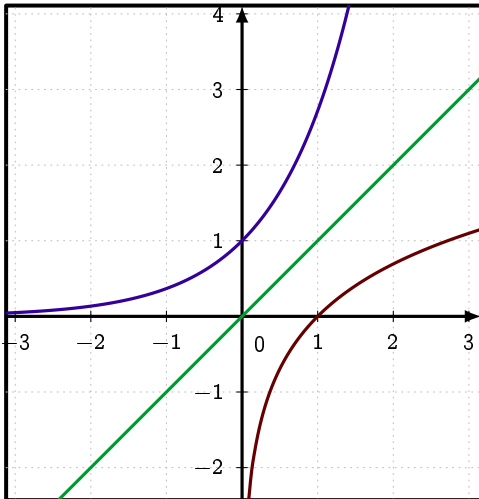




النهايات

الكفاءات المستهدفة



الكفاءات المستهدفة من خلال هذا المحور هي :

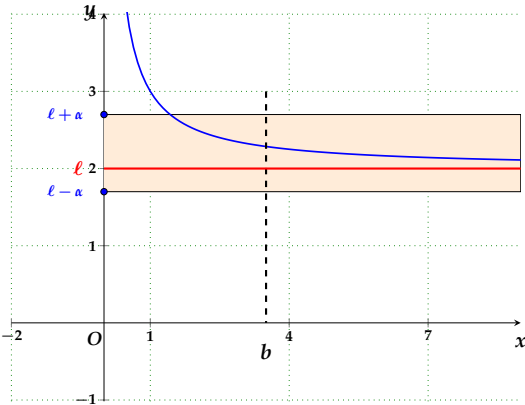
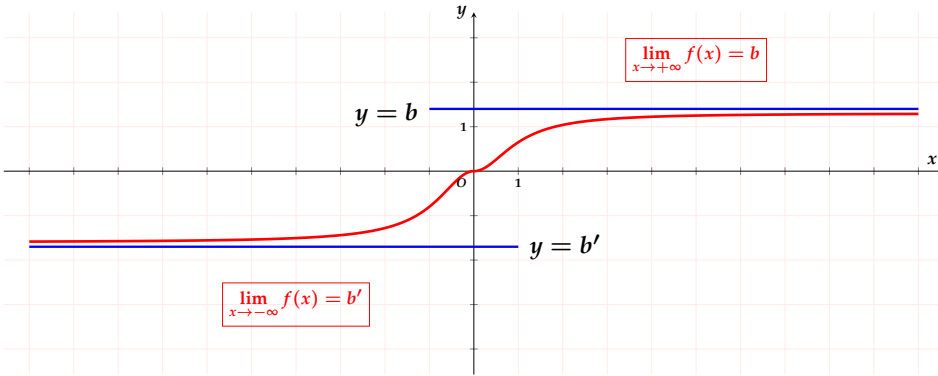
- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية عند حدود
- حساب نهاية بإستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة و تركيب دالتين
- دراسة السلوك التقاربي لدالة

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدّة التعليمية: النهايات
ميدانّ التعلم: التحليل
موضوع الدّقة: نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة

المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول الدوال العددية،
الكفاءات المستهدفة: نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة، وتفسير الهندسي لها
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المرحلة
مرحلة الإنطلاق	نهاية منتهية عند ما لا نهاية  تعريف f دالة معرفة على $[x_0, +\infty[$ و l عدد حقيقي القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ملاحظة: نحصل على نفس تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$ مثال $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ المستقيم المقارب الأفقي نتيجة نقول أنّ المستقيم ذا المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ 	مرحلة الإنطلاق



10د



10



10



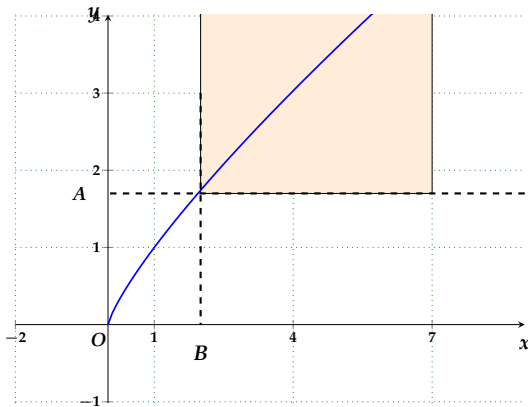
20د

تطبيق

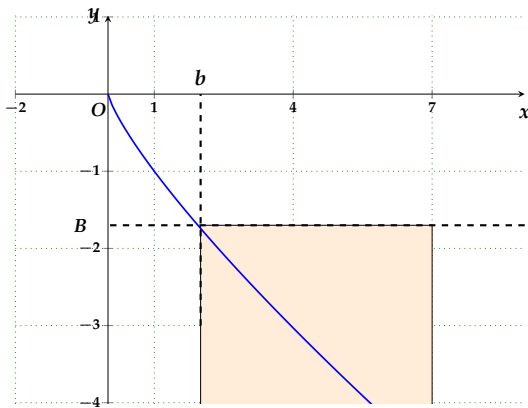
لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5}{x-2}$
 أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ **تعريف**

f دالة معرفة على $[x_0, +\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل عدد A ، مجال $[A, +\infty[$ و $A \in \mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**تعريف**

f دالة معرفة على $[x_0, +\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال $]-\infty; B]$ و $B \in \mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي من ونكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

**ملاحظة**

نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

تطبيق

f دالة معرفة على $[3; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x-6}$
 أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = -3 + \frac{4x-1}{2x+2}$ وليكن (C_g) المنحنى الممثل لها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
 بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ملاحظات حول سير الحصة

.....

التقويم

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

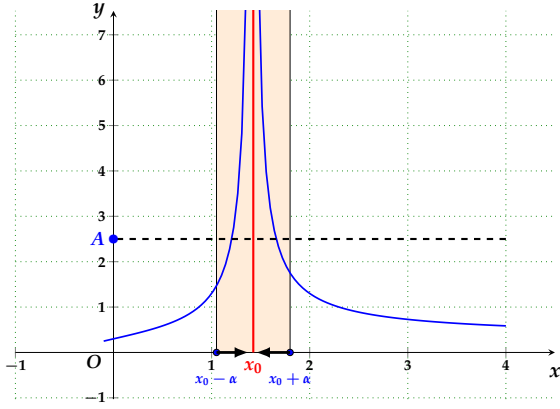
« الوحدة التعليمية: النهايات
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: نهاية دالة عند عدد

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 1 ساعة

« المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول الدوال العددية،
« الكفاءات المستهدفة: حساب نهاية عند عدد
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	1 نشاط مقترح لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 3$ نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2 1 ضع تخمينا لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2 . 2 في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)$ تنتمي إلى $]6, 99; 7, 01[$ ؟ 3 α عدد حقيقي حيث: $0 < \alpha < 1$ • في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7 - \alpha; 7 + \alpha[$. • علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد، ماذا تستنتج ؟ نهاية منتهية عند عدد حقيقي تعريف x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 نقول أن نهاية الدالة f هي ℓ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من اجل كل عدد حقيقي موجب A ، يوجد عدد حقيقي B ، بحيث إذا كان: $x - x_0 < B$ فإن: $f(x) - \ell < A$ أي يمكن جعل $f(x)$ أقرب من أي عدد حقيقي إلى ℓ إذا كان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ مثال لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 3$ باستعمال التعريف أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$	10 د 5 د 5 د

تعريف

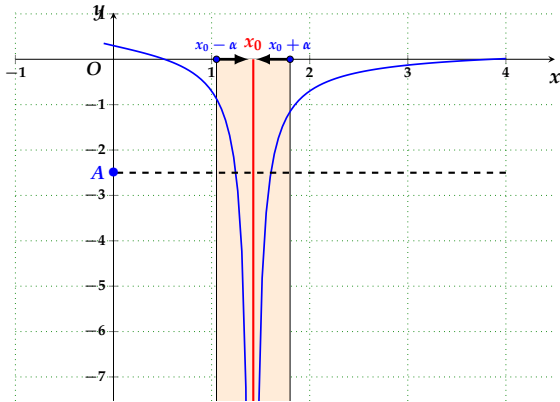


x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $[A, +\infty[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عندئذ: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x^2}$
عندما يقترب x من 0 بالقدر الكافي ، تأخذ $f(x)$ قيمة كبيرة بالقدر الذي نريد ، عندئذ يكون لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

تعريف



x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $] -\infty, A[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عندئذ: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

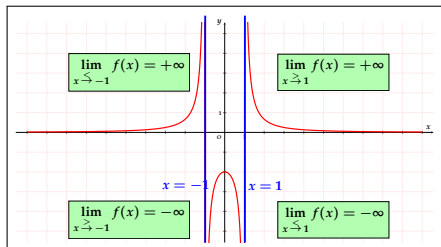
المستقيم المقارب العمودي

نتيجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $x = a$
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) يعني أن الدالة f عند a (من اليمين أو من اليسار) هي $+\infty$ أو $-\infty$

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني



لدينا:
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
إذن للمنحنى (C_f) مستقيمين مقاربين ذا المعادلة $x = -1$ و $x = 1$

تطبيق

1 باستخدام التعريف أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} = +\infty$

2 أحسب في كل حالة النهايات التالية وفسر النتيجة هندسيا

4 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3-x}}{3-x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-9}{x^2-4}$

2 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-9}{(x-4)^2}$

1 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-9}{x-4}$

تمرين منزلي

حل تمرين 13 و 14 و 16 صفحة 27

ملأ حظات حول سير الحصة

.....

.....

.....



10د

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

« الوحدة التعليمية: النهايات
« ميدان التعلم: التحليل
« موضوع الحصة: العمليات على النهايات

« الأستاذ: بخدة أمين
« المستوى: السنة الثالثة رياضيات
« المدة: 1 ساعة

« المكتسبات القبلية: مفاهيم أولية حول الدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة
« الكفاءات المستهدفة: عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيين.
« المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة																																				
مرحلة الإنطلاق	ملاحظات يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف. إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة. يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$	5د																																				
	مبرهنات أولية على النهايات f و g دالتان و a يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية. نهاية مجموعة دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$</td><td>$L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$</td><td>$L + L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$	5د															
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$																																
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$																																
	نهاية جداء دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L > 0$</td><td>$L > 0$</td><td>$L < 0$</td><td>$L < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$</td><td>$L'$</td><td>$\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$</td><td>$L \times L'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	5د			
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0																												
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$																												
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت																												
	نهاية حاصل قسمة دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$</td><td>$L$</td><td>$L$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$</td><td>$L' \neq 0$</td><td>$\pm \infty$</td><td>$L' > 0$</td><td>$L' > 0$</td><td>$L' < 0$</td><td>$L' < 0$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$\frac{L}{L'}$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$L' \neq 0$	$\pm \infty$	$L' > 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	5د
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$																											
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$L' \neq 0$	$\pm \infty$	$L' > 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$																											
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت																											
	ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : "عدم التعيين (ح ع ت)" توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$	5د																																				

نهایات بعض الدوال الشهيرة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \geq 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \searrow a} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty \quad \lim_{x \searrow a} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty : n \in \mathbb{N}^* \text{ (لما } n \text{ زوجي)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ (لما } n \text{ فردي)}$$

إزالة حالات عدم التعيين

لإزالة حالات عدم التعيين عند وجودها تتبع مايلي :

بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة .
أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 4x + 6 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = 3x^2 - 2x + 3 \quad (1)$$

بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط والمقام .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 - 6} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x - x^2}{x^3 - 1} \quad (1)$$

بالنسبة لدوال الجذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب ونقسم في المرافق .
أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 3}}{x + 2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3} + x - 2 \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3} + 2x - 2 \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 3} - 3x + 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3} - \sqrt{9x^2 - 2} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 3} - \sqrt{4x^2 - 2} \quad (7)$$

بالنسبة لحالات عدم التعيين عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك أو العدد المشترك
أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x + 4} - 3}{\frac{x}{5} - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad (1)$$

تطبيق

تمرين 18 و 19 و 24 صفحة 26

ملاحظات حول سير الحصة

.....
.....
.....

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

تطبيق القاعدة التالية :
عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{ax + \beta} = |x| \sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}}$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$$

$a = \alpha$

$a \neq \alpha$

$\sqrt{a} = |\alpha|$

$\sqrt{a} \neq |\alpha|$

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

المقام من الشكل $(\alpha x + \beta)$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

① إظهار العبارة : $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\alpha x + \beta} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

نستعمل طريقة المرافق :

① نضرب : $\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$

② ثم نختزل على : $(x - a)$

نستعمل طريقة الإختزال :

① نحلل البسط والمقام.

② ثم نختزل على $(x - a)$

$$f(x) = \frac{(x - a)(\dots\dots\dots)}{(x - a)(\dots\dots\dots)}$$

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدية التعليمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: السلوك التقاربي لمنحنى دالة

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 1 ساعة

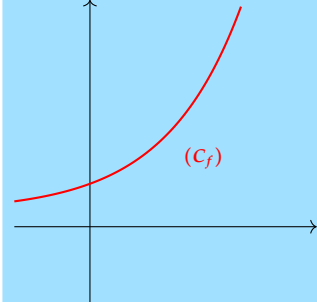
المكتسبات القبلية: دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة: تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب، البحث عن مستقيم مقارب مائل.
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المراحل
15 د	التهيئة النفسية 1 نشاط مقترح لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x 1 أحسب المسافة MP 2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} MP$ 3 ارسم المنحنى (C_f) و (Δ) في نفس المعلم، ماذا تلاحظ.	مرحلة الإنطلاق
5 د	خاصية ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$. القول أن المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	بناء المعرفة
5 د	ملاحظة إذا كانت f دالة بحيث $f(x) = (ax + b) + g(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ نفس الملاحظة عند $(-\infty)$. الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن في نفس المستوي المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y = ax + b$ لمعرفة وظيفية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x) - (ax + b)$ ثم ندرس إشارته أي إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان	تعميق المعرفة

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$
 نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$
 ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (yy')

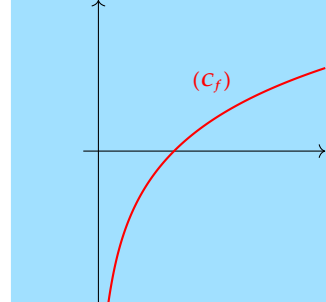


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$$

ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

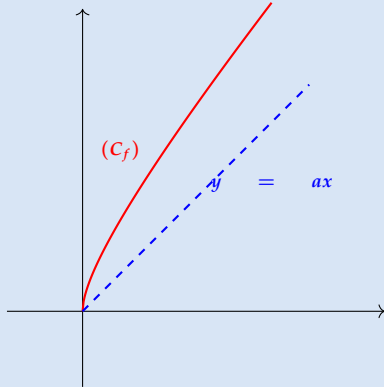
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (xx')



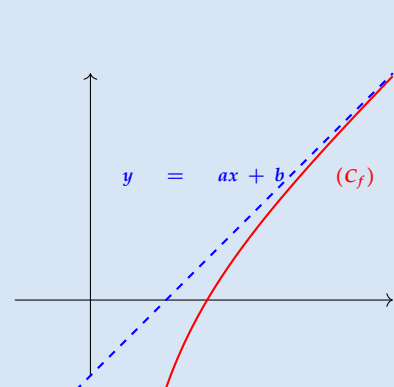
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

(C_f) يقبل فرع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



نتائج:

ف و g دالتان معرفتان بجوار $\pm \infty$ ، نضع (C_f) و (C_g) التمثيلات البيانية لهما على الترتيب .
 إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm \infty$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ ، ثم إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2 بين أن: $[f(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$ ، ثم إستنتج إشارة $[f(x) + 2x]$ ، فسر النتائج بياضيا .

4 نقبل أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، أرسم (C_f) و مستقيمه المقارب المائل.

التقويم



30 د

ملاحظات حول سير الحصة

.....

.....

.....

ثانوية ساجي مختار السمار - غليزان

الوحدة التعليمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة: العمليات على النهايات

الإستاذ: بخدة أمين
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المدة: 2 ساعة

المكتسبات القبلية: عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيين.
الكفاءات المستهدفة: حساب النهايات باستعمال المقارنة أو الحصر و مركب دالتين.
المراجع: الكتاب المدرسي، الأنترنت

المرحلة	عناصر الدرس	المراحل
10 د	التهيئة النفسية تذكير بطرائق إزالة حالة عدم التعيين نهاية مركب دالتين مبرهنة 1 أظف إلى مطوياتك نعتبر f, v, u ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولتكن a, b, c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. مثال أحسب النهايات التالية: ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x}}$ ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2)^2$ ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi - 2x)$ النهايات بالمقارنة	مرحلة الإنطلاق
10 د	مبرهنة 2 أظف إلى مطوياتك f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ مثال أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن: $x + \cos(x) \geq x - 1$ ، ثم إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x)$	بناء الـ
10 د	مبرهنة 3 أظف إلى مطوياتك f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	

مثال

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} : -x - \cos(x) \leq 1 - x$ ، ثم إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x - \cos(x)$

أظف إلى

مبرهنة 4

مطويتك

f, g, h دوال معرفة على D من $\mathbb{R}$ وليكن a و ℓ عدداً حقيقياً إما منتهيان أو $+\infty$ أو $-\infty$
إذا كان : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

مثال

$f(x) = \frac{x + \sin(x)}{2x + 1}$: $\left[-\frac{1}{2}; +\infty \right]$ دالة معرفة على
بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$ فإن : $\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$
إستنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

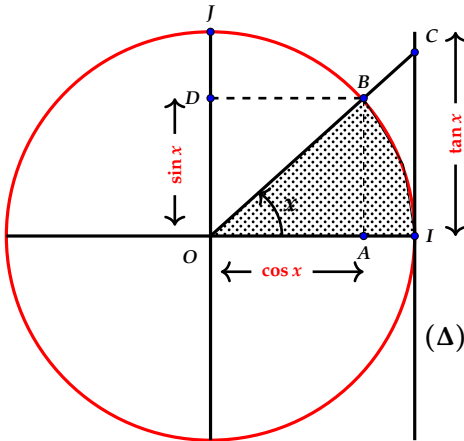
تطبيق

1 أحسب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \quad \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 \sin(x) \quad \textcircled{4}$$

تطبيق



في هذا الرسم ، B نقطة من الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم متعامد و متجانس
 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، A و D المسقطان العموديان للنقطة B على محوري المعلم.
 C نقطة تقاطع المستقيم (OB) مع المماس (Δ) للدائرة في النقطة $I(1;0)$
نعلم أن مساحة القرص هي : πr^2 ، إذن ماهي مساحة جزء من القرص
زاويته x (الجزء المظلّل)

$$r = 1 \text{ نعلم أن } S_x = \frac{x\pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2}x r^2 \text{ ومنه } \begin{cases} 2\pi \rightarrow \pi r^2 \\ x \rightarrow S_x \end{cases} \text{ ومنه } S_x = \frac{x}{2}$$

واضح من الشكل أن $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OCI}$ من أجل $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\textcircled{1} \text{ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]0; \frac{\pi}{2}[: \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\textcircled{2} \text{ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-\frac{\pi}{2}; 0[: \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\textcircled{3} \text{ إستنتج : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\textcircled{4} \text{ أثبت أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

$\textcircled{5}$ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ أن : الدالة المشتقة للدالة $x \rightarrow \cos(x)$ هي الدالة $x \rightarrow -\sin(x)$
و الدالة المشتقة للدالة $x \rightarrow \sin(x)$ هي الدالة $x \rightarrow \cos(x)$

1 لدينا : $S_{OIC} = \frac{IC \times OI}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$ ، $S_x = \frac{x}{2}$ ، $S_{OAB} = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{\sin(x) \cos(x)}{2}$
 إذن $\sin(x) \cos(x) \leq x \leq \tan(x)$ تكافئ $\frac{\sin(x) \cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$ تكافئ $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OIC}$
 تكافئ $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$ تكافئ $\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$

2 من أجل $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ فإن : $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ ومنه $-x \in]0; \frac{\pi}{2}[$
 $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq \frac{1}{\cos(-x)}$
 $\cos(x) \leq \frac{-\sin(x)}{-x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$
 أي $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$

3 إستنتاج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
 لدينا : $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)}$
 $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$
 ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

4 إثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \times \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x} \times \frac{1}{\cos(x) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1} \\ &= -1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5 إثبات أن مشتق الدالة $x \rightarrow \cos(x)$ هي الدالة $x \rightarrow -\sin(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) (\cos(h) - 1) - \sin(x) \sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= -\sin(x) \end{aligned}$$

إثبات أن مشتق الدالة $x \rightarrow \sin(x)$ هي الدالة $x \rightarrow \cos(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

النهايات المثلثية

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\alpha x)}{\tan(\beta x)} &= \frac{\alpha}{\beta} \text{ ④} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} &= \frac{\alpha}{\beta} \text{ ③} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} &= 1 \text{ ②} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 \text{ ①} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \text{ ⑥} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= 0 \text{ ⑤}\end{aligned}$$

تطبيق

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1 - \sin(x)} \quad \text{④} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x)}{\tan(x)} \quad \text{③} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \cos(x)} \quad \text{②} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \quad \text{①}$$

ملأ حزمات حول سير الحصة

.....

.....

.....



20د