم لخوارزمية إقليدس لقسمة العدد b على a أي: $b = a \times q + 0$

مثال: القاسم المشترك الأكبر للعددين 322 و 966 هو: 322 لأن 322 يقسم 966.

الحصر بين عددين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح:

ليكن a عدد صحيح نسبي و b عدد صحيح نسبي غير معدوم و q حاصل قسمة a على b أي $a = b \times q + r$ نسبي حصرا للعدد الصحيح a بين مضاعفين متعاقبين للعدد الصحيح b الكتابة التالية

$$b \times q \leq a < b \times (q + 1)$$

مثال: $108 \leq 115 < 120$ هو حصر للعدد 115 بين مضاعفين متتاليين للعدد الصحيح 12 لأن: $12 \times 9 = 108 \leq 115 < 120 = 12 \times 10$

وهذا بأخذ $a = 115$ و $b = 12$ و $q = 9$

تمرين محلول 01:

عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ثم عين حصرا للعدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية:

i. $a = 8159$ و $b = 52$.

ii. $a = 725$ و $b = 91$.

iii. $a = -7361$ و $b = 47$.

الحل:

i. $8159 = 52 \times 156 + 47$ أي 156 هو حاصل قسمة 8159 على

52 و 47 هو باقي القسمة. إذن $52 \times 156 \leq 8159 < 52 \times 157$

أي $8112 \leq 8159 < 8164$.

ii. $725 = 91 \times 7 + 88$ أي 7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و

88 هو باقي القسمة. إذن $91 \times 7 \leq 725 < 91 \times 8$

أي $637 \leq 725 < 728$.

iii. $-7361 = 47 \times (-157) + 18$ أي (-157) هو حاصل

قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي القسمة.

إذن $47 \times (-157) \leq -7361 < 47 \times (-156)$

أي $-7379 \leq -7361 < -7332$.

تمرين محلول 02:

ليكن a عدد الصحيح باقي قسمته على 21 هو 15.

i. ما هو باقي قسمة العدد على 7 ؟

ii. ما هو باقي قسمة العدد على 3 ؟

الحل: باقي قسمة العدد a على 21 هو 15 معناه يوجد عدد صحيح q

$$a = 21 \times q + 15 \quad \text{حيث: (حاصل قسمة } a \text{ على 21)}$$

i. و عليه $a = 21 \times q + 15$ تكافئ $a = 7 \times (3 \times q) + 7 \times 2 + 1$ و

منه $a = 7 \times (3 \times q + 2) + 1$ أي باقي قسمة a على 7 هو 1.

ii. و عليه $a = 21 \times q + 15$ تكافئ $a = 3 \times (7 \times q) + 3 \times 5$ و

منه $a = 3 \times (7 \times q + 5) + 0$ أي باقي قسمة a على 3 هو 0.

الأعداد الأولية و تطبيقاتها

التذكير بتعريف العدد الطبيعي الأولي: نسمي عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 بالعدد الأولي إذا كان له قاسمان مختلفان فقط وهما العدد 1 و العدد نفسه.

ملاحظات:

1. أصغر عدد أولي هو 2.
2. العدد 1 ليس أولي لأن له قاسم وحيد وهو نفسه.
3. العدد 0 ليس أولي لأن له ما لا نهاية من القواسم.
4. العدد الذي ليس أوليا يسمى عددا مركبا.
5. يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأولية (مبرهنة إقليدس).
6. كل عدد طبيعي أكبر تماما من 1 إما هو عدد أولي أو جداء عوامل طبيعية أولية (النظرية الأساسية في الحساب).
7. الأعداد الأولية الأصغر من مئة هي: 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29 . 31 . 37 . 41 . 43 . 47 . 53 . 59 . 61 . 67 . 71 . 73 . 79 . 83 . 89 . 97 .
8. لإثبات عدد طبيعي أنه ليس أولي يكفي إيجاد قاسم لهذا العدد مختلف تماما عن الواحد و العدد نفسه مثال العدد 21 ليس أولي لأنه يقبل 7 كقاسم مختلف عن 1 و 21 .
9. لإثبات عدد طبيعي أنه أولي يكفي إثبات أن لا يقبل قاسم أصغر من جذره التربيعي سوى العدد 1 مثال 19 عدد أولي لأن $4,36 \approx \sqrt{19}$ بينما الأعداد الأولية الأصغر منه وهي 2 و 3 لا تقسم 19 و عليه 19 عدد أولي (تسمى هذه الخاصية بخاصية إيراتوستان).

تطبيق 06: أدرس أولية الأعداد الطبيعية التالية: 109 ، 127 ، 201 ، 45 ، 999.

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل طبيعية أولية:

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد ($2 \leq n$) فيكون حسب النظرية الأساسية في الحساب إما هو عدد أولي أو يفكك إلى جداء عوامل أولية طبيعية أي بعبارة أخرى إذا كان n عدد ليس أوليا فإن تفكيكه إلى جداء عوامل طبيعية أولية تسمى عملية التحليل إلى جداء عوامل أولية طبيعية ، وللقيام بهذه العملية نقوم بقسمة العدد الطبيعي n على مجموعة الأعداد الأولية مرتبة تصاعديا بدءا من العدد 2 إلى آخر عدد أولي يقسم العدد n فإذا قبل القسمة على العدد 2 نكرر العملية وإذا لم يقبل نمر إلى العدد الأولي الذي بعده وهو 3 ثم نكرر نفس الإجراء مع باقي الأعداد الأولية 5 ، 7 ، 11 إلخ. إلى غاية حصولنا على العدد 1 وهنا تتوقف العملية.

تطبيق 07: حلل إلى جداء عوامل طبيعية أولية العدد 720.

الحل:

نستعين بالكتابة العمودية لإجراء عمليات القسمة المتتالية على الأعداد الأولية كما في الشكل المقابل حيث نقوم بقسمة 720 على 2 نحصل على 360 وبقسمة 360 على 2 نحصل على 180 وبقسمة 180 على 2 نحصل على 90 وبقسمة 90 على 2 نحصل على 45 و بما أن 45 لا يقبل القسمة على 2 نمر للعدد الأولي الذي بعده وهو 3 وبقسمة 45 على 3 نحصل على 15 وبقسمة 15 على 3 نحصل على 5 و بما أن 5 لا يقبل القسمة على 3 نمر للعدد الأولي الذي بعده وهو 5 وبقسمة 5 على 5 نحصل على 1 و هنا تتوقف عملية القسمة لحصولنا على العدد واحد.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

كما يمكننا كتابة التحليل أفقيا كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$
 أي المعامل 2 أربع مرات والمعامل 3 مرتين والمعامل 5 مرة واحدة.

تطبيق 08: بنفس الطريقة حلل إلى جداء عوامل طبيعية أولية الأعداد 25000 و 257 و 1024 و 510510.

تطبيقات التحليل إلى جداء عوامل طبيعية أولية:

1. تعيين عدد قواسم عدد طبيعي :

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد ($2 \leq n$) فيكون تحليله حسب النظرية الأساسية في الحساب من الشكل:

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_r^{a_r}$$

حيث: $p_1, p_2, \dots, p_r$ أعداد طبيعية أولية متميزة مثنى مثنى (مختلفة عن بعضها البعض) و $a_1, a_2, \dots, a_r$ أعداد طبيعية علما أن r عدد طبيعي غير معدوم. فيكون عدد قواسم العدد الطبيعي n هو بالضبط الجداء

$$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_r + 1)$$

مثال: تحليل العدد 720 هو كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

وعليه عدد قواسم العدد 720 هو الجداء $(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$

ويساوي الجداء $30 = 5 \times 3 \times 2$

تطبيق 09: بنفس الطريقة عين عدد قواسم الأعداد الطبيعية 25000 و 257 و 1024 و 510510.

حل مختصر للتطبيق 09:

عدد قواسم العدد الطبيعي 25000 هو بالضبط 24.

عدد قواسم العدد الطبيعي 257 هو بالضبط 2.

عدد قواسم العدد الطبيعي 1024 هو بالضبط 11.

عدد قواسم العدد الطبيعي 510510 هو بالضبط 128.

II. تعين مجموعة قواسم عدد طبيعي :

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد $(2 \leq n)$ فيكون تحليله حسب النظرية الأساسية في الحساب من الشكل:

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_r^{a_r}$$

عند قيامنا بتعويض a_1 بأي عدد طبيعي محصور بين 0 و a_1 في الجداء السابق

نتحصل على قاسم طبيعي للعدد n وبتكرار العملية مع جميع الأعداد $a_r, \dots, a_2, a_1$

في آن واحد نجد كل قواسم العدد الطبيعي n والتي عددها بالضبط

$$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_r + 1)$$

مثال: تحليل العدد 720 هو كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

وعليه عدد قواسم العدد 720 هو الجداء $(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$

ويساوي الجداء $30 = 5 \times 3 \times 2$ و هي كالتالي:

$$d_1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$$

$$d_2 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= 2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3 \\
d_4 &= 2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15 \\
d_5 &= 2^0 \times 3^2 \times 5^0 = 9 \\
d_6 &= 2^0 \times 3^2 \times 5^1 = 45 \\
d_7 &= 2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2 \\
d_8 &= 2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10 \\
d_9 &= 2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6 \\
d_{10} &= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30 \\
d_{11} &= 2^1 \times 3^2 \times 5^0 = 18 \\
d_{12} &= 2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90 \\
d_{13} &= 2^2 \times 3^0 \times 5^0 = 4 \\
d_{14} &= 2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20 \\
d_{15} &= 2^2 \times 3^1 \times 5^0 = 12 \\
d_{16} &= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60 \\
d_{17} &= 2^2 \times 3^2 \times 5^0 = 36 \\
d_{18} &= 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180 \\
d_{19} &= 2^3 \times 3^0 \times 5^0 = 8 \\
d_{20} &= 2^3 \times 3^0 \times 5^1 = 40 \\
d_{21} &= 2^3 \times 3^1 \times 5^0 = 24 \\
d_{22} &= 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120 \\
d_{23} &= 2^3 \times 3^2 \times 5^0 = 72 \\
d_{24} &= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360 \\
d_{25} &= 2^4 \times 3^0 \times 5^0 = 16 \\
d_{26} &= 2^4 \times 3^0 \times 5^1 = 80 \\
d_{27} &= 2^4 \times 3^1 \times 5^0 = 48 \\
d_{28} &= 2^4 \times 3^1 \times 5^1 = 240 \\
d_{29} &= 2^4 \times 3^2 \times 5^0 = 144
\end{aligned}$$

$$d_{30} = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 = 720$$

و بترتيبها نحصل على كل قواسم 720 وهي:

$$d(720) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720\}.$$

تطبيق 10: بنفس الطريقة عين قواسم العدد الطبيعي 126.

حل تطبيق 10: لدينا تحليل العدد 126 إلى جداء عوامل أولية طبيعية هو:

$$126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$$

وعليه عدد قواسم العدد 126 هو الجداء $(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$

ويساوي الجداء $12 = 2 \times 3 \times 2$ و هي كالتالي:

$$d_1 = 2^0 \times 3^0 \times 7^0 = 1$$

$$d_2 = 2^0 \times 3^0 \times 7^1 = 7$$

$$d_3 = 2^0 \times 3^1 \times 7^0 = 3$$

$$d_4 = 2^0 \times 3^1 \times 7^1 = 21$$

$$d_5 = 2^0 \times 3^2 \times 7^0 = 9$$

$$d_6 = 2^0 \times 3^2 \times 7^1 = 63$$

$$d_7 = 2^1 \times 3^0 \times 7^0 = 2$$

$$d_8 = 2^1 \times 3^0 \times 7^1 = 14$$

$$d_9 = 2^1 \times 3^1 \times 7^0 = 6$$

$$d_{10} = 2^1 \times 3^1 \times 7^1 = 42$$

$$d_{11} = 2^1 \times 3^2 \times 7^0 = 18$$

$$d_{12} = 2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$$

و بترتيبها نتحصل على كل قواسم 126 وهي:

$$d(126) = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126\}.$$

تطبيق 11: بنفس الطريقة عين قواسم الأعداد الطبيعية 78125 و 9999 و 1024 و 5491.

III. تعين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

التذكير بتعريف القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين. نسمي مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين هي مجموعة كل الأعداد الطبيعية التي تقسم العددين a و b في آن واحد و عليه هذه المجموعة ليست خالية (فارغة) لأن العدد 1 دائما قاسم مشترك للعددين a و b ونسمي أكبر عنصر في هذه المجموعة **بالقاسم المشترك الأكبر** للعددين a و b ونرمز له بالرمز $pgcd(a, b)$

ملاحظات:

1. إذا كان $pgcd(a, b) = 1$ نقول عن العددين الطبيعيين a و b أنهما **أوليان فيما بينهما** مثال: 17 و 19 أوليان فيما بينهما لأن $pgcd(17, 19) = 1$.
2. **حذار! القاسم المشترك الأصغر** للعددين الطبيعيين a و b هو دائما العدد 1.
3. مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.
4. يمكننا تعين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b بواسطة **خوارزمية إقليدس** (بالقسمة أو بالطرح المتتالي) و كذلك **بالتحليل** إلى جداء عوامل أولية طبيعية.
5. $pgcd(b, a) = pgcd(a, b)$ (تبدلي أي ترتيب العددين غير مهم)
6. إذا كان العدد الطبيعي a يقسم العدد الطبيعي b فإن $pgcd(a, b) = a$.

تطبيق 12: عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين x و y

علما أن قاسمهما المشترك الأكبر هو 24.

الحل : نحن نعلم أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين x و y هي

مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر وعليه هي مجموعة قواسم 24 .

$$d(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

تعين القاسم المشترك الأكبر باستخدام التحليل :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث تحليلهما إلى جداء عوامل أولية

يعطى من الشكل:

$$b = q_1^{b_1} \times q_2^{b_2} \times \dots \times q_s^{b_s} \quad \text{و} \quad a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_r^{a_r}$$

حيث: $p_1, p_2, \dots, p_r$ ($q_1, q_2, \dots, q_s$ على التوالي) أعداد طبيعية أولية

متمايزة متنى متنى (مختلفة عن بعضها البعض) و $a_1, a_2, \dots, a_r$ و $b_1, b_2, \dots, b_s$

b_s على التوالي) أعداد طبيعية علما أن r و s عددين طبيعيين غير معدومين.

و عليه

القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a و b هو جداء
كل عواملها المشتركة المأخوذة بأصغر أس و من دون تكرار.

مثال: القاسم المشترك الأكبر للعددين 3500 و 7500 هو 500.

$$7500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4 \text{ هو تحليل العدد } 7500$$

$$3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7^1 \text{ هو تحليل العدد } 3500$$

$$500 = 2^2 \times 5^3 \text{ نلاحظ جداء العوامل المشتركة المأخوذة بأصغر أس هو}$$

تطبيق 13: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2040 و 6500 بثلاث طرق مختلفة.

الحل : الطريقة الأولى: (التحليل إلى جداء عوامل أولية)

$$6500 = 2^2 \times 5^3 \times 13^1 \text{ هو تحليل العدد } 6500$$

$$2040 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \text{ هو تحليل العدد } 2040$$

$$20 = 2^2 \times 5^1 \text{ نلاحظ جداء العوامل المشتركة المأخوذة بأصغر أس هو}$$

$$\text{وعليه القاسم المشترك الأكبر للعددين } 6500 \text{ و } 2040 \text{ هو } 20.$$

الطريقة الثانية: (خوارزمية إقليدس "القسمة")

$$6500 = 3 \times 2040 + 380$$

$$2040 = 5 \times 380 + 140$$

$$380 = 2 \times 140 + 100$$

$$140 = 1 \times 100 + 40$$

$$100 = 2 \times 40 + 20$$

$$40 = 2 \times 20 + 0$$

أخر باقي غير معدوم هو: 20 أي: $\text{pgcd}(2040, 6500) = 20$

الطريقة الثالثة: (خوارزمية إقليدس "الطرح المتتالي")

$$6500 - 2040 = 4460$$

$$4460 - 2040 = 2420$$

$$2420 - 2040 = 380$$

$$2040 - 380 = 1660$$

$$1660 - 380 = 1280$$

$$1280 - 380 = 900$$

$$900 - 380 = 520$$

$$520 - 380 = 140$$

$$380 - 140 = 240$$

$$240 - 140 = 100$$

$$140 - 100 = 40$$

$$100 - 40 = 60$$

$$60 - 40 = 20$$

$$40 - 20 = 20$$

$$20 - 20 = 0$$

أخرباقي غير معدوم هو: **20** أي: $pgcd(2040, 6500) = 20$

IV. تعيين المضاعف المشترك الأصغر لعددین طبيعيين :

التذكير بتعريف المضاعف المشترك الأصغر لعددین طبيعيين :

ليكن a و b عددین طبيعيين غير معدومين. نسمي مجموعة المضاعفات المشتركة لهذين العددین هي مجموعة كل الأعداد الطبيعية التي يقسمها العددین a و b في آن واحد و عليه هذه المجموعة ليست منتهية (ما لا نهاية) لأن مضاعفات العدد $a \times b$ دائما هي مضاعفات مشتركة للعددین a و b و نسمي أصغر عنصر غير معدوم في هذه المجموعة **بالمضاعف المشترك الأصغر** للعددین a و b و نرمز له بالرمز $ppcm(a, b)$.

ملاحظات:

1. إذا كان $ppcm(a, b) = a \times b$ نقول عن العددین الطبيعيين a و b أنهما **أوليان فيما بينهما** مثال: 17 و 19 أوليان فيما بينهما لأن بالرمز $ppcm(17, 19) = 17 \times 19 = 323$.
2. **حذار ! المضاعف المشترك الأصغر للعددین الطبيعيين a و b مختلف تماما عن العدد 0.**
3. مجموعة المضاعفات المشتركة للعددین a و b هي مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر.
4. يمكننا تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددین a و b بواسطة **تعيين أول تقاطع لمجموعتي مضاعفات كل من a و b** (هذه الطريقة غير فعالة مع الأعداد الكبيرة) و كذلك **بالتحليل** إلى جداء عوامل أولية طبيعية كما يمكننا استنتاجه بدلالة القاسم المشترك الأكبر.
5. $ppcm(b, a) = ppcm(a, b)$ (تبديلي أي ترتيب العددین غير مهم)
6. إذا كان العدد الطبيعي a يقسم العدد الطبيعي b فإن $ppcm(a, b) = b$.

تطبيق 14: عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين x و y علما أن مضاعفهما المشترك الأصغر هو 15.

الحل : نحن نعلم أن مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين الطبيعيين x و y هي مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر وعليه هي مجموعة مضاعفات 15

$$M(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\}.$$

تعين المضاعف المشترك الأصغر باستخدام التحليل :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث تحليلهما إلى جداء عوامل أولية يعطى من الشكل:

$$b = q_1^{b_1} \times q_2^{b_2} \times \dots \times q_s^{b_s} \quad \text{و} \quad a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_r^{a_r}$$

حيث: $p_1, \dots, p_2, p_r$ ($q_1, q_2, \dots, q_s$ على التوالي) أعداد طبيعية أولية متميزة مثنى مثنى (مختلفة عن بعضها البعض) و $a_1, a_2, \dots, a_r$ و $b_1, b_2, \dots, b_s$ على التوالي) أعداد طبيعية علما أن r و s عددين طبيعيين غير معدومين.

و عليه

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين a و b هو جداء كل عواملهما المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس و من دون تكرار.

مثال: المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3500 و 7500 هو 52500.

تحليل العدد 7500 هو $7500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4$

تحليل العدد 3500 هو $3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس هو

$$52500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4 \times 7^1$$

تطبيق 15: عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2040 و 6500 بثلاث طرق مختلفة.

الحل : الطريقة الأولى: (التحليل إلى جداء عوامل أولية)

تحليل العدد 6500 هو $6500 = 2^2 \times 5^3 \times 13^1$

تحليل العدد 2040 هو $2040 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس هو

$$663000 = 2^3 \times 3^1 \times 5^3 \times 13^1 \times 17^1$$

وعليه المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6500 و 2040 هو 663000.

الطريقة الثانية: (تعيين أول تقاطع لمجموعتي مضاعفات كل من 6500 و 2040)

مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي 2040 هي:

$$M(2040) = \{0, 2040, 4080, 6120, \dots, 660960, 663000, 669500, \dots\}.$$

مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي 6500 هي:

$$M(6500) = \{0, 6500, 13000, 19500, \dots, 656500, 663000, 665040, \dots\}.$$

أول تقاطع غير معدوم هو: 663000 أي:

$$ppcm(2040, 6500) = 663000$$

الطريقة الثالثة: (إستنتاجه بدلالة القاسم المشترك الأكبر)

نعلم أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 6500 و 2040 هو 20 و عليه

$$ppcm(2040, 6500) = \frac{2040 \times 6500}{20}$$

أي:

$$ppcm(2040, 6500) = 663000$$

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك
الأكبر لعددين طبيعيين

مبرهنة (نظرية): ليكن $pgcd(a, b)$ و $ppcm(a, b)$ هما القاسم المشترك الأكبر

و المضاعف المشترك الأصغر على التوالي للعددين الطبيعيين a و b إذن جداءهما

يساوي جداء هذين العددين أي يحققان العلاقة:

$$pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = a \times b$$

تمرين محلول 03:

1. عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين **120** و **75** إذا علمت أن قاسمهما

المشترك الأكبر هو **15**.

2. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين **1530** و **255** إذا علمت أن

مضاعفهما المشترك الأصغر هو **1530**.

3. أدرس قيم العددين الطبيعيين **a** و **b** إذا علمت أن مضاعفهما المشترك

الأصغر هو **12** و قاسمهما المشترك الأكبر هو **3**.

الحل:

1. تعين المضاعف المشترك الأصغر للعددين **120** و **75**

$$ppcm(120, 75) = \frac{120 \times 75}{pgcd(120, 75)} = \frac{120 \times 75}{15} = \mathbf{600}$$

2. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين **1530** و **255**

$$pgcd(255, 1530) = \frac{255 \times 1530}{ppcm(255, 1530)} = \frac{255 \times 1530}{1530} = \mathbf{255}$$

3. دراسة قيم العددين الطبيعيين **a** و **b** علما أن مضاعفهما المشترك الأصغر

هو **12** و قاسمهما المشترك الأكبر هو **3**. نحن نعلم أن:

$$pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = a \times b = 3 \times 12 = 36$$

إذن نبحث الأعداد الطبيعية التي جداءها يساوي 36 أي: $a \times b = 36$

36 وعليه $a = \frac{36}{b}$ معناه a و b قاسمان للعدد 36 وتعطى مجموعة

قواسم 36 من الشكل:

$$d(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$$

يكون عندئذ قيم a و b تنتمي مجموعة الثنائيات التالية:

$$(a, b) \in \{(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)\}.$$

وبما أن $pgcd(a, b) = 3$ و $ppcm(a, b) = 12$ فإن الثنائيات

الوحيدة التي تحقق المطلوب هي:

$$(a, b) \in \{(3, 12), (12, 3)\}.$$

القوى الصحيحة و خواصها

التذكير بتعريف القوى الصحيحة :

ليكن a عدد حقيقي كفي و n عدد طبيعي غير معدوم. نسي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a العدد a^n حيث:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ عاملا}}$$

ملاحظة: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a و n عدد طبيعي غير معدوم.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{لدينا}$$

اصطلاح: من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $a^0 = 1$

أمثلة:

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000 \quad .1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01 \quad .2$$

$$10^{100} = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{100 \text{ عاملا}} \quad .3$$

نسي العدد 10^{100} بالعدد **جوجل** "gogol" و منه أشتق اسم محرك البحث العالمي Google للانترنت و يعني العدد 1 متبوع ب 100 صفر.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين غير معدومين a و b و من أجل كل عددين طبيعيين n و m لدينا:

$$a^{n+m} = a^n \times a^m \quad .1$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \quad .2$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{m \times n} = (a^m)^n \quad .3$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m \quad .4$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad .5$$

$$1^n = 1 \quad .6$$

لازمة 01: من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عددين طبيعيين n و r (n غير معدوم) و كل عدد صحيح نسبي q لدينا:

$$a^{n \times q + r} = (a^n)^q \times a^r = (a^q)^n \times a^r$$

البرهان: من الخاصية رقم 1 لدينا:

$$a^{n \times q + r} = a^{n \times q} \times a^r$$

و من الخاصية رقم 3 لدينا:

$$a^{n \times q + r} = (a^n)^q \times a^r = (a^q)^n \times a^r$$

لازمة 02: من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \\ -1 & \text{إذا كان } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

البرهان:

- إذا كان n عددا زوجيا فإن n يكتب من الشكل $n = 2 \times k$ عندئذ من الخواص السابقة يكون:

$$(-1)^n = ((-1)^2)^k = (1)^k = 1$$

- إذا كان n عددا فرديا فإن n يكتب من الشكل $n = 2 \times k + 1$ عندئذ من اللازمة السابقة يكون:

$$(-1)^n = ((-1)^2)^k \times (-1)^1 = (1)^k \times (-1) = -1$$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

توافق عددين صحيحين نسبيين بترديد عدد طبيعي غير معدوم:

ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد طبيعي غير معدوم ، نقول عن العددين a و b متوافقان بترديد العدد n إذا كان لهما نفس باقي القسمة الإقلدية على n ونكتب : $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n أي: a و b لهما نفس الباقي عند قسمتهما على n .

أمثلة:

- $28 \equiv 13[5]$ ونقرأ 28 يوافق 13 بترديد 5 ومعناه 28 و 13 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 5 وهو العدد 3.
- $57 \equiv -13[10]$ ونقرأ 57 يوافق -13 بترديد 10 ومعناه 57 و -13 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 10 وهو العدد 7.
- $77 \equiv 0[11]$ ونقرأ 77 يوافق 0 بترديد 11 ومعناه 77 و 0 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 11 وهو العدد 0.
- من أجل كل عدد صحيح x لدينا $x \equiv 0[1]$

مبرهنة: ليكن a و b عددان صحيحان نسبيان و n عدد طبيعي غير معدوم يكون لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقلدية على n فقط إذا كان $a - b$ مضاعفا للعدد n .

نتيجة: ليكن a و b عددان صحيحان نسبيا و n عدد طبيعي غير معدوم يكون لـ a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعفا للعدد n .

تمرين محلول 04:

- i. عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7. ماذا تلاحظ؟
- ii. هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟
- iii. بين أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ متوافقان بترديد $n = 11$.
ما هو باقي قسمة $a - b$ على n .
- iv. بين أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ متوافقان بترديد $n = 13$.
ما هو باقي قسمة $a - b$ على n .

الحل:

- i. باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 هو 2 نلاحظ أن لهما نفس الباقي وهو 2 ونقول أن العددين 660 و 366 متوافقان بترديد العدد 7 ونكتب :
 $660 \equiv 366 [7]$
- ii. العددان 274 و 69 ليس متوافقان بترديد 3 لأن ليس لهما نفس باقي القسمة على 3 وهما على الترتيب 1 و 0.
- iii. بما أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ لهما نفس باقي قسمة على 11 وهو 3 فهما متوافقان بترديد $n = 11$ وعليه باقي قسمة $a - b$ على n هو 0.
- iv. بما أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ لهما نفس باقي قسمة على 13 وهو 5 فهما متوافقان بترديد $n = 13$ وعليه باقي قسمة $a - b$ على n هو 0.

خاصية: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$).

كل عدد صحيح يوافق بترديد n باقي قسمته على n .

البرهان:

ليكن a عدد صحيح و r باقي قسمته على n نعلم أن يوجد عدد صحيح q حيث:

$$a = n \times q + r \text{ و } 0 \leq r < n \text{ ومنه } a - r = n \times q \text{ و بتالي } r$$

مضاعف لـ n .

ملاحظة: نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0 \leq r < n$ فمثلا $27 \equiv 7[5]$ و 7 ليس

باقي قسمة 27 على 5 لأن $7 \geq 5$ أما الباقي هو 2 لأن $27 \equiv 2[5]$ و $0 \leq 2 < 5$

تمرين محلول 05: (الكتاب المدرسي صفحة 13)

من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة والخاطئة:

(1) $26 \equiv 11[5]$

(2) $-32 \equiv 18[10]$

(3) $478 \equiv 32[5]$

(4) $58 \equiv -5[7]$

(5) $63^2 \equiv 14[5]$

(6) $144 \equiv 11[19]$

(7) $131^2 \equiv 25[12]$

(8) $48^3 \equiv 36[7]$

طريقة: للبرهان على أن $a \equiv b[n]$ يمكن البرهان على أن $a - b$ مضاعف لـ n

أو البرهان على أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

الحل:

(1) $26 - 11 = 15$ و $15 = 3 \times 5$. إذن $26 \equiv 11[5]$ صحيحة.

(2) $-32 - 18 = -50$ و $-50 = (-5) \times 10$. إذن $-32 \equiv 18[10]$ صحيحة.

(3) $478 - 32 = 446$ و $446 = 89 \times 5 + 1$. إذن $478 \equiv 32[5]$ خاطئة.

ونكتب $478 \not\equiv 32[5]$.

(4) $58 + 5 = 63$ و $63 = 9 \times 7$. إذن $58 \equiv -[7]$ صحيحة.

(5) $63^2 = 3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو إذن 4 وبما أن باقي قسمة العدد 14 على

5 هو كذلك 4 فإن $63^2 \equiv 14[5]$ صحيحة.

(6) $144 = 19 \times 7 + 11$ وبما أن العدد 144 يوافق بترديد 19 باقي قسمته على 19

نستنتج أن $144 \equiv 11[19]$ صحيحة.

(7) $131^2 = 1430 \times 12 + 1$ و $25 = 2 \times 12 + 1$ تحصلنا على نفس الباقي في

القسمة على 21 إذن $131^2 \equiv 25[12]$ صحيحة.

(8) $48^3 = 15799 \times 7 + 6$ و $36 = 5 \times 7 + 1$ لم نحصل على نفس الباقي في

القسمة على 7 إذن $48^3 \equiv 36[7]$ خاطئة. ونكتب $48^3 \not\equiv 36[7]$.

تمرين محلول 06: (الكتاب المدرسي صفحة 13)

عين في كل حالة من الحالات الآتية $a \equiv b[n]$ باقي قسمة a على n و باقي قسمة b على n . ثم أذكر صحة أو خطأ الموافقة.

$$262 \equiv 927[5] \quad (1)$$

$$-322 \equiv 78[4] \quad (2)$$

$$471 \equiv 30[8] \quad (3)$$

$$158 \equiv 39[17] \quad (4)$$

الحل:

$$(1) \quad 262 = 5 \times 52 + 2 \quad \text{و} \quad 927 = 5 \times 185 + 2. \quad \text{إذن باقي } 262 \text{ على } 5 \text{ هو } 2$$

و باقي 927 على 5 هو 2 ومنه 262 و 927 لهما نفس الباقي في القسمة على 5 إذن

$$262 \equiv [5] \quad \text{صحيحة.}$$

$$(2) \quad -322 = 4 \times (-81) + 2 \quad \text{و} \quad 78 = 4 \times 19 + 2. \quad \text{إذن باقي } -322 \text{ على } 4$$

هو 2 وباقي 78 على 4 هو 2 ومنه -322 و 78 لهما نفس الباقي في القسمة على 4

$$\text{إذن } -322 \equiv 78[4] \quad \text{صحيحة.}$$

$$(3) \quad 471 = 8 \times 58 + 7 \quad \text{و} \quad 30 = 8 \times 3 + 6. \quad \text{إذن باقي } 471 \text{ على } 8 \text{ هو } 7 \text{ و}$$

باقي 30 على 8 هو 6 ومنه 471 و 30 ليس لهما نفس الباقي في القسمة على 8 إذن

$$471 \equiv 30[8] \quad \text{خاطئة. ونكتب } 471 \not\equiv 30[8].$$

$$(4) \quad 158 = 17 \times 9 + 5 \quad \text{و} \quad 39 = 17 \times 2 + 5. \quad \text{إذن باقي } 158 \text{ على } 17 \text{ هو } 5$$

و باقي 39 على 17 هو 5 ومنه 158 و 39 لهما نفس الباقي في القسمة على 17 إذن

$$158 \equiv 39[17] \quad \text{صحيحة.}$$

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

الخاصية 01: "الخاصية الانعكاسية"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ومن أجل كل عدد صحيح a

$$a \equiv a[n] \quad \text{لدينا :}$$

البرهان: لدينا $a - a = 0 \times n$ ومنه $a - a$ مضاعف للعدد n .

الخاصية 02: "الخاصية التبديلية"

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

$$\text{إذا كان } a \equiv b[n] \text{ فإن: } b \equiv a[n]$$

البرهان: إذا كان a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n فإن b و a نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

الخاصية 03: "الخاصية المتعدية"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. أعداد صحيحة a, b, c

$$\text{إذا كان } (a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n]) \text{ فإن: } a \equiv c[n]$$

البرهان: a, b, c أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n])$
 $(a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n])$ يعني $(a - b = k \times n \text{ و } b - c = \acute{k} \times n)$
(k و $\acute{k}$ عددان صحيحان) بالجمع طرف إلى طرف نجد
 $b - c = (\acute{k} + k) \times n$ بما أن $\acute{k} + k$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$.

الخاصية 04: "خاصية التلاؤم مع الجمع"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، a, b, c, d أعداد صحيحة.
إذا كان $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ فإن: $a + c \equiv b + d [n]$

البرهان: a, b, c, d أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$

$(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = k \times n \text{ و } c - d = \acute{k} \times n)$

$(k \text{ و } \acute{k}$ عددان صحيحان) بالجمع طرف إلى طرف نجد

$$(a + c) - (b + d) = (\acute{k} + k) \times n$$

بما أن $\acute{k} + k$ عدد صحيح فإن $a + c \equiv b + d[n]$.

الخاصية 05: "خاصية التلاؤم مع الضرب"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، a, b, c, d أعداد صحيحة.
إذا كان $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ فإن: $a \times c \equiv b \times d [n]$

البرهان: a, b, c, d أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$

$(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = k \times n \text{ و } c - d = \acute{k} \times n)$

$(k \text{ و } \acute{k}$ عددان صحيحان) لدينا

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c + d) + d(a - b) = \acute{a}kn + dkn = (\acute{a}k + dk) \times n$$

بما أن $\acute{a}k + dk$ عدد صحيح فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$.

الخاصية 06: "خاصية التلاؤم مع القوى الصحيحة"

من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومان n و p . ومن أجل كل عددين صحيحان a و b .
إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن: $a^p \equiv b^p [n]$

تمرين محلول 07: (الكتاب المدرسي صفحة 15)

لتكن الأعداد الصحيحة التالية : $a = 255$ ، $b = 837$ و $c = 3691$.

- (1) عين باقي قسمة الأعداد a ، b و c على العدد 11.
- (2) باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a + b$ ، $a \times c$ ، $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ ، $(5 \times a)^{2019}$ ، $(5 \times a)^{1440}$.

الحل:

1. باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد عين باقي قسمة الأعداد a ، b و c على العدد 11 هي 2، 1، 6 على الترتيب.

$$3691 = 11 \times 335 + 6 \text{ و } 837 = 11 \times 76 + 1 \text{ ، } 255 = 11 \times 23 + 2$$

2. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ b \equiv 1[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نجد $a + b \equiv 3[11]$ ومنه الباقي هو 3.

• لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ c \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $a \times c \equiv 12[11]$ و بما أن

$12 \equiv 1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $a \times c \equiv 1[11]$ ومنه الباقي هو 1.

• لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ b \equiv 1[11] \\ c \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نجد $a + b + c \equiv 9[11]$ ومنه الباقي هو 9.

• لدينا: $a \equiv 2[11]$ بتطبيق خاصية القوى نجد $a^2 \equiv 2^2[11]$ أي $a^2 \equiv 4[11]$ ومنه الباقي هو 4.

• لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ b \equiv 1[11] \\ c \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $a \times b \times c \equiv 12[11]$ و بما أن

$12 \equiv 1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $a \times b \times c \equiv 1[11]$ ومنه الباقي هو 1.

- لدينا: $a \equiv 2[11]$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $5 \times a \equiv 10[11]$ وبما أن $10 \equiv -1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $5 \times a \equiv -1[11]$ بتطبيق خاصية القوى نجد $(5 \times a)^{2019} \equiv (-1)^{2019}[11]$ بما أن $-1 = (-1)^{2019}$ تكافئ $(5 \times a)^{2019} \equiv -1[11]$ و تكافئ أيضا $(5 \times a)^{2019} \equiv 10[11]$ ومنه الباقي هو **10**.
- بنفس الطريقة السابقة نجد $(5 \times a)^{1440} \equiv 1[11]$ ومنه الباقي هو **1**.

تمرين محلول 08: (الكتاب المدرسي صفحة 15)

- a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3[5]$ و $b \equiv 4[5]$.
- بين أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على العدد 5.
 - عين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على العدد 5.
 - تحقق أن $b \equiv -1[5]$. استنتج باقي قسمة b^{2019} و b^{1440} على العدد 5.

الحل:

i. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a \equiv 6[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a \equiv 1[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع

نحصل على $2a + b \equiv 5[5]$ و بما أن $5 \equiv 0[5]$ فإن $2a + b \equiv 0[5]$ و منه باقي قسمة $2a + b$ على 5 هو **0**. نستنتج هكذا أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5.

ii. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a^2 \equiv 2 \times 9[5] \\ b^2 \equiv 16[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a^2 \equiv 3[5] \\ b^2 \equiv 1[5] \end{cases}$ لأن

بتطبيق خاصية الجمع نحصل على $2a^2 + b^2 \equiv 4[5]$ و منه باقي قسمة $2a^2 + b^2$ على 5 هو **4**.

III. من الواضح أن $4 \equiv -1[5]$ و منه باستخدام خاصية التعدي نحصل على $b \equiv -1[5]$. بتطبيق خاصية القوى نحصل على $b^{2019} \equiv (-1)^{2019}[5]$ و $b^{1440} \equiv (-1)^{1440}[5]$ أي $b^{2019} \equiv -1[5]$ و $b^{1440} \equiv 1[5]$ وبما أن $4 \equiv -1[5]$ فإن $b^{2019} \equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2019} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1440} على 5 هو 1.

دراسة بواقي قوى عدد طبيعي

دراسة بواقي قوى عدد طبيعي حسب القيم الطبيعية للأس:

ليكن p و m عددان طبيعيين ثابتان غير معدومان أوليان فيما بينهما أي $\gcd(p, m) = 1$ وليكن n عدد طبيعي. الهدف هو معرفة بواقي القسمة الإقليدية للعدد p^n على العدد m حسب القيم العدد الطبيعي n . نقوم بدراسة البواقي للقسمة الإقليدية على m للأعداد $p^1, p^2, p^3, \dots, p^{n_0}$ حيث: n_0 هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق العلاقة $p^{n_0} \equiv 1 [m]$ يسمى الدور فبإجراء القسمة الإقليدية للعدد n على العدد n_0 نجد: $n = n_0 \times q + r$ و بتطبيق خواص القوى والموافقات نحصل على

$$p^n \equiv p^{n_0 \times q + r} = (p^{n_0})^q \times p^r \equiv (1)^q \times p^r \equiv p^r \equiv t [m]$$

حيث t هو باقي قسمة p^r على m . و عليه $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n_0}$ هي بواقي قسمة الأعداد $p^1, p^2, p^3, \dots, p^{n_0}$ على m وفقا لهذا الترتيب.

و عليه بواقي قسمة العدد p^n على m حسب قيم العدد الطبيعي n هي:

❖ t_1 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 1.

❖ t_2 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 2.

❖ t_3 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 3.

⋮ ⋮ ⋮

❖ t_{n_0-1} إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو $n_0 - 1$.

❖ t_{n_0} إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 0.

مبرهنة: ليكن p و m عددان طبيعيين ثابتان غير معدومان أوليان فيما بينهما أي $\text{pgcd}(p, m) = 1$ فإنه يوجد على الأقل عدد طبيعي غير معدوم n_0 يحقق العلاقة $p^{n_0} \equiv 1[m]$ و $1 \leq n_0 < m$ و أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق هذه الخاصية يسمى الدور.

ملاحظة: هذه المبرهنة نتيجة حتمية لنظرية Euler-Fermat

تحذير ! p و m عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما يعني $\text{pgcd}(p, m) = 1$ وليس بالضرورة أنهما أعداد أولية. علينا أن نفرق بين مفهوم العدد الأولي و العددين الأوليان فيما بينهما. على سبيل المثال: العددين 8 و 9 أوليان فيما بينهما لكن كلاهما ليس أولي.

تمرين محلول 09: (بكالوريا 2018)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
- (2) عين العدد الطبيعي a بحيث يكون: $2018 = 4 \times a + 2$.
- (3) بين أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.
- (4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$.
- (5) ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$.

الحل:

(1) دراسة بواقي قسمة العدد 2^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n .

$$2^0 = 1 \equiv 1[5], \quad 2^1 = 2 \equiv 2[5], \quad 2^2 = 4 \equiv 4[5],$$

$$2^3 = 8 \equiv 3[5], \quad 2^4 = 16 \equiv 1[5].$$

نلاحظ أن $n_0 = 4$ هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم حيث: $2^{n_0} \equiv 1[5]$

يسمى **الدور** وعليه الكتابة الأفقية للقسمة الإقليدية للعدد الطبيعي n على 4 هي :

$$n = 4 \times q + r \quad \text{و بتطبيق خواص الموافقات السابقة نحصل على}$$

$$2^n \equiv 2^{4 \times q + r} = (2^4)^q \times 2^r \equiv (1)^q \times 2^r \equiv 2^r[5]$$

وعليه بواقي قسمة العدد 2^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n هي:

❖ **1** إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 0.

❖ **2** إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 1.

❖ **4** إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 2.

❖ **3** إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 3.

(2) تعين العدد الطبيعي a بحيث يكون : $2018 = 4 \times a + 2$.

$$2018 = 4 \times a + 2 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{(2018-2)}{4} = a \quad \text{ومنه} \quad 504 = a$$

(3) إثبات أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

لدينا: $2^{2018} \equiv (2^4)^{504} \times 2^2 \equiv 4[5]$ لأن $2018 = 4 \times 504 + 2$

$$\text{و} \quad 2017^8 \equiv (2)^8 \equiv (2^4)^2 \equiv 1^2 \equiv 1[5] \quad \text{لأن} \quad 2017 \equiv 2[5]$$

فيكون إذن $2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 4 + 1 - 5 \equiv 0[5]$ أي أن

العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

(4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

بما أن $12 \equiv 2[5]$ فإن $12^n \equiv 2^n[5]$ (يمكننا إثبات ذلك بالاستدلال بالتراجع).

بما أن $-3 \equiv 2[5]$ فإن $(-3)^n \equiv 2^n[5]$ (يمكننا إثبات ذلك بالاستدلال بالتراجع).

(ب) تعين قيم العدد طبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$

من السؤال السابق نستنتج أن:

$$12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } 2^n + 2^n - 4 \equiv 0[5] \text{ و تكافئ أيضا}$$

$$2^n \equiv 2[5] \text{ و يكافئ من السؤال الأول باقي قسمة العدد الطبيعي } n \text{ على } 4 \text{ هو } 1.$$

$$\text{أي } n = 4 \times k + 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}.$$

تمرين محلول 10: (بكالوريا 2018)

a و b عددان صحيحان حيث $a = 4 \times b + 6$.

(1) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4.

(2) بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 3.

(3) نضع $b = 489$

(أ) تحقق أن: $a \equiv -1[13]$

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13.

(ج) عين قيم العدد طبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13.

الحل:

1. تعين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4.

لدينا: $a = 4 \times b + 6$ تكافئ $a = 4 \times b + 4 + 2$ تكافئ $a = 4 \times (b + 1) + 2$

أي تكافئ $a \equiv 2[4]$ و $0 \leq 2 < 4$ و عليه نستنتج أن باقي القسمة الإقليدية

للعدد a على 4 هو 2.

2. إثبات أن العددين a و b متوافقان بترديد 3.

لدينا: $a = 4 \times b + 6$ تكافئ $a = 3 \times b + b + 2 \times 3$ تكافئ

$a = 3 \times (b + 2) + b$ أي تكافئ $a - b$ مضاعف للعدد 3 أي $a \equiv b[3]$.

3. من أجل $b = 489$ لدينا:

$$\text{أ) } a = 4 \times b + 6 = 4 \times 489 + 6 = 1962 \text{ وعليه}$$

$$a + 1 = 13 \times 151 \equiv 0[13] \text{ و منه } a \equiv -1[13]$$

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13.

لدينا $a^{2018} \equiv (-1)^{2018} \equiv 1[13]$ و $40^{2968} \equiv (1)^{2968} \equiv 1[13]$

$$\text{لأن } 40 \equiv 1[13]$$

ج) تعين قيم العدد طبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلاً للقسمة على 13

لدينا $a^{2n} \equiv ((-1)^2)^n \equiv 1[13]$ فعليه $a^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$ تكافئ

$$n \equiv 9[13] \text{ أي يوجد عدد طبيعي } k \text{ حيث: } n = 13 \times k + 9$$

حساب الباقي بالآلة الحاسبة

توجد عدة آلات و برمجيات تسمح لنا بحساب باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي b نذكر منها الحاسبة العلمية و الحاسبة البيانية و الحاسوب من خلال برنامجي المجدول Excel و المابل Maple و غيرها كما لا ننسى أن هنالك مواقع متخصصة على شبكة إنترنت تسمح لنا بإجراء مختلف العمليات الحسابية و بأعداد كبيرة نسبيا.

فعلى سبيل المثال توجد اللمسة **Mod** الملونة بالأصفر على حاسبة الكمبيوتر المحمول تسمح بحساب الباقي مثلا : ندخل الرقم 2019 على الحاسبة ثم نضغط على الزر **Mod** ثم ندخل الرقم 10 ثم نضغط على الزر **=** فنحصل على العدد 9 والذي هو باقي قسمة 2019 على 10 كما هو موضح في الصورة المرفقة.



تنويه:

اللمسة **Mod** ليست متوفرة في كل الحاسبات العلمية والقياسية لكن مع هذا يمكننا حساب باقي قسمة العدد a على العدد b باتباع الطريقة التالية: نقوم بقسمة العدد a على العدد b فنحصل على عدد ناطق q, t يتكون من جزئين جزء صحيح ويمثل حاصل القسمة العدد q و جزء عشري وهو إما عدد عشري وإما عدد مقرب إلى عدد عشري. فعند طرحنا الجزء الصحيح q من حاصل قسمة العدد a على العدد b نتحصل على الجزء العشري فقط $0, t$ وعند قيامنا بضرب هذا الأخير في العدد b نحصل على الباقي r .

$$a \div b = q, t$$

المرحلة الأولى:

$$q, t - q = 0, t$$

المرحلة الثانية:

$$0, t \times b = r$$

المرحلة الثالثة:

مثال تطبيقي: احسب باقي قسمة 2019 على 81.

الحل:

$$2019 \div 81 = 24, 925925925 \dots$$

المرحلة الأولى:

$$24, 925 \dots - 24 = 0, 925 \dots$$

المرحلة الثانية:

$$0, 925 \dots \times 81 = 75$$

المرحلة الثالثة:

الخلاصة: باقي القسمة الإقليدية للعدد 2019 على العدد 81 هو 75.

الاستدلال بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع (البرهان بالتراجع):

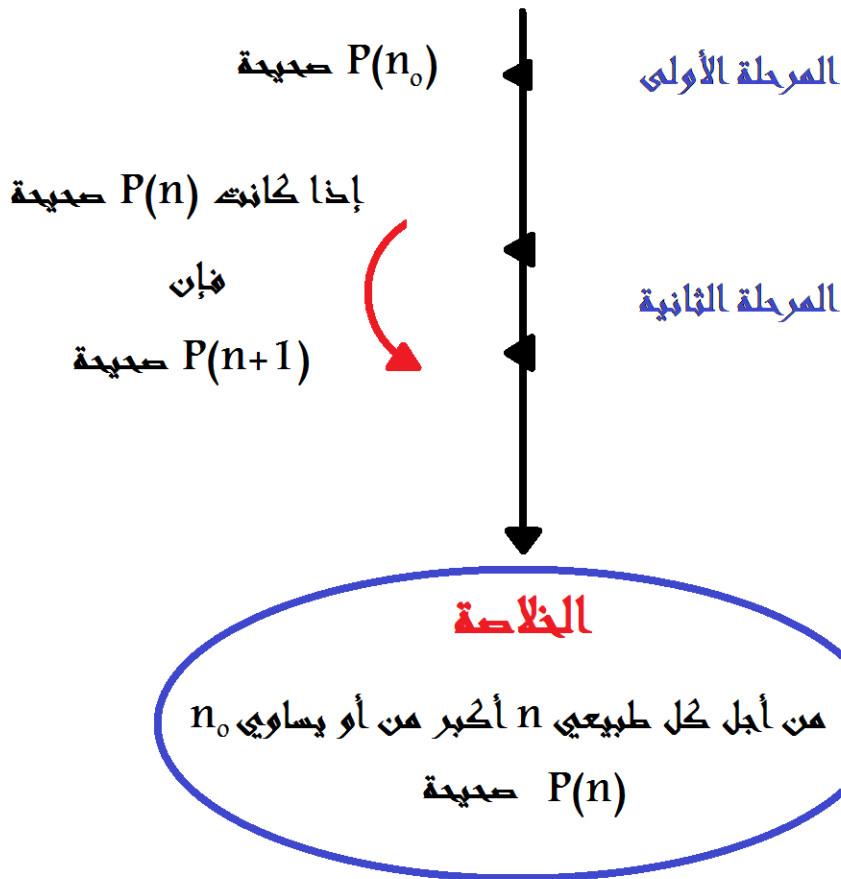
مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n و n_0 عدد طبيعي. للبرهان على صحة

الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 أي

$P(n_0)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي $P(n + 1)$.



ملاحظة: بصفة عامة المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة لا تطرح أي

مشكل إلا أنها تبقى ضرورية لأنه يمكن لخاصية أن تكون وراثية لكن خاطئة.

مثال: الخاصية: "من أجل كل عدد طبيعي n ، 3^n مضاعف للعدد 2"

خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل إذا كان 3^n مضاعفا للعدد 2 فإنه يوجد عدد

صحيح k بحيث: $3^n = 2k$ لدينا إذن:

$$3^{n+1} = 3(2k) = 2(3k) \text{ ومنه } 3^{n+1} \text{ هو الآخر مضاعف للعدد 2.}$$

مثال توضيحي: لنثبت صحة الخاصية التالية:

"من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $n = 1$ لدينا: $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

المرحلة الثانية (الوراثية):

✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

لدينا:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم،}$$

تمرين محلول 11: (الكتاب المدرسي صفحة 17)

أثبت، باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

الحل: الخاصية " $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3" متعلقة بالعدد الطبيعي n .
نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة الأولى: من أجل $n = 0$ لدينا: $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ ومنه $0^3 - 0$ مضاعف للعدد 3 . ومنه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة الثانية(الوراثة):

✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي: $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

نضع $n^3 - n = 3k$ حيث k عدد طبيعي . ومنه $n^3 = 3k + n$

✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي: $[(n + 1)^3 - (n + 1)]$ مضاعف للعدد 3 .

لدينا:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (3k + n) + 3n^2 + 2n$$

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = 3k + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n) \quad \text{ومنه}$$

وبما أن $3(k + n^2 + n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n + 1)^3 - (n + 1)$ مضاعف للعدد 3.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3.

ملاحظة: شرح كيفية الحصول على المساواة $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$$(n + 1)^3 = (n + 1)(n + 1)^2 = (n + 1)(n^2 + 2n + 1) \quad \text{لدينا:}$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{ومنه}$$

تعميم: يمكننا تعميم المتطابقات الشهيرة من أجل عددين حقيقيين x و y

لدينا:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

تمرين محلول 12: (الكتاب المدرسي صفحة 17)

نرمز بـ $P(n)$ إلى الخاصية التالية: "العدد 3 يقسم العدد $n^2 + 1$ حيث n عدد طبيعي".

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n إذا كانت $P(n)$ صحيحة تكون $P(n+1)$ صحيحة.
2. هل يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ? اشرح.

الحل:

1. نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ، أي أن العدد 3

يقسم العدد $4^n + 1$ ويمكننا أن نعبر عن ذلك بوضع $4^n + 1 = 3k$

حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

لنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1} + 1$.

لدينا: $4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1$ وبما أن $4^n = 3k - 1$ (من الفرضية

السابقة) نستنتج أن: $4^{n+1} + 1 = 4 \times (3k - 1) + 1$

لدينا إذن: $4^{n+1} + 1 = 4 \times 3k - 4 + 1 = 3 \times 4k - 3$

ومنه $4^{n+1} + 1 = 3 \times (4k - 1)$

لدينا إذن: $4^{n+1} + 1 = 3 \times k$ مع $k = 4k - 1$ وهو عدد طبيعي غير

معدوم. نستنتج أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1} + 1$. ومنه فالخاصية

$P(n+1)$ صحيحة.

2. لا يمكننا استنتاج الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n فلا بد

من التحقق من صحتها من أجل $n = 0$ لأن وراثية الخاصية تبقى غير كافية.

نلاحظ أن الخاصية ليست صحيحة من أجل $n = 0$ لأن العدد 3 لا يقسم

العدد 2 وبتالي فهي غير صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

تمرين محلول 13: (خاصية تلاؤم الموافقات مع القوى الصحيحة)

ليكن m عددا طبيعيا ثابتا غير معدوم معطى. أثبت باستخدام الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و مهما يكن العدداً الصحيحان a و b حيث: إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n [m]$

الحل: الخاصية "إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n [m]$ " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة الأولى: من أجل $n = 1$ لدينا: $a^1 \equiv b^1 [m]$ (شرط الفرضية). ومنه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

المرحلة الثانية (الوراثية):

✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي:

$$a^n \equiv b^n [m]$$

✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ أي: $a^{n+1} \equiv b^{n+1} [m]$

لدينا: $a \equiv b[m]$ و $a^n \equiv b^n [m]$ (فرضية التراجع) وحسب خاصية التلاؤم مع الضرب للموافقات نحصل على $a \times a^n \equiv b \times b^n [m]$

ومنه حسب خواص القوى نجد: $a^{n+1} \equiv b^{n+1} [m]$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و مهما يكن العدداً

الصحيحان a و b حيث: إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n [m]$

علما أن m عددا طبيعيا ثابتا غير معدوم معطى.

معجم مصطلحات رياضية ملحقة بالدرس

الإنجليزية	الفرنسية	العربية
Natural numbers	Nombres Naturels	الأعداد الطبيعية
Integers	Les entiers	الأعداد الصحيحة
Rational Numbers	Les nombres Rationnels	الأعداد الناطقة
Irrational Numbers	Les nombres Irrationnels	الأعداد الصماء
The Real Numbers	Les nombres Réels	الأعداد الحقيقية
Set	Ensemble	مجموعة
Element	Elément	عنصر
Sum	Somme	مجموع
Product	Produit	جاء
Addition	Addition	إضافة (الجمع)
Substraction	Soustraction	الطرح
Multiplication	Multiplication	الضرب
The Division	La Division	القسمة
Divisor	Diviseur	قاسم
Remainder	Reste	الباقى
Quotient	Quotient	حاصل قسمة
Greatest Common Divisor GCD(a,b)	Plus Grand Commun Diviseur PGCD(a,b)	القاسم المشترك الأكبر
Least Common Multiple LCM(a,b)	Plus P'tite Commun Multiple PPCM(a,b)	المضاعف المشترك الأصغر
Perfect Number	Nombre Parfait	عدد تام (مثالي)
Amicable Numbers	Nombres Amiables	عددان متحابان (متراضيان)

Power	Puissance	القوى
Prime Number	Nombre Premier	عدد أولي
Composite Number	Nombre Composé	عدد مركب (ليس أولي)
Relatively Prime	Premier Entre Eux	عددان أوليان فيما بينهما
Factorization	Factorisation	التحليل
Coefficient	Coefficient	العوامل
Euclidean Division	Division Euclidienne	القسمة الإقليدية
Theorem	Théorème	نظرية (مبرهنة)
Proof	Preuve	البرهان
Congruence	Congruence	الموافقات
Modular	Modulaire	الترديد
The Reasoning By Induction	Le Raisonnement Par Récurrence	الاستلال بالتراجع (البرهان بالتراجع)
Genetic property	Propriété Génétique	خاصية وراثية
Hypothesis	Hypothèse	الفرضية
Definition	Définition	تعريف
Result	Résultat	نتيجة
Conclusion	Conclusion	الخلاصة
Associative Property	Propriété Associative	خاصية تجميعية
Commutative Property	Propriété Commutative	خاصية تبديلية
Distributive Property	Propriété Distributive	خاصية توزيعية
Transitive Property	Propriété Transitive	خاصية متعدية
Solutions	Des solutions	الحلول
Exercise	Exercice	تمرين
Application	Application	تطبيق
The lesson	Leçon	الدرس

أخطاء شائعة و طرق تصويبها

في هذا الجزء نسعى إلى إبراز أهم الأخطاء التي تتكرر من طرف غالبية التلاميذ أو يتوقع حدوثها وطرق معالجتها قصد تفاديها أو التقليل من الوقوع فيها مستقبلا.

فعلى التلاميذ أخذها بعين الاعتبار للاستفادة و التعلم من أخطاء و تجربة الآخرين فالسعي من أتعظ بغيره فالواجب الاستماع لنصائح الأساتذة أثناء الدروس و خاصة الاستفادة من المعالجة أثناء تصحيح الفروض و الاختبارات لما لها من أهمية بالغة قصد تدارك الأخطاء و السعي لتصويبها و تفاديها مجددا و هو ما يتغافل عنه الأغلبية نظرا لاشتغالهم بالعلامات دون فهم المقصد الفعلي للتقويم أساسا أو اعتقادهم أنه من غير جدوى الاهتمام بالمعالجة سواء أكانت نتائجهم سلبية أم إيجابية و من هنا يجب التخلي عن العادات السيئة التي صارت طبعا من الواقع التعليمي في بلادنا كالمراجعة للاختبارات أو الدراسة من أجل إرضاء الأولياء و نحو ذلك دون السعي لكسب و بناء ثقافة علمية قائمة بحد ذاتها و ذلك بإتباع أسس علمية صحيحة كالرغبة الصادقة و الصريحة لحب التعلم متبوعة بالعزيمة و الاجتهاد و المثابرة و الصحة التي تعين على تحديات الدراسة و التحضير الجيد للدرس و المشاركة فيه أثناء تقديمه بطرح استفسارات أو تبسيط مفاهيم و نحوها ليتم في الأخير مراجعة الدروس السابقة في المنزل من دون ملل أو كلل مدعمة بحل التمارين و التطبيقات و التقويمات السابقة للسنوات الماضية للدفعات السابقة للاستفادة من تجاربهم كما ننوّه إلى ضرورة بناء المفاهيم خطوة بخطوة و درسا بدرس و عدم الوقوع في فخ التساهل و تخطي مراحل الدرس و ما ينتج عنه في تشوّه و تشابك المفاهيم من دون رابط بينها تؤدي إلى خلل أو تأخر دراسي يعرقل التعليم لدى الطالب و الأستاذ معا و نحذّر بشدة من التكبر أو الحياء الزائد اللذان يعيقان المتعلم بصفة عامة.

و كذلك ندعو أساتذتنا الافاضل ممن لهم تجربة و خبرة السنين لإفاداتنا في هذا الصدد بما ينفع طلبتنا و يوفقهم لكل ما هو خير.

تمرين استقصائي:

1. أكتب العددين 1500 و 3500 على شكل جداء عوامل طبيعية أولية.
2. استنتج قيمة كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين.
3. استنتج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.
4. عين قواسم الأعداد الطبيعية 0, 12, 50.
5. عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n.

الإجابات المختلفة لبعض التلاميذ (عينات):

1. تحليل العددين 1500 و 3500 إلى جداء عوامل طبيعية أولية.

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
$\begin{array}{r} 3500 \\ 1750 \\ 875 \\ 175 \\ 35 \\ 7 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1500 \\ 750 \\ 375 \\ 125 \\ 25 \\ 5 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$ $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$	$\begin{array}{r} 3500 \\ 35 \\ 5 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 100 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1500 \\ 375 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \end{array}$ $3500 = 100 \cdot 5 \cdot 7$ $1500 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15$
التلميذ الثالث	التلميذ الرابع
$\begin{array}{r} 3500 \\ 1750 \\ 875 \\ 175 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1500 \\ 750 \\ 375 \\ 125 \\ 25 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$ $3500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 175$ $1500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 25$	$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

2. استنتاج القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 1500 و 3500 .

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
بإستخدام خوارزمية إقليدس للقسمة الإقليدية نتحصل على آخر باقي غير معدوم هو 500 أي: $\text{pgcd}(3500,1500)=500$ كما يمكننا إستنتاج ppcm بدلالة pgcd أي: $\text{ppcm}(3500,1500) = \frac{3500 \cdot 1500}{500}$ أي: $\text{ppcm}(3500,1500)=10500$	بإستخدام خوارزمية الطرح المتتالي لأقليدس نتحصل على آخر باقي غير معدوم هو 500 أي: $\text{pgcd}(3500,1500)=500$ " أي إجابة خاطئة حول حساب المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3500 و 1500"
التلميذ الثالث	التلميذ الرابع
من السؤال الأول نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 3500 و 1500 هو جداء تحليل عواملهما المشتركة و بأصغر أي من دون تكرار أي: $\text{pgcd}(3500,1500)=500$ بنفس الطريقة نستنتج أن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3500 و 1500 هو جداء تحليل العوامل المشتركة و بأكبر أي من دون تكرار و العوامل الغير مشتركة لهذين العددين أي: $\text{ppcm}(3500,1500)=10500$	" أي إجابة خاطئة حول حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3500 و 1500" نقوم بحساب مضاعفات 1500 ثم حساب مضاعفات 3500 ثم نبحث عن أصغر مضاعف مشترك و هو 10500 و عليه $\text{ppcm}(3500,1500)=10500$

3. استنتاج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
لدينا من السؤال الأول تحليل العددين 3500 و 1500 ثم نقوم بخطيب العوامل المتخالفة في كلا من البسط و المقام $\frac{1500}{3500} = \frac{1500 \div 500}{3500 \div 500} = \frac{3}{7}$	لدينا من السؤال الأول تحليل العددين 3500 و 1500 ثم نقوم بخطيب العوامل المتخالفة في كلا من البسط و المقام $\frac{1500}{3500} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{3}{7}$
التلميذ الثالث	التلميذ الرابع
$\frac{1500}{3500} = \frac{1500 \div 100}{3500 \div 100} = \frac{15}{35}$	$\frac{1500}{3500} = 0.4285$

4. تعين قواسم الأعداد الطبيعية 0, 12, 50.

5. تعين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n .

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
لا توجد قواسم للعدد 0	كل الأعداد الطبيعية غير معدومة تقسم العدد 0 إذن يوجد ما لانهاية من القواسم
قواسم العدد 12 هي: 1, 3, 4, 6	قواسم العدد 12 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 12
قواسم العدد 50 هي: 2, 5, 10, 25	قواسم العدد 50 هي: 1, 2, 4, 20, 50
التلميذ الثالث	التلميذ الرابع
إذا كان $n = 0$ [7] فإن $3^n \equiv 1$ [7] إذا كان $n = 1$ [7] فإن $3^n \equiv 3$ [7] إذا كان $n = 2$ [7] فإن $3^n \equiv 2$ [7] إذا كان $n = 3$ [7] فإن $3^n \equiv 6$ [7] إذا كان $n = 4$ [7] فإن $3^n \equiv 4$ [7] إذا كان $n = 5$ [7] فإن $3^n \equiv 5$ [7] إذا كان $n = 6$ [7] فإن $3^n \equiv 1$ [7]	بما أن 6 هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق العلاقة $3^n \equiv 1$ [7] فإن إذا كان $n = 0$ [6] فإن $3^n \equiv 1$ [7] إذا كان $n = 1$ [6] فإن $3^n \equiv 3$ [7] إذا كان $n = 2$ [6] فإن $3^n \equiv 2$ [7] إذا كان $n = 3$ [6] فإن $3^n \equiv 6$ [7] إذا كان $n = 4$ [6] فإن $3^n \equiv 4$ [7] إذا كان $n = 5$ [6] فإن $3^n \equiv 5$ [7]

التعليق و التعقيب على إجابات التلاميذ

بالنسبة لسؤال الاول تحليل الأعداد 3500 و 1500 إلى جداء عوامل أولية طبيعية.

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة و نموذجية إلا أنه أخطأ في الخطوة الأخيرة بدل أن يضع العدد 1 (آخر حاصل قسمة) وضع العدد 0 (آخر باقي القسمة) فكثيرا ما تتكرر هذه الأخطاء و هو عدم التفرقة بين حاصل القسمة و الباقي.

التلميذ الثاني: لا يفرق بين القسمة على العدد الأولي و العدد غير أولي (وجوب أن تكون العوامل أولية) فكثيرا ما تتكرر هذه الأخطاء و هو عدم إدراك أو استيعاب مفهوم الأعداد الأولية.

التلميذ الثالث: رغم أن إجابته كانت صائبة و نموذجية إلا أنه لا يدرك متى ينهي عملية التحليل أو إنهاء عمليات القسمة المتتالية .

التلميذ الرابع: رغم أن إجابته كانت صائبة إلا أنها غير كافية لعدم توضيح كيفية الحصول عنها سواء كانت عن طريق الغش أو بالحساب الذهني فالتبرير الكتابي مطلوب في كل الأسئلة المشابهة التي تتطلب تعليلا و هنا هي عمليات القسمة المتتالية العمودية.

بالنسبة لسؤال الثاني استنتاج القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 1500 و 3500 .

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة إلا أنها لا تتوافق مع طبيعة السؤال الاستنتاجية و ليست الحسابية فيما يخص القاسم المشترك الأكبر و تبقى مقبولة فيما يخص المضاعف المشترك الأصغر.

التلميذ الثاني: نفس الملاحظة فيما يخص التلميذ الأول.

التلميذ الثالث: إجابته كانت صائبة و نموذجية.

التلميذ الرابع: نفس الملاحظة فيما يخص التلميذ الأول بالنسبة لاستنتاج المضاعف المشترك الأصغر.

بالنسبة لسؤال الثالث استنتاج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة ونموذجية إلا أنها ليست الإجابة المثالية.

التلميذ الثاني: إجابته كانت صائبة ونموذجية وهي الإجابة المثالية.

التلميذ الثالث: إجابته كانت خاطئة وتدل على عدم استيعابه للدرس.

التلميذ الرابع: إجابته كانت خاطئة وتدل على عدم تمكنه من فهم السؤال نتيجة

تأخر دراسي قد يمتد إلى عدة سنوات أي هو في حالة يرثى لها.

بالنسبة لسؤال الرابع تعين قواسم الأعداد الطبيعية 0, 12, 50.

التلميذ الأول: إجابته كانت خاطئة بينما التلميذ الثاني إجابته كانت صائبة و

نموذجية فيما يخص قواسم العدد 0 و هذا الأمر ناتج عن عدم التفرقة بين أن كل

الأعداد الطبيعية الغير معدومة تقسم العدد 0 بينما الصفر لا يقسم أي عدد .

بينما العددان 12 و 50 فيظهران لنا تجاهل بعض التلاميذ أول قاسمين معروفين

وهما العدد 1 و العدد نفسه إضافة لعدم فهم درس القواسم لعدد صحيح على عدد

طبيعي فيكون حاصل القسمة هو عدد صحيح وليس كما يظن بعض التلاميذ أن

فاصلته منتهية (عدد عشري).

بالنسبة لسؤال الرابع تعين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n.

التلميذ الثالث: إجابته كانت خاطئة بينما التلميذ الرابع إجابته كانت صائبة و

نموذجية فيما يخص التلميذ الثالث يبدو أن له فهم سطحي لدرس بواقي قسمة قوى

عدد طبيعي على عدد طبيعي غير معدوم ولم يستوعبه كاملا فعليه مراجعته و حل

مزيلا من التمارين المشابهة والتي تطرح أفكارا جديدة.

بإذن الله
انتظروا بقیة
الدروس في
قادم الأيام

قابلية القسمة على الأعداد 3 و 9

قابلية القسمة على 2:

ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على 2 إذا وفقط إذا كان رقم أحادة ينتهي بأحد الأعداد 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.

مثال: الأعداد 1024 ، 822 ، 1000 ، 96 ، 98658 تقبل القسمة على 2

بينما الأعداد 1079 ، 811 ، 1493 ، 97 ، 94655 لا تقبل القسمة على 2.

قابلية القسمة على 5:

ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان رقم أحادة ينتهي بأحد الأعداد 0 أو 5.

مثال: الأعداد 1020 ، 825 ، 1000 ، 95 ، 98655 تقبل القسمة على 5

بينما الأعداد 1079 ، 811 ، 1493 ، 97 ، 94658 لا تقبل القسمة على 5.

قابلية القسمة على 3:

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على 3

إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3.

البرهان:

نحن نعلم أن كل عدد طبيعي n يكتب في النظام العشري على الشكل:

$$n = a_m \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$$

حيث: a_0 هو رقم الآحاد و a_1 هو رقم العشرات و a_2 هو رقم المئات و

a_3 هو رقم الآلاف وهكذا باقي الأرقام أي أن:

$$n = a_m 10^m + \dots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

بما أن : $10 \equiv 1[3]$ بتطبيق خاصية القوى للموافقات فإن

$$a_m 10^m \equiv a_m [3] \text{ و بتطبيق خاصية الضرب نحصل على } 10^m \equiv 1[3]$$

مهما تكن قيمة العدد m و بتطبيق خاصيتي الجمع و الضرب مع جميع

الحدود نجد:

$$n \equiv a_m + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 [3]$$

وعليه العدد الطبيعي العدد n يقبل القسمة على **3** إذا وفقط إذا كان مجموع

أرقامه يقبل القسمة على 3.

و بإتباع نفس البرهان مع العدد **9** نبرهن أن العدد n يقبل القسمة على **9** إذا و

فقط إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على **9**.

قابلية القسمة على 9:

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على **9**

إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على **9**.