

ملخص الجداء السلمي لشعاعين 2 ع ت

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد **الحقيقي** الذي نرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ والمعرف كما يلي:

$$(1) \text{ إذا كان } \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0} \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(2) \text{ إذا كان } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ و } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$(3) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ و } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$(4) \text{ إذا كان } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ فإن العبارة التحليلية للجداء السلمي هي } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

شرط تعامد مستقيمين $(D); (\Delta)$ مستقيمين حيث $n_D \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ و $n_\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ هما على الترتيب شعاعي الناظمين لهما

$$\begin{cases} (D): ax + by + c = 0; \\ (\Delta): \alpha x + \beta y + k = 0 \end{cases} \text{ القول أن } (\Delta) \perp (D) \text{ يكافئ أن:}$$

$$\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_D = 0 \text{ أو شعاعي توجيههما متعامدان أو جداء مليهما يساوي -1}$$

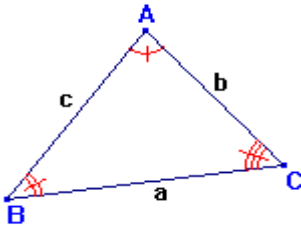
مبرهنة (المسافة بين نقطة و مستقيم):

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0, y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$ هي: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

العلاقات المترية في مثلث

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:



$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \text{مساحة المثلث}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \quad \text{قانون الجيوب}$$

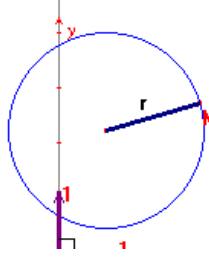
مبرهنة المتوسط: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

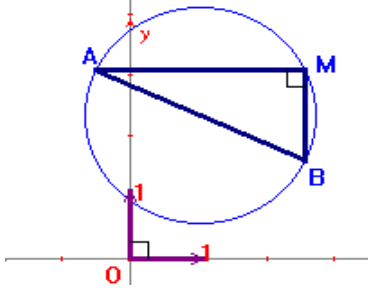
مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ و وطول نصف قطرها r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (r > 0) \text{ هي :}$$



معادلة دائرة علم نقطتين متناظرتين قطريا منها

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$



دساتير الجمع

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}} ; ; \boxed{\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

تعريف

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و المعروف كما يلي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{فإن} \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{أو} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{فإن} \quad \vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{إنتبه:}$$

حالات خاصة :

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ و بالتالي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا متعاكسان في الاتجاه فإن $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ و بالتالي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

نرمز للجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ بالرمز $\vec{u}^2$ و يسمى المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و بالتالي

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 \quad \text{إذا كانت } A \text{ و } B \text{ نقطتين فإن:}$$

ملاحظة:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \quad \text{إذا كان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ غير معدومين فإن}$$

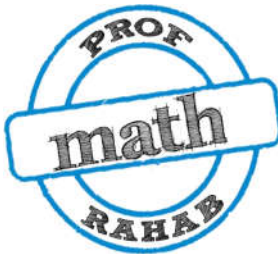
برهان :

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين .

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 \\ &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{ومنه:}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \quad \text{ومنه}$$



العبارة التحليلية للجراء السلمي :

ملاحظة:

في معلم متعامد و متجانس إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ فإن

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$



إذا كان $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس وكان $u(x; y)$ و $v(x'; y')$ شعاعين فإن :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \text{ و } \|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2(xx' + yy') \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(xx' + yy') \end{aligned}$$

وبالعودة إلى عبارة $\vec{u} \cdot \vec{v}$ نجد: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

الأشعة المتعامدة :

تعريف

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ فإن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

ملاحظة:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

قواعد الحساب :

خاصية:

من أجل كل ثلاثة أشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقي k

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \quad ① \\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ② \\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ③ \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad ④ \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad ⑤ \end{aligned}$$

المتطابقات الشهيرة :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

أو

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

أو

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

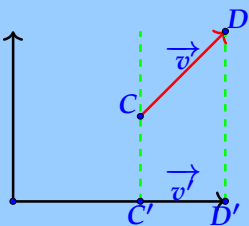
أو

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

الجراء السلمي والإسقاط العمودي :

المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

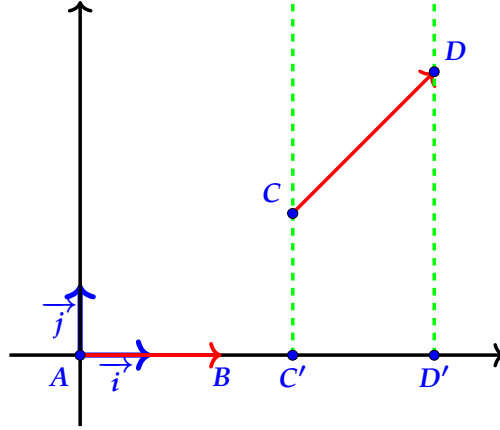
تعريف



$\vec{v}$ شعاع من المستوي حيث: $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. لتكن C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المحور $(O, \vec{u})$. يسمى الشعاع $\vec{v'}$ المعرف بـ $\vec{v'} = \overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O, \vec{u})$ أو على الشعاع $\vec{u}$

إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CD}$ على (AB) فإن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

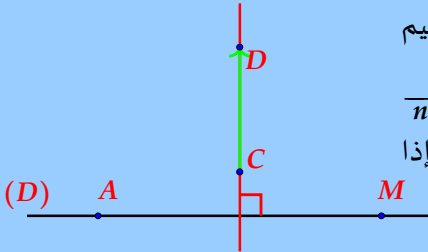
برهان:



نختار معلما متجانس $(A; \vec{i}, \vec{j})$ يكون فيه الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطيا.
عندئذ مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B; 0)$ و مركبتا الشعاع $\overrightarrow{CD}$ هما: $(x_D - x_C; y_D - y_C)$.
أما مركبتا الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ هما: $(x_D - x_C; 0)$ لأن: $x_D = x_{D'}$ ، $x_C = x_{C'}$ و $y_D = y_{D'} = y_{C'} = y_{C'}$
إذن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_B(x_D - x_C)$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = x_B(x_D - x_C)$

الشعاع الناطقي لمستقيم:

تعريف



القول ان الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناطقي لمستقيم (D) يعني ان $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)
فإذا كانت A نقطة من المستقيم (D) يقبل $\vec{n} = \overrightarrow{CD}$
شعاع ناطقي، عندئذ تنتمي النقطة M إلى المستقيم (D) إذا
و فقط إذا كان $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

معادلة مستقيم علم شعاع ناطقي له ونقطة منه:

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس لكل مستقيم له شعاع ناطقي غير معدوم $\vec{n}(a, b)$ معادلة ديكارتية من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث c عدد حقيقي
إذا كانت $ax + by + c = 0$ هي معادلة لمستقيم (D) فإن الشعاع $\vec{u}(-b, a)$ هو شعاع توجيه لـ (D)
و $\vec{n}(a, b)$ هو شعاع ناطقي له لأن $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان: $\vec{u} \cdot \vec{n} = a \times (-b) + ba = 0$

برهان:

نقطة معلومة من المستقيم (D) و $M(x; y)$ نقطة كيفية من (D)
 $\vec{n}(a, b)$ شعاع ناطقي للمستقيم تكافئ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ تكافئ $(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$ تكافئ
 $ax + by - x_0a - y_0b = 0$ تكافئ $ax + by + c = 0$ حيث: $c = -x_0a - y_0b$

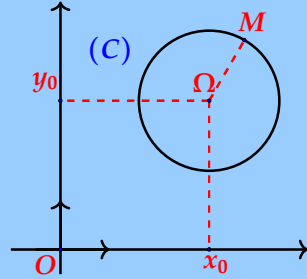
مثال تطبيقي: عين معادلة الدكارتية للمستقيم (D) حيث : $\vec{n}(3;2)$ شعاع ناظمي له و A (0.2) نقطة منه
ملاحظة:

إذا كان (D) و (D') مستقيمان معادلتهما: $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ على الترتيب
 $aa' + bb' = 0$ يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان
 $aa' = -1$ شرط تعامدهما
 إذا كان (D) و (D') مستقيمين مائلين ، معادلتهما: $y = ax + b$ و $y' = a'x + b'$ على الترتيب

معادلة دائرة علم مركزها ونصف قطرها:

تعريف

في معلم متعامد و متجانس لكل دائرة (C) ذات المركز $\Omega(x_0; y_0)$ و نصف القطر r حيث $r > 0$ معادلة
 من الشكل $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



الإثبات

الدائرة (C) هي مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق:

$$OM = r \text{ أي } OM^2 = r^2$$

مركبتا الشعاع $\vec{OM}$ هما: $(x - x_0; y - y_0)$ ، من المبرهنة
 إستنتجنا $OM^2 = r^2$ تكافئ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

مثال تطبيقي:

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 6$ هي معادلة دائرة التي مركزها A (-2;4) ونصف قطرها $\sqrt{6}$
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -4$ هي ليست معادلة لدائرة لأن $-4 < 0$

معادلة دائرة علم قطرها:

مبرهنة:

الدائرة التي قطرها [AB] هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

الإثبات

لتكن نقطة I منتصف [AB] ، و لنعرف $AB = 2r$ ،

من أجل أي نقطة كيفية M في المستوي :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MO} + \vec{OA}) (\vec{MO} + \vec{OB}) = \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 = MO^2 - AO^2 = MO^2 - r^2$$

إذن $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ تكافئ $MO = r$.

معادلة دائرة التي قوسها [AB]:

لتكن A ($x_A; y_A$) و B ($x_B; y_B$) ، و لتكن (C) الدائرة التي قطرها [AB]

و مركبات الشعاعين $\vec{MA}$

و $\vec{MB}$ هي ($x - x_A; y - y_A$) و ($x - x_B; y - y_B$) على الترتيب .

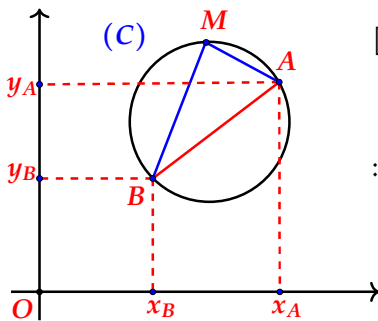
(C) هي مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ تكافئ:

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

وهي تكافئ: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ حيث :

$$a = -x_A - x_B \text{ و } b = -y_A - y_B$$

$$c = x_A x_B + y_A y_B$$



لكل دائرة (C) معادلة من الشكل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ولكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

كيف نعلم أن: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلة دائرة ؟:

لتعين (C) مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نكتب هذه المعادلة بالصيغة $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$
 إذا كان $k > 0$ ، فإن (C) دائرة و النقطة $\Omega(x_0; y_0)$ مركزها ونصف قطرها $\sqrt{k}$
 إذا كان $k = 0$ ، فإن (C) نقطة وحيدة $\Omega(x_0; y_0)$
 إذا كان $k < 0$ ، فإن (C) خالية.

مبرهنة التوسط

A و B نقطتان. I منتصف قطعة مستقيم [AB]
 لدينا: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
 تكافئ: $MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$
 وبما أن: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ أي $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ و $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
 فإن: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة:

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة [AB]. من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

العلاقات التريية في مثلث قائم :

مبرهنة الكلاشني

ABC مثلث حيث $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

اثبات:

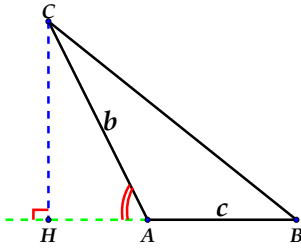
حسب علاقة شال: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$
 تكافئ: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ تكافئ: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \cos \hat{A}$
 أي: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$
 بنفس الطريقة نجد: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{A}$ و $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$

ABC مثلث حيث $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

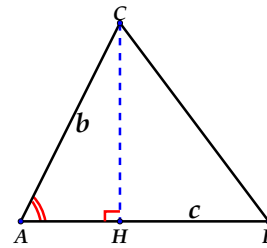
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

إثبات:

نعلم أن $S = \frac{1}{2}AB \times CH$ ، إذا كانت $\hat{A}$ حادة فإن: $CH = CA \times \sin \hat{A}$
وعندما تكون $\hat{A}$ منفرجة فإن: $CH = CH \times \sin(\pi - \hat{A}) = CA \sin \hat{A}$
ومنه في كلتا الحالتين: $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$



$$CH = CH \times \sin(\pi - \hat{A})$$



$$CH = CA \times \sin \hat{A}$$

نتيجة:

من المبرهنة السابقة ، نجد أن $2S = bc \sin \hat{A} = ac \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C}$ ، إذن بتقسيم $2S$ على abc
نحصل على: $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$
و إذا كانت جيوب زوايا المثلث مختلفة عن الصفر فإن: $S = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

تطبيق

ABC مثلث، فيه $c = 20$ ، $b = 28$ و $a = 32$ وفق الترميز المألوف .
أوجد قياسات التقريبية $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$
أحسب طول كل من المتوسط و الإرتفاع المرسومين من A

حساب الزوايا

لدينا حسب مبرهنة الكاشي $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$ ، إذن نستنتج أن:
 $32^2 = 28^2 + 20^2 - 2ac \cos \hat{A}$ ومنه $\cos \hat{A} = \frac{1}{7}$ ، باستعمال الآلة حاسبة نجد: $\hat{A} = 82^\circ$ ، بنفس الطريقة
إنطلاقاً من علاقة: $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{B}$ نجد $\hat{B} = 60^\circ$ و أخيراً نحسب $\hat{C}$ بسهولة من:
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$ نجد $\hat{C} = 38^\circ$

حساب الإرتفاع

لنضع $h = c \sin \hat{B} = 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ ، ومنه $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$ ، إذن $h = 10\sqrt{3}$

حساب المتوسط

ليكن I منتصف $[BC]$ ، ولنضع $AI = m$. لدينا إنساندا إلى مبرهنة المتوسط ما يلي: $c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$
إذن: $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{28^2 + 20^2}{2} - \frac{32^2}{4} = 16 \times 21$ ، ومنه $m = 4\sqrt{21}$

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0; y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ هي}$$

تطبيقات

- ❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعادلة: $y = 2x + 1$
- ❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω و تمس المستقيم (D') ذو المعادلة: $y = x + y - 2$
- ❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x, y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$
- هل بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x + 2y + 4 = 0$ مماس للدائرة (C') ؟

مناقشة تطبيقات

- ❖ $y = 2x + 1$ تكافئ $-2x + y - 1 = 0$ ومنه المعادلة الديكارتية للمستقيم (D) هي: $-2x + y - 1 = 0$
- $d(A; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2(2) + 1(3) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- ❖ $(C) : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{2}$ إذن: $r = d(\Omega; (D)) = \frac{|1(-2) + 1(1) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
- ❖ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ تكافئ: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$ ومنه (C') دائرة مركزها $A(1; 3)$ ونصف قطرها $r' = \sqrt{10}$
- تكايف: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ومنه (C') دائرة مركزها $A(1; 3)$ ونصف قطرها $r' = \sqrt{10}$
- $d(A; (D')) = \frac{|3(1) + 2(3) + 4|}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ إذن $d(A; (D')) > r'$ ومنه (D') ليس مماس لـ (C')

تمرين 74 صفحة 303

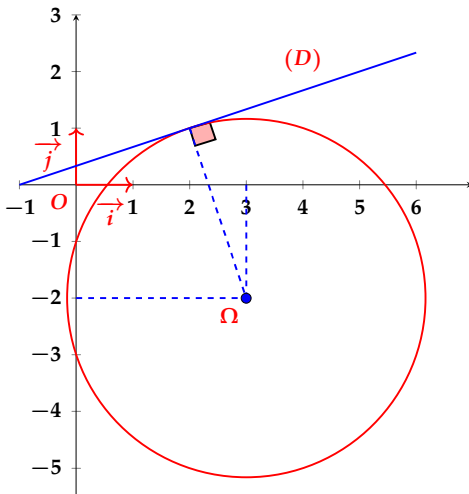
لتكن $\Omega(3; -2)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $x - 3y + 1 = 0$

1 أحسب المسافة بين Ω و (D) .

2 إستنتج معادلة للدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D)

حل

1



$$\begin{aligned} d(A; (D')) &= \frac{|1(3) - 3(-2) + -1|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

2 نصف قطر الدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D) هو $\sqrt{10}$:

$$\begin{aligned} \text{معادلة لهذه الدائرة هي: } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 10 \\ \text{ومعناه: } x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

من أجل كل عددين حقيقيين a و b

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \textcircled{2} \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \textcircled{1}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \textcircled{4} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \textcircled{3}$$

تطبيق ①

❖ تحقق أن: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ ، ثم أحسب: $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$ ، وإستنتج: $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$

حل

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

• إستنتاج القيم المضبوطة لـ: $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

عبارة $\sin 2a$ و $\cos 2a$

تطبيق ②

بين، باستعمال النتائج السابقة، أن: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

بين، أن: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

حل

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a$$

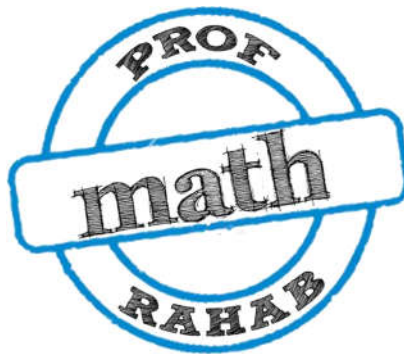
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

من أجل كل عدد حقيقي a

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \textcircled{2} \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \textcircled{1}$$

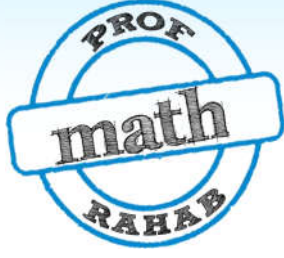
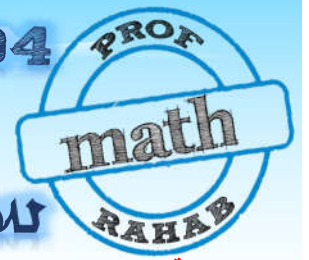
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \textcircled{4} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \textcircled{3}$$



04 تمارين بالحل المفصل في

الجداء السلمي في المستوي

للأقسام: 2 عت، 2 ت ر، 2 ر



تمرين رقم 1:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3\sqrt{2}$ و $AC = 2\sqrt{2}$ و $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1- أ- تحقق أن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$

ب- أحسب المسافة BC .

ج- النقطة I هي منتصف القطعة $[BC]$. أحسب المسافة AI .

2- لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A .

تصحيح التمرين رقم 1:

ABC مثلثا بحيث $AB = 3\sqrt{2}$ و $AC = 2\sqrt{2}$ و $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1- أ- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 2 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

ب- باستعمال مبرهنة ألكاشي: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(-6)$$

$$BC^2 = 18 + 8 + 12$$

$$BC^2 = 38$$

$$BC = \sqrt{38}$$

ج- باستعمال مبرهنة المتوسط $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

$$(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2AI^2 + \frac{(\sqrt{38})^2}{2}$$

$$18 + 8 = 2AI^2 + \frac{38}{2}$$

$$26 = 2AI^2 + 19$$

$$2AI^2 = 26 - 19$$

$$2AI^2 = 7$$

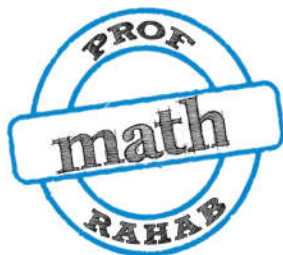
$$AI^2 = \frac{7}{2}$$

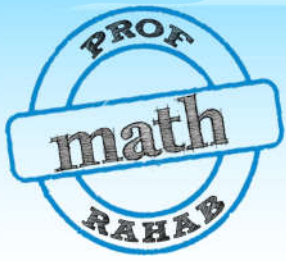
$$AI = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

2- لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. لنحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

من إعداد الأستاذ: رحاب عبد الباسط





$$= \frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{3} (3\sqrt{2})^2 - 6$$

$$= \frac{18}{3} - 6 = 6 - 6 = 0$$

وبما أن $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ فإن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A

تمرين رقم 2:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1 - أحسب : $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

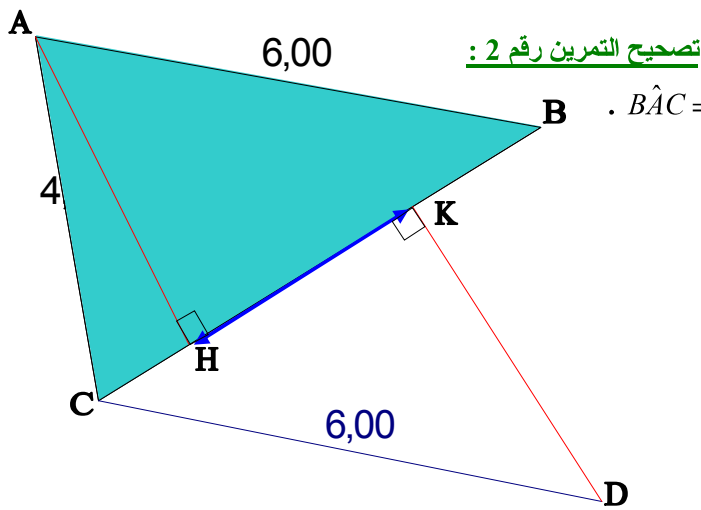
2 - أحسب المسافة BC .

3 - لتكن النقطة D بحيث $\overline{CD} = \overline{AB}$ و H و K على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين A و D على (BC) .

أ - بين أن : $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$

ب - بين أن $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -BC \times HK$.

ج - استنتج قيمة المسافة HK .



تصحيح التمرين رقم 2 :

1 - لدينا ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad -2$$

$$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 12$$

$$BC^2 = 36 + 16 - 24 = 52 - 24 = 28$$

$$BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3 - أ - لدينا : باستعمال علاقة شال $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{BD})(\overline{BA} + \overline{AC})$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{AC})(-\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$$

ب - باستعمال الاسقاط لدينا

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{HK} \cdot \overline{BC} = -HK \times BC$$

ج - بما أن : $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$ و $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -BC \times HK$

$$-HK \times BC = AC^2 - AB^2 \quad \text{فإن :}$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = 4^2 - 6^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = -20$$

$$HK = \frac{10}{\sqrt{7}} \quad \text{إذن} \quad HK = \frac{-20}{-2\sqrt{7}}$$

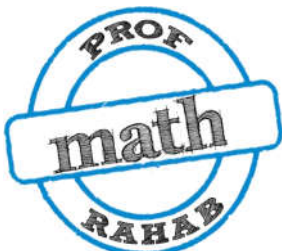
تمرين رقم 3:

ليكن $ABCD$ مربع طول ضلعه 4.

النقطتان I و J هما منتصفا القطعتين $[AD]$ و $[DC]$ على التوالي.

1 - أ - أحسب $\overline{DJ} \cdot \overline{BA}$ و $\overline{AD} \cdot \overline{AI}$.

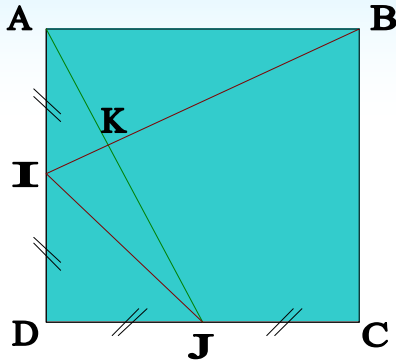
ب - أحسب $\overline{AJ} \cdot \overline{BI}$ و استنتج أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين ..



2 - أحسب $\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$.

3 - لتكن K هي نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (BI) بين أن : $BK - IK = \frac{6}{\sqrt{5}}$

تصحيح التمرين رقم 3 :



1 - أ - لدينا : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = AD \times AI = 4 \times 2 = 8$

ولدينا : $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} = -DJ \times BA = -2 \times 4 = -8$

ب - لدينا حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI})$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$= 0 + 8 - 8 + 0 = 0$$

بما أن $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ فإن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين .

2 - لنحسب المسافات IJ و IB و BJ .

$BJ^2 = BC^2 + CJ^2$ $BJ^2 = 4^2 + 2^2$ $BJ^2 = 16 + 4$ $BJ^2 = 20$ $BJ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	$IB^2 = IA^2 + AB^2$ $IB^2 = 2^2 + 4^2$ $IB^2 = 4 + 16$ $IB^2 = 20$ $IB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	$IJ^2 = ID^2 + DJ^2$ $IJ^2 = 2^2 + 2^2$ $IJ^2 = 4 + 4$ $IJ^2 = 8$ $IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
--	--	---

بتطبيق مبرهنة ألكاسي : $BJ^2 = IB^2 + IJ^2 - 2 \times IB \times IJ \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$

$$(2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$$

$$20 = 20 + 8 - 8\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$$

$$8\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = 28 - 20$$

$$\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = 1$$

$$\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(BK - IK)(BK + IK) = BK^2 - IK^2$$

3 - لدينا :

$$BK - IK = \frac{BK^2 - IK^2}{BK + IK} \quad \text{إذن}$$

$$BK - IK = \frac{(AB^2 - AK^2) - (AI^2 - AK^2)}{BI}$$

$$BK - IK = \frac{AB^2 - AI^2}{BI} = \frac{4^2 - 2^2}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

تمرين رقم 4 :

ABC مثلث بحيث AB = 4 و AC = 3 و $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{5}{6}$.

1 - أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

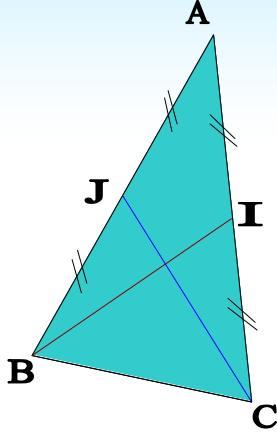
2 - أحسب المسافة BC.

3 - أ - لتكن I منتصف [AC] و J منتصف [AB].

$$\text{بين أن : } \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2)$$

ب - استنتج أن المستقيمين (BI) و (CJ).





1 - لدينا : $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$= 4 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

2 - باستعمال مبرهنة الكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 16 + 9 - 12 = 13$$

$$BC = \sqrt{13}$$

3 - أ - $\overline{BI} \cdot \overline{CJ} = (\overline{BA} + \overline{AI}) \cdot (\overline{CA} + \overline{AJ})$

$$= \left(-\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \right) \cdot \left(-\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} \right)$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AC} \cdot \overline{AC})$$

$$= \frac{5}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$$

ب - لدينا : $\overline{BI} \cdot \overline{CJ} = \frac{5}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$

$$= \frac{5}{4} \times 10 - \frac{1}{2}(4^2 + 3^2)$$

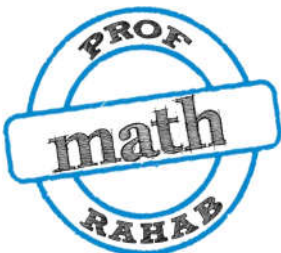
$$= \frac{50}{4} - \frac{1}{2} \times 25$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{25}{2} = 0$$

إذن المستقيمان (BI) و (CJ) متعامدان .

حَظَاهُ الْيَوْمِ غِرَاسُ الْأَفْسِ

و غِرَاسُ الْيَوْمِ غَدًا يَحْظُهُ



الجداء السلمي

تمرين 01

$ABCD$ مربع حيث $AB = 3$ و I نقطة تقاطع قطريه
- احسب الجداءات السلمية التالية $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CI}$

تمرين 02

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس نعتبر
النقط $A(3,2)$, $B(7,8)$, $C(8,3)$, ولتكن I منتصف $[AB]$

1) عين إحداثي النقطة I

2) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ماذا تستنتج؟

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج قيس
الزاوية $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$

4) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$

5) من 3 و 4 استنتج طبيعة المثلث AIC

6) ماذا تستنتج بالنسبة الى المثلث ABC ؟

تمرين 03

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس نعتبر

النقط $A(1,3)$, $B(a,1)$, $C(-1,0)$, $a \in \mathbb{R}$

1) عين قيم العدد الحقيقي a إن وجد حتى :

أ) المثلث ABC قائم في A

ب) $BC = a + 3$

ج) $\frac{2003\pi}{3}$ قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

2) نفرض أن $a = 4$ عين قيسا للزاوية الموجهة

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ثم استنتج نوع المثلث ABC

تمرين 04

ABC مثلث حيث $AB = 2$ و $BC = 4$
 H المسقط العمودي للنقطة A على القطعة $[BC]$
حيث $BH = 1$

1) احسب $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$
استنتج قيمة كل من $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH}$

تمرين 05

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a
ولتكن D نقطة من المستوي بحيث محور $[CB]$
للقطعة $[AD]$,
احسب $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

تمرين 06

عين معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) في
الحالات الاتية

1- (Δ) يشمل $A(-1,3)$ و $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

2- (Δ) يشمل $B(-3,2)$ وعمودي على المستقيم
 (AC) حيث $A(4,-3)$ و $C(5,-2)$

3- (Δ) يشمل $A(2,-3)$ وعمودي على المستقيم
 (Δ') ذو المعادلة $-2x + y + 7 = 0$

تمرين 07

1. اكتب معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω و
نصف قطرها R في الحالات التالية :

أ. $\Omega(-3,4)$, $R = 5$ ب. $\Omega(2,1)$, $R = \sqrt{2}$

2. اكتب معادلة للدائرة التي مركزها وتشمل
النقطة في الحالتين التاليتين:

أ. $\Omega(-3,4)$, $A(0,1)$ ب. $\Omega(2,-3)$, $A(0,0)$

تمرين 10

في مستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس
نعتبر مجموعة النقط (C) حيث :

$$(C): x^2 + y^2 - 5x + 5 = 0$$

1) بين أن (C) دائرة يطلب تعيين مركزها و
نصف قطرها

2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة

$$(\Delta): 2x - 3y + 2 = 0$$

-أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) بالنسبة
للدائرة (C)

تمرين 11

في مستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس
نعتبر النقط $M(x, y)$, $B(0, \sqrt{3})$, $A(2, 0)$

$$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

1. احسب الجداء السلمي $\overline{MO.OA}$

2. استنتج ان مجموعة النقط التي تحقق

$$\overline{MO.OA} = 3 \text{ هي الدائرة } (C) \text{ التي مركزها}$$

$I(1, 0)$ و نصف قطرها $r = 2$ ثم تحقق ان النقطة
B تنتمي اليها.

3. عين معادلة المستقيم (D) المار من النقطة E و

العمودي على الشعاع $\overline{IA}$

4. عين معادلة للمستقيم (T) مماس (C) في
النقطة B

5. عين احداثيتي النقطة E نقطة تقاطع

المستقيمين (D) و (T)

6. احسب المسافة بين المستقيم (D) و النقطة E

ثم المسافة بين المستقيم (T) و النقطة E

7. أرسم الدائرة (C) و المستقيم (D) و المماس (T)

موضحا النقطتين A و B

3. عين معادلة للدائرة (C) التي قطرها [AB] حيث:

$$A(-1, 5), B(3, 1), B(-1, 2), A(3, -2).$$

4. اكتب معادلة للدائرة التي تشمل النقط A, B, C في
الحالتين التاليتين :

$$A(-1, -1), B(1, 2), C(3, -1).$$

$$A(1, 0), B(0, 2), C\left(-2, \frac{-3}{2}\right).$$

تمرين 08

عين في كل حالة مما يأتي مجموعة النقط التالية:

$$1. x^2 + y^2 - 5x + 7y + \frac{5}{2} = 0$$

$$2. 2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$

$$3. x^2 + y^2 - x + 4y + 5 = 0$$

$$4. 2(x^2 + y^2) - 4x + 2y + \frac{1}{2} = 0$$

$$5. 4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 13 = 0$$

$$6. y^3 + x^2y + 5y^2 - 4xy = 0$$

تمرين 09

في معلم متعامد و متجانس لتكن النقط $A(2, 1)$,

$$B(-1, 3), C(-2, k+1), k \in \mathbb{R}$$

1. عين قيمة k حتى يكون المثلث ABC قائما في B

2. عين معادلة الدائرة (C) التي قطرها [AB]

3. استنتج مركز و نصف قطر الدائرة (C)

4. عين معادلة (Δ) الارتفاع المتعلق بالضلع [AC]

5. عين معادلة (Δ') محور القطعة المستقيمة [AB]

6. عين احداثيتي النقطة E نقطة تقاطع المستقيمين
(Δ) و (Δ') هل $E \in (C)$ ؟ علل.

$$AI^2 + BJ^2 + CK^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) \text{ أثبت أن}$$

تمرين 15 :

ABC ليكن $ABEF$ و $ACGH$ مربعان

1) برهن أن $\overline{FC}^2 = \overline{BH}^2$. ماذا يمكن القول عن

القطعتين $[FC]$ و $[BH]$

2) عبر عن الزاوية $(\overline{AF}, \overline{AH})$ بدلالة الزاوية

$(\overline{AB}, \overline{AC})$ ثم أثبت أن المستقيمان (FC) و (BH)

متعامدان

تمرين 16 :

I) عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ كل من العبارات التالية :

$$A = \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad (1)$$

$$B = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{3}) \quad (2)$$

$$C = 2\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad (3)$$

$$D = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) \quad (4)$$

$$E = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \quad (5)$$

II) 1) عبر بدلالة $\cos 2\alpha$ عن كل من $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$

2) عبر عن $(\cos x + \sin x)^2$ و $(\cos x - \sin x)^2$ بدلالة $\sin 2\alpha$

تمرين 17 :

أنشر العبارة $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ ثم حل في المجال

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \quad [0; \pi]$$

تمرين 12

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس نعتبر

النقط $C(3, 6)$, $D(1, 4)$, $M(x, y)$ والمجموعة (E) التي

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM} = 0 \text{ تحقق}$$

1. عين مجموعة النقط (E)

2. عين معادلتى المماسين (Δ_C) و (Δ_D) لمجموعة النقط

(E) عند النقطتين C و D على التوالي

3. ماذا يمكن القول عن النقطتين C و D

4. نعتبر النقطة $B(-1, 7)$ أحسب المسافة بين النقطة B

والمستقيم (Δ_C) ثم استنتج المسافة بين B و (Δ_D)

5. نعتبر النقطة $W(2, 5)$ أوجد مجموعة النقط من

$$\overrightarrow{WM} \cdot \overrightarrow{DW} = 0 \text{ تحقق التي المستوى}$$

تمرين 13

(π) مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس و

لتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى

$$x^2 + y^2 - (m-4)x + (m+4)y + 6 = 0 \text{ التي تحقق :}$$

$$m \in \mathbb{R}$$

1) بين أن (C_m) دائرة محدد مركزها ونصف قطرها

2) حدد (D) مجموعة المراكز (C_m) لما يتغير m في $\mathbb{R}$

3) بين أن جميع الدوائر (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين

A و B

4) تحقق أن $(D) \perp (AB)$

5) نعتبر المستقيم $(\Delta_m): y = -2x + m$

أناقش حسب قيم m تقاطع (C_2) و (Δ_m)

ب) لتكن $\{M_1, M_2\} = (\Delta_m) \cap (C_2)$ و I_m منتصف

$$[M_1 M_2]$$

حدد مجموعة النقط لما يتغير m في $\mathbb{R}$.

تمرين 14

ABC مثلث , I , J , K منتصفات الأضلاع $[BC]$,

$[AC]$,

تمرين 18 :

$$\sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 1 \quad (6)$$

$$\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4} \quad (7)$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \quad (8)$$

$$\sqrt{3} \sin 5x + \cos 5x = 1 \quad (9)$$

تمرين 22 :

$AB = 4$ و B نقطتان من المستوي حيث
ما هي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق
 $MA^2 + MB^2 = 16$

تمرين 23 :

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$(2\vec{MA} - 3\vec{MB}) \cdot \vec{AB} = 0 \quad (1)$$

$$(2\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - \vec{MB}) = 0 \quad (2)$$

تمرين 24 :

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

(1) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{AB} \quad \text{يكون :}$$

$$AB = 1 \quad \text{نفرض أن}$$

عين مجموعة النقط من المستوي بحيث :

$$M \quad MA^2 - MB^2 = 2$$

تمرين 25 :

لتكن A و B نقطتان متميزتان من المستوي و

G مرجح الجملة $\{(A;3), (B;2)\}$ حيث $AB = 5$

(1) أكتب $\vec{AG}$ بدلالة $\vec{AB}$

(ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي

بحيث :

$$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 10 \dots\dots (1)$$

بين أن $G \in (E)$

برهن أن العلاقة (1) تكافئ $\vec{AG} \cdot \vec{AB} = 0$

- استنتج أن (E) هي المستقيم العمودي على

(AB) في G .

(1) بملاحظة أن $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ أحسب $\sin(\frac{\pi}{12})$

$$\cos(\frac{\pi}{12})$$

(2) أحسب $\sin(\frac{\pi}{8})$, $\cos(\frac{\pi}{8})$

تمرين 19 :

أكتب $\tan(x+y)$ بدلالة $\tan(x)$ و $\tan(y)$

تمرين 20 :

I بسط العبارات التالية :

$$A = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \quad (1)$$

$$B = \sqrt{3} \cos x - \sin x \quad (2)$$

$$C = \frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} \quad (3)$$

II برهن صحة المساويات التالية :

$$\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad (2)$$

$$6 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 5 + \cos 2x \quad (3)$$

$$\sin(x+y) \cos(x-y) + \cos(x+y) \sin(x-y) = \sin 2x \quad (4)$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 2x)(1 + \cos 2x) \quad (5)$$

تمرين 21 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\cos x + \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{3\pi}{4}) + \cos(x + \pi) = 1 \quad (1)$$

$$\sin^4 x - \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} = 0 \quad (2)$$

$$\cos^4 x - \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} = 0 \quad (3)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cdot \sin(x + \frac{7\pi}{6}) = -\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\cos(x + \frac{3\pi}{4}) \cdot \cos(x + \frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (5)$$