

مجلة Top Maths

2AS M TM

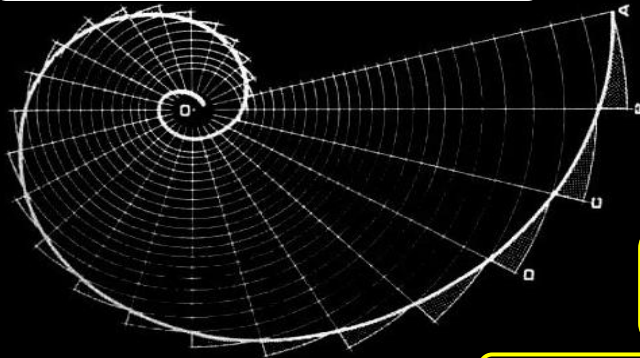
المتتاليات العددية

numerical sequence

المجلة تتضمن

- ✓ ملخص
- ✓ درس مفصل
- ✓ متتاليات حسابية
- ✓ متتاليات هندسية
- ✓ تمارين شاملة مع الحل
- المفصلة

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف



أفريل 2020

Top Maths Tlemcen

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749894848204586834365$$

www.dzexams.com



ا قدم لكم اخواني الاساتذة ابنائي الطلبة هذه المجلة و المتمثلة في درس
مفصل للمتتاليات العددية مع عشر تمارين شاملة محلولة بالتفصيل



تتضمن المجلة

✓ ملخص	ص 3
✓ الدرس المفصل	من ص 4 الى ص 17
✓ ملخص	ص 3
	ص 18

« رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ
وَالْأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ »

لا تنسوننا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

المتاليات العدريّة

المتتاليات العددية

ملخص المتتاليات الحسابية والهندسية

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + r$	تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n \times q$
عبارة الحد العام: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p + (n - p)r$، p حالة خاصة: من أجل $p = 0$ فإن $u_n = u_0 + nr$ من أجل $p = 1$ فإن $u_n = u_1 + (n - 1)r$	عبارة الحد العام: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$، p حالة خاصة: من أجل $p = 0$ فإن $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل $p = 1$ فإن $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$
مجموع حدود متتابعة: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (عدد حقيقي) فإن: $s = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	مجموع حدود متتابعة: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1) فإن: $s = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$
الوسيط الحسابي: تكون الأعداد الحقيقية $a; b; c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$ يسمى b الوسيط الحسابي للعددين $a; c$	الوسيط الهندسي: تكون الأعداد الحقيقية $a; b; c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$ يسمى b الوسيط الهندسي للعددين $a; c$
اتجاه تغير متتالية حسابية: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (عدد حقيقي) $r > 0$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما $r < 0$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما $r = 0$ المتتالية (u_n) ثابتة	اتجاه تغير متتالية هندسية: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$
نهاية متتالية حسابية: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (عدد حقيقي) $r = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	نهاية متتالية هندسية: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n$ إذا كان $-1 < q \leq 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ إذا كان $q < -1$ فإنه لا يمكن حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

عموميات حول المتتاليات العددية

1. التعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة u ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى ، العدد $u(n)$.

الترميز : نرمز إلى صورة n بـ u_n عوضا $u(n)$ ، وللمتتالية u نرمز لها كذلك بالرمز (u_n) .
 u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى الحد العام للمتتالية (u_n) .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية (u_n) .

أمثلة :

1. المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $u_1 = \frac{3}{2}$ ، $u_2 = \frac{5}{2}$ ، $u_4 = \frac{7}{2}$ ، ... (معرفة بإعطاء جميع حدودها)

2. المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = -3n + 5$ (معرفة بحددها العام)

3. المتتالية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_0 = 1$ و $w_{n+1} = 2w_n - 5$ (معرفة بعلاقة تراجعية)

ملاحظات:

1) يمكن لمتتالية (u_n) أن تعرف ابتداء من حد ذا مرتبة n_0 ونرمز لها أحيانا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ ويكون حدها الأول هو u_{n_0}

مثال: المتتالية (u_n) التي حدها العام $u_n = \sqrt{n-4}$ معرفة من أجل $n \geq 4$ ونكتب $(u_n)_{n \geq 4}$

2) تعرف متتالية بإعطاء جميع حدودها أو بإعطاء حدها العام أو بإعطاء حدها الأول وعلاقة تراجعية .

2. طرق توليد متتالية : (تعين حدود المتتالية)

❖ توليد متتالية بالحد العام $u_n = f(n)$:

إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما ويمكن حساب أي حد من حدودها
 مثال:

المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_n = 2n^2 + 3n + 2$

أحسب : u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_{10}

ملاحظة:

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة f ونكتب : $u_n = f(n)$ حيث f معرفة على المجال

$[0; +\infty[$ كما يلي : $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 2$

بتوليد متتالية بعلاقة تراجعية:

❖ يمكن تعريف متتالية بالتراجع وذلك بإعطاء :

✓ قيمة الحد الأول

✓ علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية .

مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -3u_n + 2$

- احسب الحدود : u_1 ; u_2 ; u_3

الحل:

حساب الحدود : u_1 ; u_2 ; u_3

$$u_2 = u_{1+1} = -3u_1 + 2 = -3 \times (-4) + 2 = 14 , \quad u_1 = u_{0+1} = -3u_0 + 2 = -3 \times 2 + 2 = -4$$

$$u_3 = u_{2+1} = -3u_2 + 2 = -3 \times (14) + 2 = -40$$

ملاحظة:

يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية باستعمال الدالة f ونكتب: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f معرفة على المجال D حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن $f(x) \in D$ كما يلي: $f: x \mapsto -3x + 2$ تسمى الدالة f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n)

3. اتجاه تغير متتالية

مبرهنة:

- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ($u_{n+1} - u_n > 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ($u_{n+1} - u_n < 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} = u_n$.

ملاحظة:

تكون المتتالية الرتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كانت إما متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) وإما متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب).

مثال 1 :

$$(u_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } u_n = 5n + 4 .$$

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 4 - (5n + 4) = 5n + 5 + 4 - 5n - 4 = 5$$

إذن (u_n) متزايدة تماما .

مثال 2 :

$$(w_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } w_n = -3n + 4 .$$

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N} , \quad w_{n+1} - w_n = -3 , \quad \text{إذن } (w_n) \text{ متناقصة تماما .}$$

ملاحظة :

في حالة $u_n = f(n)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n ،
 ✓ إذا كنت f متزايدة على $[0; +\infty[$ فإنه تكون (u_n) متزايدة .

✓ إذا كنت f متناقصة على $[0; +\infty[$ فإنه تكون (u_n) متناقصة.

تسمى f الدالة المرفقة

مثال 3 :

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{2-4n}{n+2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4n-2}{n+3} - \frac{2-4n}{n+2} = \frac{-4n^2-10n-4+10n+4n^2-6}{(n+3)(n+2)} = \frac{-10}{(n+3)(n+2)}$$

إذن (u_n) متناقصة تماماً.

مثال 4 :

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{n+1}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1+1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{لدينا: } n \geq 0 \text{ ومنه } n+1 \geq 1 \text{ ومنه } \frac{1}{n+1} \leq 1 \text{ ومنه } 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2 \text{ ومنه } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \leq 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ أي}$$

أي $u_{n+1} \leq u_n$ لأن $u_n > 0$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماماً

ملاحظة:

(u_n) متتالية حدودها موجبة تماماً. إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة وإذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة.

المتاليات الحسابية و الهندسية

نشاط

I) تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ 10000 DA الشهر الأول وزيادة في المرتب الشهري تقدر بـ 1300 DA بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .
نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

(1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ،

(2) عين علاقة بين v_n و v_{n+1} .

حل النشاط :

$$II) 1) v_1 = 10000$$

$$v_2 = v_1 + 1300 = 11300$$

$$v_3 = v_2 + 1300 = 12600$$

$$v_4 = v_3 + 1300 = 13900$$

$$2) \text{العلاقة بين } v_n \text{ و } v_{n+1}$$

$$v_{n+1} = v_n + 1300$$

1) المتاليات الحسابية

1.1. تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$. يسمى r أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظة:

$u_{n+1} = u_n + r$ معناه $u_{n+1} - u_n = r$ (الأساس هو الفرق بين كل حدين متتابعين)

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول u_0 وإذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة وإذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

مثال :

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = 4n + 2$ أنها متتالية حسابية معينا حدها الأول وأساسها

طريقة :

لبرهان على أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية نبرهن على أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ هو عدد ثابت هذا العدد الثابت هو أساس هذه المتتالية الحسابية

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 2 - (4n + 2)$$

$$= 4n + 4 + 2 - 4n - 2 = 4$$

$$(u_n) \text{ متتالية حسابية حدها الأول } u_0 = 2 \text{ وأساسها } r = 4$$

أمثلة:

- ✓ المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = 3n + 5$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ أساسها $r = 3$.
 ✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية متتالية حسابية حدها الأول 1 أساسها 2.

ملف 1 الحد العام لمتتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r . لدينا: $u_1 = u_0 + r$ ، $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$ ،
 في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:
 مبرهنة:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r .

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظة:

- ✓ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول u_0
 ✓ إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة
 ✓ إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

ملاحظات:

✓ إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$.

✓ بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي: $u_n = u_p + (n-p)r$.

تطبيق:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة أساسها r وحدها الأول $u_0 = 1$. عيّن r علما أن $u_1 \times u_2 = 66$

الحل

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 &= (u_0 + r)(u_0 + 2r) = \\ &= u_0^2 + 2ru_0 + ru_0 + 2r^2 \\ &= 1 + 2r + r + 2r^2 = 66 \\ 2r^2 + 3r - 65 &= 0 \\ \Delta &= 529 = 23^2 \\ r_1 &= -\frac{13}{2} \quad r_2 = 5 \end{aligned}$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن $r = 5$

تمرين

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.
- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 - أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) . استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل:

- الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$ ، لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n - 1$. إذن : $v_n = -5n - 1$
- $v_{n+1} - v_n = -5$: إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$ ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $v_0 = -1$
- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -1 - 5n$. $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$. $v_n = -1 - 5n$: بالجمع طرف بطرف نجد $u_n = S + u_0$ ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، $v_0 = u_1 - u_0$ ومنه $u_n = \frac{n}{2}(-2 - 5n) + 3$

1.3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

مبرهنة:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r . من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

البرهان:

نضع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$

$$(1) \dots S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$$

$$(2) \dots S = u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1 + u_0 = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \dots + (u_n - (n-1)r) + (u_n - nr) + u_0$$

$$2S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}_{(n+1) \text{ حد}} : \text{نحصل على : (1) و (2) نجمع}$$

$$S = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) \text{ أي } 2S = (n+1)(u_0 + u_n) \text{ ومنه}$$

ملاحظات:

$$u_1 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \quad \checkmark$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_n) \quad \checkmark$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n) \quad \checkmark$$

تطبيق:

أحسب المجموعين $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 1441$ و $M = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2020$

حل

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 1441 \\ &= (1 + 1441) \frac{1441 - 1 + 1}{2} = 1442 \left(\frac{1441}{2} \right) = 1038961 \\ M &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2020 \\ &= (1 + 2020) \left(\frac{2020 - 1 + 1}{2} \right) = 2021 \left(\frac{2020}{2} \right) = 2041210 \end{aligned}$$

1.4. الوسط الحسابي

نشاط:

- (u_n) متتالية حسابية معرفة على N بعدها الأول u_0 وأساسها r
- لتكن: $u_{n+1}; u_n; u_{n-1}$ ثلاث حدود متتابعة من المتتالية الحسابية (u_n)
- 1- أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة u_0 و r
 - 2- أستنتج عبارة $u_{n+1}; u_{n-1}$ بدلالة u_0 و r وبين أن $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$

الحل:

- 1- عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة u_0 و r : $u_n = u_0 + nr$
- 2- أستنتج عبارة $u_{n+1}; u_{n-1}$ بدلالة u_0 و r : $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ و $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$
- 3- $u_{n+1} + u_{n-1} = u_0 + (n+1)r + u_0 + (n-1)r = 2u_n$

مبرهنة:

تكون الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $2b = a + c$ العدد b يسمى الوسط الحسابي للعددين a و c .

تطبيق:

أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن: (1) $\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a \times b \times c = 80 \end{cases}$

الحل

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a \times b \times c = 80 \end{cases} \text{ وم ن } \begin{cases} 2b + b = 15 \\ a \times b \times c = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b = 15 \\ a \times b \times c = 80 \end{cases} \text{ وم ن } \begin{cases} b = 15/3 = 5 \\ a \times b \times c = 80 \end{cases}$$

نعوض b في المعادلة الثانية

$$\begin{cases} b=5 \\ a \times 5 \times c = 80 \end{cases} \quad \text{و م ن} \quad \begin{cases} b=5 \\ a \times c = 16 \end{cases}$$

نعوض b في (1)

$$\begin{cases} a+c=10 \\ a \times c = 16 \end{cases}$$

عددان علم مجموعهما و جدأؤهما هما حلا للمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$

حيث S هو المجموع $a+c$

و P هو الجداء $a \times c$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$\Delta = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

$$\text{ومنه } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{10-6}{2} = 2 ; x_2 = \frac{10+6}{2} = 8$$

اذن $(a; b; c) = (2; 5; 8)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r = 3$

او $(a; b; c) = (8; 5; 2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r = -3$

نشاط

I) تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ 10000 DA في الشهر الأول وزيادة سنوية تقدر

بـ 10% . نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$) .

(1) أحسب u_5 ، u_4 ، u_3 ، u_2

(2) عين علاقة بين u_n و u_{n+1} .

حل

حساب u_5 ، u_4 ، u_3 ، u_2

$$u_1 = 10000$$

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{10}u_1 = \frac{11}{10}u_1 = 11000$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{10}u_2 = \frac{11}{10}u_2 = 12100$$

$$u_4 = \frac{11}{10}u_3 = 13310$$

$$u_5 = \frac{11}{10}u_4 = 14641$$

تعين علاقة بين u_n و u_{n+1} .

$$u_{n+1} = \frac{11}{10}u_n$$

1. المتتاليات الهندسية

الطاقة 1. تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$. يسمى q أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظات:

- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0 .
- إذا كان $q = 0$ فإن حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.

طريقة:

لإثبات أن متتالية عددية (u_n) أنها متتالية هندسية يمكن :
 البرهان على وجود عدد حقيقي غير معدوم q حيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$
 - إثبات أن حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ حيث q عدد ثابت غير معدوم

مثال :

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = 3^n$ أنها متتالية هندسية معيناً حدها الأول وأساسها

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$$

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 3^0 = 1$ وأساسها $q = 3$

مثال:

المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = 2^n$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 1$ أساسها $q = 2$.

الطاقة 1 الحد العام لمتتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q
 لدينا: $u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^3$ ، $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$ ، $u_1 = u_0 \times q$
 في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q .

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) هي: $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات:

✓ إذا كانت المتتالية الهندسية معرفة بالحد u_1 والأساس q فإن عبارة الحد العام هي: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

✓ بصفة عامة من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

1.3. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

مبرهنة :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q . ليكن المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$

• إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

• إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

البرهان:

• في الحالة $q = 1$ ،

S هو مجموع $n+1$ مرة الحد u_0 ومنه $S = (n+1)u_0$.

• في الحالة $q \neq 1$

ليكن المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$ (1)....

ومنه $q \times S = qu_0 + qu_1 + \dots + qu_{n-1} + qu_n$ أي $q \times S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$ (2)....

بطرح (1) من (2) طرفا إلى طرف نجد: $q \times S - S = u_{n+1} - u_0$ أي $S(q-1) = u_0(q^{n+1} - 1)$

وبالتالي $S = u_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$.

تطبيق:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها العام كما يلي: $u_n = 2^n$. أحسب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الجواب:

$$S = 1 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

1.4 . الوسط الهندسي

مبرهنة :

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$b^2 = a \times c$$

العدد b يسمى الوسط الهندسي للعددين a و c .

تطبيق:

أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن:

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ a \times b \times c = 216 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ a \times b \times c = 216 \end{cases} \quad \text{و م ن} \quad \begin{cases} a + b + c = 26 \\ b^2 \times b = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ b^3 = 216 \end{cases} \quad \text{و م ن} \quad \begin{cases} a + b + c = 26 \\ b = \sqrt[3]{216} = 6 \end{cases}$$

نعوض b في المعادلة الثانية

$$\begin{cases} a+b+c=26 \\ b=\sqrt[3]{216}=6 \end{cases} \quad \text{ومن ن} \quad \begin{cases} a+6+c=5 \\ a \times 6 \times c=216 \end{cases}$$

نعوض b في (1)

$$\begin{cases} a+c=20 \\ a \times c=36 \end{cases}$$

عددان علم مجموعهما و جدأؤهما هما حلا للمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$

حيث S هو المجموع $a+c$

و P هو الجداء $a \times c$

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$\Delta = 400 - 144 = 256 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ومنه}$$

$$x_1 = \frac{20-16}{2} = 2 ; x_2 = \frac{20+16}{2} = 18$$

اذن $(a; b; c) = (2; 6; 18)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r = 3$

او $(a; b; c) = (18; 6; 2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r = \frac{1}{3}$

نهاية متتالية

ملاحظات:

✓ إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

✓ إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة) .

نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة

مبرهنة:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$

حيث α عدد حقيقي . نهاية الدالة f عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي نهاية المتتالية (u_n) .

ملاحظة:

النتائج والنظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

نهاية متتالية هندسية

مبرهنة:

q عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 .

✓ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

✓ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

✓ إذا كان $q < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ غير موجودة.

نتيجة:

تكون المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس q متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1 < q \leq 1$.

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

مبرهنة 1:

(u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ وإذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \leq u_n \leq w_n$ ،

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

مبرهنة 2:

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

مبرهنة 3:

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

أمثلة محلولة

1) $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$. عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$.

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 + \cos(n)$. عين نهاية المتتالية (u_n) .

نعلم من أجل كل عدد طبيعي n

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$-1 + n^2 \leq n^2 + \cos(n) \leq 1 + n^2$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

(3) $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي: $\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \frac{4n}{2n+3}$. عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{2 + \frac{3}{n}} = 2$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

(4) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = n + \sin(n)$. عين نهاية المتتالية (u_n) .
 نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n) \geq -1$.
 إذا $u_n \geq n-1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

تمرين الاول

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$.
 عين نهاية هذه المتتالية.

حل:

لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) ومنه $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$ والمعرفة على $\mathbb{R}$
 وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية
 مع الدالة المرفقة لها ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

تمرين الثاني

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$.
 عين نهاية هذه المتتالية.

الحل:

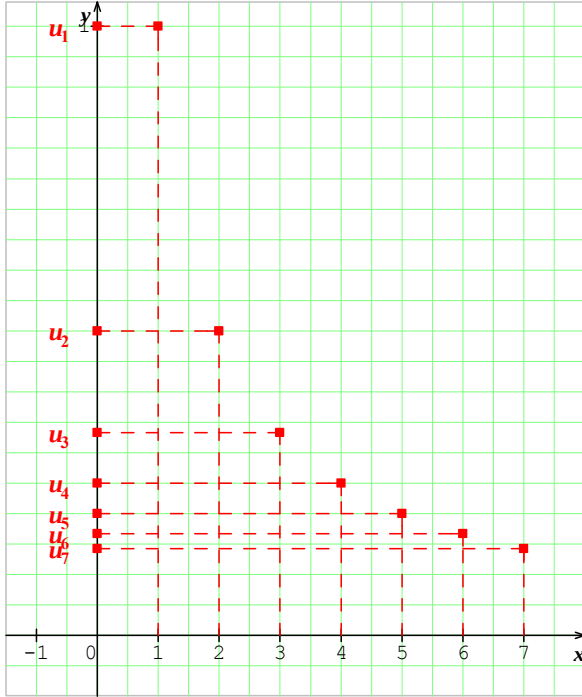
المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ الدالة العددية حيث f المعرفة على $[0; +\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0; +\infty[$.
 وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية
 مع الدالة المرفقة لها ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$

التمثيل البياني لمتتالية عددية

❖ متتالية معرفة بالحد العام

يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بعدها العام



(ترفق هذه المتتالية بدالة f) .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$u_n = \frac{1}{n}$$

(u_n) معرفة كذلك $u_n = f(n)$ حيث: $f(x) = \frac{1}{x}$

بما أن n عدد طبيعي نعرف f على المجال $[0, +\infty[$.

في الرسم المقابل التمثيل البياني للمتتالية (u_n) في معلم متعامد

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ هو مجموعة النقاط ذات الاحداثيات $(1; 1)$ ،

$\left(2; \frac{1}{2}\right)$ ، $\left(3; \frac{1}{3}\right)$ ، إلخ...

مجموعة النقاط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

❖ متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول u_0 والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقاط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية.

مثال: مثل بيانيا خمس حدود الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة

ب: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$

المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة

ب: $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

نرسم منحنى الدالة f ونرسم المستقيم الذي معادلته $y = x$

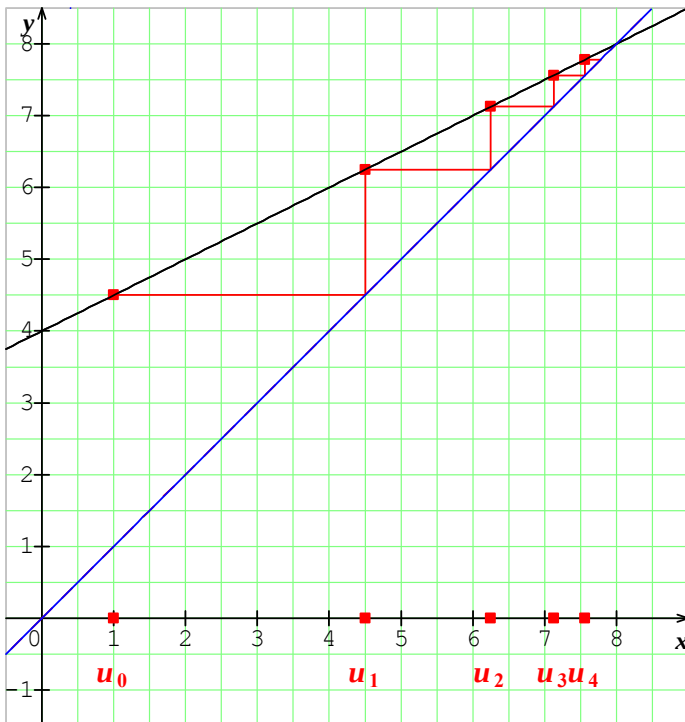
طريقة:

لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني

للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة

$y = x$ لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

والتمثيل البياني هو مجموعة النقاط $M(u_n, u_{n+1})$



تمارين محلولة

تمارين محلولة

التمرين الاول

- (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n ب: $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$ و $v_n = u_n + 3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- (1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .
- (2) عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (s_n) و (t_n) .

حل التمرين:

- (1) ليكن n عددا طبيعيا ، $v_n = u_n + 3$ ، $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$ ، إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 5$.

- (2) $v_n = u_n + 3$ معناه $u_n = v_n - 3$ ولدينا $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ إذن $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$ ولدينا $-1 < \frac{1}{3} < 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = -3$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right] = \frac{15}{2} \text{ ومنه } s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 5 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-2}{3}} = -\frac{15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - 3n - 3) = -\infty \text{ ومنه } t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + \dots + (v_n - 3) = s_n - 3n - 3$$

تمرين الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

- (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية: $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$ ،

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ،

أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ،

استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

حل التمرين:

- (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية: $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \text{ معناه } 3x = x + 14 \text{ ومعناه } x = 7$$

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$ ،

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - 7 = \frac{1}{3}u_n - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 7) = \frac{1}{3}v_n$ ، ومنه (v_n) متتالية

هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 7 = 6$.

$$v_n = v_0 q^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = v_n + 7 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7 \text{ ومنه}$$

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

التمرين الثالث

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ والعلاقة : $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) عين نهاية المتتالية (u_n) .

حل :

(1) لنحسب v_{n+1} .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{3} \\ &= 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} \\ &= \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

(2) أساس المتتالية هو $q = \frac{2}{5}$.

$-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$ لأن $u_n = v_n + \frac{5}{3}$

التمرين الرابع

لتكن المتتالية (u_n) والمتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} : n \text{ عدد طبيعي } v_0 = 1 , u_0 = 12$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

- 1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلع تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n .
- 2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.
- 3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. وأن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- 4) عين u_n و v_n بدلالة n .

حل القميرين

نحسب w_{n+1} بدلالة w_n .

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

$$3) \text{ نحسب : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3}w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$\text{نحسب : } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4}w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases} \quad (4)$$

القميرين الخامس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلع تعيين أساسها وحدها الأول.

• أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) . استنتج (u_n) بدلالة n .

حل القميرين

الحد الأول للمتتالية (v_n) هو $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$ ،

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n - 1$ إذن: $v_n = -5n - 1$

- $v_{n+1} - v_n = -5$: إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$
ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $v_0 = -1$.
- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -1 - 5n$: $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$.
 $u_n = S + u_0$ بالجمع طرف بطرف نجد $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ ، ... ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، $v_0 = u_1 - u_0$
ومنه $u_n = \frac{n}{2}(-2 - 5n) + 3$

التمرين السادس

- لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$
- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.
- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S . استنتج نهاية (u_n) .

حل التمرين

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$
- $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -1$.
- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$
- $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$
- $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- $-1 < \frac{1}{3} < 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = -\frac{3}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

التمرين السابع

- (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 14$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 4u_n + 3$
- ونعرف المتتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_n + 1$
- أ - أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- بداكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

تأحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

جـ احسب بدلالة n الجداء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

الحل:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 14$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 4u_n + 3$

ونعرف المتتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_n + 1$

لإثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 4u_n + 3 + 1 = 4(u_n + 1) = 4v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها

$q = 4$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$

بـ كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n : $v_n = 15 \times (4)^n$ ، $u_n = 15 \times (4)^n - 1$

تـ حساب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$$

$$= (15 \times (4)^0)^2 + (15 \times (4)^1)^2 + (15 \times (4)^2)^2 + \dots + (15 \times (4)^n)^2$$

$$= (15)^2 [4^0 + 4^2 + 4^4 + \dots + 4^{2n}]$$

$$= (15)^2 \left(\frac{1 - 16^{n+1}}{1 - 16} \right)$$

$$= 15(16^{n+1} - 1)$$

جـ حساب بدلالة n الجداء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$= (15 \times (4)^0) \times (15 \times (4)^1) \times (15 \times (4)^2) \times \dots \times (15 \times (4)^n)$$

$$= (15)^{n+1} [4^{0+1+2+3+\dots+n}]$$

$$= (15)^{n+1} \times (4)^{\frac{n+1}{2} \times n}$$

القمرين الثامن

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

1) ا) ارسم في معلم متعامد ومتجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$) المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d)

الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

ب) باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_3, u_2, u_1, u_0

ج) ما هو اتجاه تغير (U_n) ؟ هل (U_n) متقاربة ؟

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$

ا) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

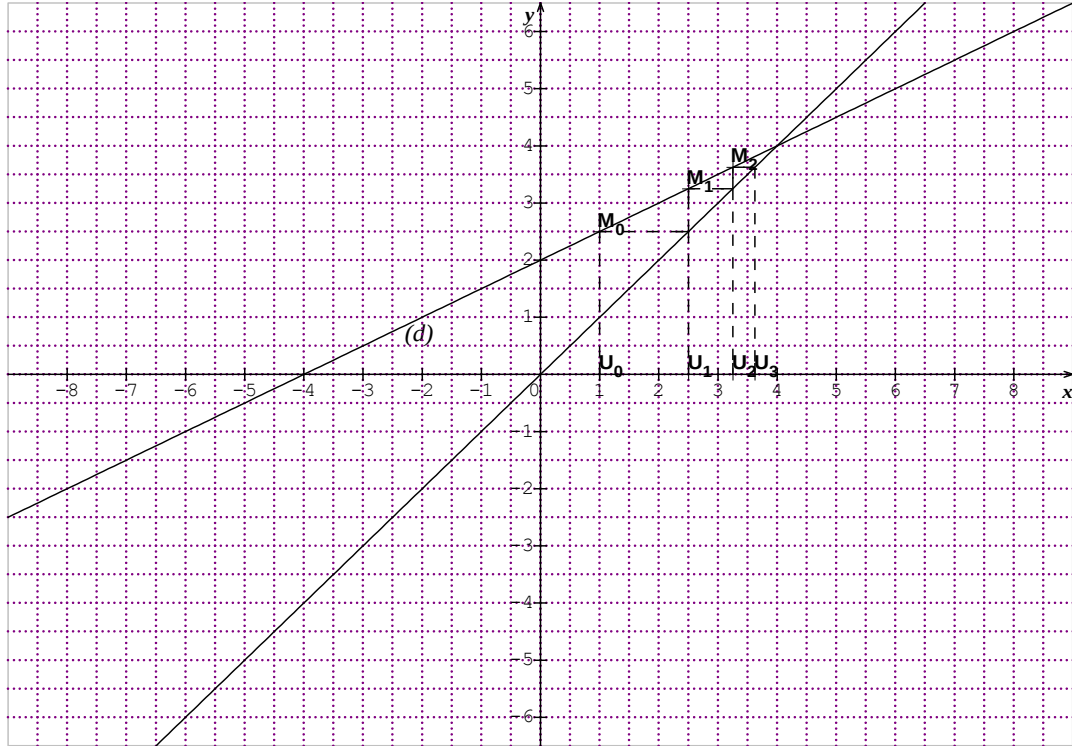
د) احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

الحل:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 : n \in \mathbb{N} \text{ و } u_0 = 1 \text{ حيث } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

1) أ) إنشاء (Δ) و (d)

ب) تمثيل بيانياً u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل وبدون حساب.



ج) المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$. (u_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

2) أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -3$

$$v_n = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ و } u_n = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4 : n \in \mathbb{N} \text{ ب)}$$

ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ لأن $-1 < q < 1$ نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة.

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + 4n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ و } S_n = 6 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right] + 4n \text{ ومنه } S_n = -3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + 4n \quad \text{د)}$$

القمرين التاسع

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1- أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$, المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثل

للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

ب) باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0, u_1, u_2 و u_3 .
2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3- أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ب- استنتج المجموع S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

2- أ) رسم (d) و (Δ) .

ب) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 .



2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$

أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -2$.

ب) كتابة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

$$u_n = v_n + 3 = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \quad \text{و} \quad v_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}_0 + 3 \right] = 3 \quad \text{ج}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$S_n = -2 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right] : \text{بـ } S_n \text{ بدلالة } n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S'_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + (v_2 + 3) + \dots + (v_n + 3)$$

$$S'_n = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n] + \left(\underbrace{3 + 3 + 3 + \dots + 3}_{n+1 \text{ مـ}} \right) : \text{بـ } S'_n \text{ بدلالة } n$$

$$S'_n = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right] + 3(n+1)$$

$$S'_n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3n$$

التمرين العاشر

قاعة سينما منظمة على شكل صفوف بحيث عدد الكراسي في الصف الأول 5 وعدد الكراسي في الصف الثاني يزيد عن عدد الكراسي في الصف الأول بـ 3 وعدد الكراسي في الصف الثالث يزيد عن الصف الثاني بـ 3 وهكذا...

- 1- احسب عدد الكراسي في الصف الثاني ثم في الصف الثالث
- 2- عبر بدلالة n عن عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة n
- 3- ماهو عدد الصفوف في هذه القاعة إذا علمت أن عدد الكراسي داخل القاعة هو 153

حل

عدد الكراسي في الصف الأول 5 , يزيد عدد الكراسي في الصف الثاني بـ 3 وفي الصف الثالث يزيد عدد الكراسي عن الصف الثاني بـ 3 وهكذا , نلاحظ أن هناك متتالية (U_n) حسابية حدها الأول $U_1 = 5$ وأساسها $r = 3$

1- عدد الكراسي في الصف الثاني والثالث:

$$U_2 = 5 + 3 = 8 \quad ; \quad U_2 = U_1 + r$$

$$U_3 = 8 + 3 = 11 ; U_3 = U_2 + r$$

2- عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة n :

$$U_n = 2 + 3n ; U_n = U_1 + (n - 1)r$$

3- عدد الصفوف علما أن عدد الكراسي في القاعة 153 :

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = 153$$

$$\frac{n}{2}(U_1 + U_n) = 153$$

$$3n + 7n - 306 = 0$$

$$n_2 = -11.3 \text{ مرفوضة} ; n_1 = 9 \text{ عدد الصفوف}$$

سلطان تم بفضل الله
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
سلطان الأستاذ يوسف بوشناق
سلطان يتمنى لكم التوفيق

جئتون هذا الملف في صفحة
Top Maths

