

سلسلة تمارين

المراجع

Le Barycentre

2AS

علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

شكر خاص لأصحاب هذا العمل

جميعها لكم الأستاذ: شعبان أسامة



التمرين الأول : لتكن A و B نقطتان

- (1) بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ وأرسمها .
لتكن M نقطة كيفية من المستوي أكتب بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$ الشعاع $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
- (2) نفس السؤال مع $\vec{0} = 3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB}$
- (3) لنعتبر عدنان حقيقيان α و β . هل توجد نقطة وحيدة G حيث : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

التمرين الثاني :

لتكن A و B نقطتان متمايزتان و M نقطة من المستقيم (AB)

برر وجود عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ واستنتج أن M هي مرجع النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين α و β

التمرين الثالث : لتكن A و B نقطتان متمايزتان

عين وأنشئ المرجع G_1 للجملة $\{(A, 1); (B, 3)\}$ ؛ عين وأنشئ المرجع G_2 للجملة $\{(A, -1); (B, 4)\}$
عين وأنشئ المرجع G_3 للجملة $\{(A, 2); (B, -3)\}$ ؛ عين وأنشئ المرجع G_4 للجملة $\{(A, -4); (B, 6)\}$

التمرين الرابع :

في كل من الحالات التالية إعط المعاملات α و β حيث M مرجع الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

$$(1) \quad \vec{0} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB} \quad (2) \quad \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \quad (3) \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (4) \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB}$$

التمرين الخامس :

C هو المرجع لـ : (A, 3) و (B, -7)

- عين عدنان حقيقيان β و γ حتى يكون A مرجع لـ : (B, β) و (C, γ)
- عين عدنان حقيقيان α و δ حتى يكون B مرجع لـ : (A, α) و (C, δ)

التمرين السادس :

لتكن G مرجع الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ حيث $\alpha + \beta \neq 0$

- بين أنه إذا كان α و β موجبان فإن G تقع على القطعة [AB]
- أين تكون النقطة G إذا كان α و β سالبان .
- أين تكون النقطة G إذا كان α و β مختلفان في الإشارة .

التمرين السابع :

ABC مثلث ، D و E نقطتان معرفتان بـ : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$

الموازي لـ (AC) من D يقطع المستقيم (BC) في F

1. عبر عن C كمرجع لـ A و E
2. عبر عن E كمرجع لـ A و C
3. عبر عن F كمرجع لـ B و C

التمرين الثامن :

[AB] قطعة مستقيمة طولها L . ندل بـ Γ إلى مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB}\| = L$

و بـ O نظيرة النقطة B بالنسبة إلى A . بين أن Γ هي دائرة مركزها O ونصف قطرها L .

التمرين التاسع :

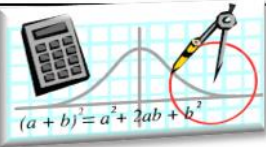
نعتبر نقطتان A و B حيث AB = 8

1. أنشئ G مرجع النقط المثقلة (A, 5) و (B, 3)
2. أنشئ H مرجع النقط المثقلة (A, 11) و (B, -3)
3. M نقطة من المستوي . برر أن الشعاعين $\overrightarrow{U} = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{V} = 11\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ موازيين لـ $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MH}$
4. عين المجموعة E_1 للنقط M من المستوي و التي تحقق $\|\overrightarrow{5MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{11MA} - 3\overrightarrow{MB}\|$

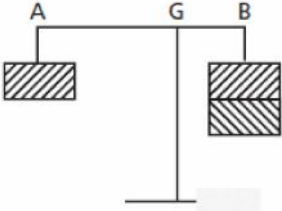
التمرين العاشر :

ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A حيث BC = 8cm و BA = 5cm وليكن I منتصف [BC]

1. أنشئ النقطة F حيث $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ و بين أن F هي مرجع النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما
2. لتكن P نقطة من المستوي إختصر كل من المجاميع التالية : $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$ ؛ $-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$ ؛ $2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$
3. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{-MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$
4. عين ثم أنشئ مجموعة النقط N من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{2NB} - 2\overrightarrow{NC}\|$



(1) الشكل المقابل AB يمثل قضيب محمل الكتلة .



نعلق في الطرف A كتلة مقدارها $1kg$ و نعلق في الطرف B كتلة مقدارها $2kg$.

لدينا: $\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$ ومنه نقول أن النقطة G هي مرجح الجملة المتثقلة $\{(A;...), (B;...)\}$

(2) في الشكل المقابل نعلق في الطرف A كتلة مقدارها $1kg$

بواسطة بكرة كما نعلق في الطرف B كتلة مقدارها $2kg$.

لدينا $-\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$ ومنه

نقول أن النقطة G هي مرجح الجملة المتثقلة $\{(A;...), (B;...)\}$



تمرين 1

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $AB = 4cm$

1- أنشئ النقطة F المعرفة بالعلاقة $\vec{FB} + 2\vec{FC} = \vec{0}$.

2- أنشئ النقطة G مرجح الجملة المتثقلة $\{(A;-1), (B;1), (C;2)\}$.

3- عين طبيعة وأنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث ، $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$.

تمرين 2

ليكن $ABCD$ مستطيلا .

1- أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2), (B;3)\}$ و النقطة J مرجح الجملة $\{(C;4), (D;1)\}$.

2- لتكن النقطة H المعرفة بـ : $2\vec{HA} + 3\vec{HB} + 4\vec{HC} + \vec{HD} = \vec{0}$

• بين أن النقط G, H و J في استقامية .

3- عين طبيعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ، $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|4\vec{MC} + \vec{MD}\|$

4- عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ، $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC} + \vec{MD}\| = 20$

تمرين 3

ليكن ABC مثلث قائم في النقطة A حيث $AB = 6cm$ و $AC = 3cm$.

ولتكن G مركز ثقل المثلث ABC و E مرجح الجملة المتثقلة $\{(A;1), (B;5), (C;-3)\}$

1- أكتب كلا من $\vec{AG}$ و $\vec{AE}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

2- بين (GE) يوازي (CB) .

3- عين طبيعة و أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث ،

• $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 5\vec{MB} - 3\vec{MC}\|$

في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $B(0;2), A(-1;1)$ و $C(2;-3)$ ، مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;-3)\}$ و H مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;-3), (C;-1)\}$.

- 1- علم النقط A, B و C .
- 2- أحسب إحداثيات كل من النقطتين G و H ثم بين أن النقطة H هي منتصف القطعة $[CG]$.
- 3- لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى بحيث يكون : $\|2\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}\| = 6$
 (أ) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوى ، $2\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} = -2\vec{MH}$ ،
 (ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $B(3;-1), A(1;1)$ و $C(4;4)$.

- (1) نعتبر النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;m), (C;5)\}$ حيث m عدد حقيقي .
 (أ) عين قيم m بحيث تكون النقطة G موجودة .
 (ب) عين قيم m بحيث تكون النقطة $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;m)\}$.
- (2) نفرض $m=3$
 (أ) أنشئ النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;3), (C;5)\}$.
 (ب) عين طبيعة و أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوى بحيث يكون :

$$\|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 5\vec{MC}\| = 20$$

في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط $C(5;7), B(-1;5), A(2;1)$ و $G\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

- 1- عين إحداثيي I مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين B و C .
- 2- عين إحداثيي النقطة H مركز ثقل المثلث ABC .
- 3- هل يوجد عدد حقيقي m بحيث تكون النقطة G مرجحا للجملة $\{(A;1), (B;m)\}$.

👏 بالتوفيق 😊😊😊 والنجاح 😊😊😊

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \| = 2MA \quad \star$$

التمرين السادس :

ABC مثلث حيث: $AB = 5$; $AC = 6$; $CB = 4$

1. أنشئ G مرجح الحملة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$.

2. عين المجموعة (E_1) مجموعة النقط من المستوي حيث:

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = 6$$

3. عين المجموعة (E_2) مجموعة النقط من المستوي حيث:

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 3\vec{MA} + \vec{MC} \|$$

4. نضع $A(1, 2)$; $B(-3, 4)$; $C(0, 1)$

عين إحداثيتي G مرجح الحملة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$

التمرين السابع : من بين الأجوبة المقترحة اختر جوابا

واحدا صحيحا مع التعليل:

العلاقة الشعاعية التالية: $\vec{AG} + 2\vec{GB} - \vec{CG} = \vec{0}$ تعني

أن G مرجح الحملة المثقلة: $\square \{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$

$\square \{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$, $\square \{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = 6 \text{ هي:}$$

$\square$ دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة

$\square$ محور قطعة مستقيمة يطلب تعيينها.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ولتكن النقط $A(2, -1)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 1)$.

١. إحداثيتي مركز ثقل المثلث ABC هي:

$\square (0, 1)$, $\square (0, 3)$, $\square (1, 0)$.

٢. إحداثيتي مركز المسافات المتساوية للنقط A , B , C

هي: $\square (2, 1)$, $\square (2, 3)$, $\square (1, 1)$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| -\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC} \|$$

هي: $\square$ دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة

$\square$ محور قطعة مستقيمة يطلب تعيينها.

التمرين الأول : A , B نقطتين من المستوي متميزتين.

• عين مرجح الحملة المثقلة في كل حالة:

$\{(A, 4); (B, 2)\}$, $\{(A, 8); (B, -5)\}$, $\{(A, 4); (B, 5)\}$,

$\{(A, 5); (B, 5)\}$

A , B , C ثلاث نقط من المستوي ليست في إستقامة.

• عين مرجح الحملة المثقلة في كل حالة:

$\{(A, -4); (B, -2); (C, -1)\}$, $\{(A, 4); (B, 6); (C, 1)\}$,

$\{(A, 4); (B, 4); (C, 4)\}$, $\{(A, 4); (B, 0); (C, 2)\}$

التمرين الثاني: $ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$.

♦ عين إحداثيات مرجح الحملة المثقلة في كل حالة:

$\{(A, 2); (B, -6); (D, 1)\}$, $\{(A, 4); (B, 6); (C, 1)\}$,

$\{(D, 4); (B, -1); (C, 2)\}$

$\{(A, -4); (B, -2); (C, 3); (D, 1)\}$,

$\{(A, 14); (B, 14); (C, 14); (D, 14)\}$

التمرين الثالث:

$ABCD$ رباعي I , J , K , L منتصفات الأضلاع $[AB]$

$[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ على الترتيب.

M , N منتصفا القطرين $[AC]$ و $[BD]$.

■ برهن أن المستقيمات (MN) , (JL) , (IK) تتقاطع في نقطة.

(إرشاد: نعلم أن O مركز ثقل الرباعي)

التمرين الرابع : لتكن القطعة $[AB]$ طولها $5cm$.

١. ماهي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $AM = 5cm$

٢. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

$$\| \vec{MA} + \vec{MB} \| = 5cm$$

التمرين الخامس : A , B , C ثلاث نقط من المستوي

ليست في إستقامة.

■ عين مجموعة النقط M من المستوي في كل حالة:

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = 4 \quad \star$$

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} \| = 2 \quad \star$$

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \| = -\sqrt{2} \quad \star$$

$$\| 2\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \| = 0 \quad \star$$

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \| = \| -\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \|$$

$$\| -\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \| = \| -\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \|$$

التمرين الثامن : $I \bullet A, B, C$ ثلاث نقط من المستوي ليست على إستقامة واحدة

لتكن الحملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, 2\alpha + 1)\}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1- عين قيمة العدد α حتى تقبل الحملة السابقة مرجحا.

2- أنشئ G مرجح الحملة السابقة من أجل $\alpha = 1$.

II • المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ولتكن النقط $A(2, 3)$ ، $B(1, -3)$ ، $C(3, x)$ ، حيث $x \in \mathbb{R}$

(1) عين قيمة x حتى يكون ABC مثلثا.

(2) نضع $x = -3$

أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC واستنتج طبيعته.

ب) عين إحداثيتي النقطة G .

ج) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$||\vec{MA} + 3\vec{MB}|| = 12$$

التمرين التاسع :

في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقط $A(3, 2)$ ، $B(1, -1)$ ، $C(-1, 5)$ ، $D(2, 5)$.

(1) عين إحداثيتي مركز ثقل المثلث ABC .

(2) أثبت أن D هي مرجح الحملة المثقلة

$$\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$$

(3) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$||2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} - \vec{MC}||$$

$$||2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} + \vec{MC}||$$

التمرين التاسع : ABC مثلث متساوي الساقين طول

ضلعه a ومركز ثقله النقطة K .

لتكن G مرجح الحملة المثقلة $\{(A, 1); (B, -3); (C, 1)\}$.

١. برر وجود النقطة المثقلة G . ٢. أنشئ H مرجح الحملة

$$\{(A, 1); (C, 1)\}$$

٣. بين أن G مرجح الحملة المثقلة $\{(H, 2); (B, -3)\}$.

٤. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$||\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}||$$

٥. تحقق أن النقطة B تنتمي للمجموعة (E) .

٥. بين أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل عن النقطة

M .

٥. بين أن $GM = a\sqrt{3}$ ثم استنتج طبيعة المجموعة (E) محققا عناصرها المميزة.

٥. لتكن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$3||\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}||$$

عين طبيعة المجموعة (E') محققا عناصرها المميزة.