



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقاط)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a=7n+5$, $b=2n+1$, $c=13n+3$.

$$d = \text{pgcd}(a;b) \quad \text{و} \quad d' = \text{pgcd}(b;c)$$

1. بين أن: $a+b+c \equiv 1444[7]$ إذا وفقط إذا كان n مضاعف للعدد 7 .

2. عين القيم الممكنة لكل من d و d' ثم استنتج $\text{pgcd}(a;b;c)$.

3. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما c .

4. نعتبر المعادلة : $(E) \dots 19x-8y=3$ حيث x و y عددان صحيحان .

(أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 1[8]$ ثم حل المعادلة (E) .

(ب) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $(y-2x)^2 \leq 9$.

(ج) عين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 ثم عين قيم n التي تحقق : $3^n \equiv xy[7]$ و تحقق : $(y-2x)^2 \leq 9$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=0$ و بالعلاقيتين : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ و $v_n = \ln\left(\frac{\alpha}{u_{n+1} - u_n}\right)$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

I. بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \ln 3$ ثم عين قيمة α علما أن حدها الأول $v_0 = \ln 3$.

II. نضع $\alpha = 6$ و نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $w_n = \frac{6}{e^{v_n}}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n = \frac{2}{3^n}$.

2. أحسب المجموع S_n التالي : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$.

3. بين أن : $S_n + u_0 = u_n$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

4. (أ) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

(ب) استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $\frac{1}{3-u_n} \equiv 2023[5]$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : (0,1,2) و أربعة كريات حمراء مرقمة بـ : (1,1,2,3) و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ : (1,2,3) . جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .
نسحب من الكيس 3 كريات في آن واحد و نعتبر الحادثين التاليين :

A " الكريات المسحوبة متمایزة اللون مثنى مثنى " B " الكريات المسحوبة متمایزة الرقم مثنى مثنى " .

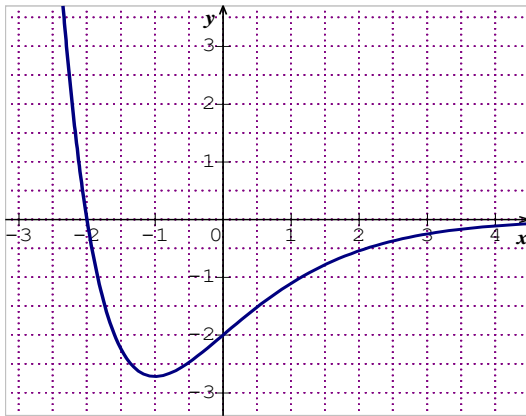
1. أحسب $P(A)$ و بين أن $P(B) = \frac{5}{12}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب أصغر الأرقام المحصل عليها .

(أ) ف عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X و بين أن : $E(X) = \frac{47}{60}$.

(ب) أحسب اعدادين T و S حيث : $T = P(e^{X-1} - 1 \geq 0)$ و $S = E(1440X + 316)$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)



I. الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -\frac{x+2}{e}$

(C_g) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) الشكل المقابل .

أحسب $g(-2)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ بقراءة بيانية .

II. الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-3)e^x + 3$

(C_f) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) . (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1cm$)

1. (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x) = g(-x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

3. برهن أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[2; +\infty[$ حيث $2.82 < \alpha < 2.83$.

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 0 ثم أنشئ كل من (T) و (Δ) و (C_f) .

5. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = -|m|x$ ثلاث حلول مختلفة .

6. أحسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

و المستقيمين الذين معدليهما $x = 0$ و $x = \alpha$. ثم بين أن : $A_\alpha = \frac{3}{3-\alpha} - 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

- يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : $(-2, 0, 2)$ و أربعة كريات حمراء مرقمة بـ : $(-1, 0, 1, 2)$.
 جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب ثلاث كريات عشوائيا و في آن واحد من الكيس .
 نعرف الحدثين : A " الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها موجب تماما " B " الكريات المسحوبة من لونين مختلفين " .
1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(A \cap B)$.
 2. نقترح اللعبة التالية . للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha^2(DA)$ (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري)
 فإذا سحب ثلاث كريات من نفس اللون يتحصل على $85DA$ و اذا سحب ثلاث كريات مختلفة اللون يتحصل على $15DA$ و ليكن X لمتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .
 أ) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم بين أن أمله الرياضي معطى بدلالة α كما يلي : $E(X) = 25 - \alpha^2$.
 ب) عين قيم α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب علما أن : $\alpha \equiv 1[3]$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{Q}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = \frac{12}{5 - u_n} - 3$.
1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.
 2. بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما و استنتج أنها متقاربة .
 3. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ بالعلاقة : $v_n = \alpha + \frac{4}{u_n - 3}$ حيث α عدد حقيقي .
 عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .
 4. نضع $\alpha = 1$. أ) أكتب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 ب) أحسب الجداء التالي : $P_n = \left(\frac{u_0 + 1}{u_0 - 3} \right)^2 \times \left(\frac{u_1 + 1}{u_1 - 3} \right)^2 \times \dots \times \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 3} \right)^2$.
 ج) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون : $\left(3^4 P_n = \frac{1}{729} \right)$ ثم تحقق أن : $2n \equiv 2023[5]$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

- A و B نقطتين من المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لاحتقائهما معرفتين كما يلي : $z_A = 2i$ و $2z_A + \overline{z_B} = 2$.
1. تحقق من أن لاحقة النقطة B هي $z_B = 2 + 4i$.
 2. أ) بين أن لاحقة النقطة D هي $1 + i$ علما أن $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
 ب) استنتج طبيعة المثلث ABD .

3. عين لاحقة النقطة C صورة النقطة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right)^n$ حقيقيا.

5. حدد طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق:

$$\|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}\| = \|2\overline{MA} - 2\overline{MC}\|$$
ثم أنشئها.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 3x + 2 + \ln(x+1)$

1. بين أن g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.47 < \alpha < -0.46$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

III. لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(3 - \frac{1}{x+1}\right) \ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1\text{cm}$)

1. أحسب كل من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أثبت أن : $f(\alpha) = -\frac{(3\alpha+2)^2}{\alpha+1}$ ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 0 .

5. نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ :

$$h(x) = \frac{-2x^2 - 2x + (3x+2)\ln(x+1)}{x+1}$$

(C_h) تمثيلها البياني الشكل المقابل.

(أ) تحقق أن : $h(x) = f(x) - 2x$ ثم حدد بقراءة بيانية إشارة $h(x)$.

(ب) استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T) .

6. أنشئ كل من (T) و (C_f) .

7. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

8. (أ) أحسب الدالة المشتقة على المجال $]-1; +\infty[$ للدالة : $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$ و التي تنعدم عند 0 .

